

Colle du 4 juin 2010

Exercice Soit C l'enveloppe convexe de n points s_1, \dots, s_n . Montrer que si \mathcal{E} est un disque elliptique inclus dans C et contenant s_1 , alors \mathcal{E} est dégénérée (c'est-à-dire réduite à un segment).

Exercice Déterminer les différents objets géométriques obtenus en coupant un cône par un plan.

Exercice Soit \mathcal{C} un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , k un réel positif, on note $M(C, k)$ l'ensemble des milieux des segments $[M_1M_2]$ tels que $M_1, M_2 \in \mathcal{C}$ et $M_1M_2 = k$. Démontrer que dans le cas où \mathcal{C} est l'union de deux demi-droites partant de \vec{O} , alors $M(C, k)$ est un arc d'ellipse (étudier selon l'angle entre les demi-droites, et selon k).

Exercice Montrer que si C est une conique et K un corps non algébriquement clos (\mathbb{Q} par exemple), alors l'ensemble des points à coordonnées rationnelles sur C est l'ensemble vide, ou en bijection avec $K \cup \{\infty\}$ (l'infini sera défini proprement si on a le temps, en fin de colle). Le faire explicitement pour un cercle de rayon 1.