Colle du 30 avril 2010

- Bases orthonormales : définition, existence de bases orthonormales, expression du produit scalaire en B.O.N., procédé d'orthogonalisation de Schmidt, théorème de la base orthonormale incomplète
- Orthogonal d'un s.e.v. F de E euclidien : F et son orthogonal sont supplémentaires, dimension de l'orthogonal, équation normale d'un hyperplan
- Isomorphisme canonique de E sur E^*
- Projection orthogonale, distance d'un vecteur à un hyperplan, symétrie orthogonale.
- Groupe orthogonal, matrices orthogonales Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2.
- Description des groupes $O(2)$ et $SO(2)$, orientation du plan, matrices de réflexion et système générateur de $O(2)$.

Exercice Calculer la bornée inférieure de $\int_0^1 (t^n - a - bt - ct^2)^2 \mathrm{d}t$, pour n fixé et a, b et c les paramètres variables.

Exercice Soit A une matrice inversible. Montrer qu'on peut écrire $A = OT$ avec O orthogonale et T triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs.

Exercice Montrer que le théorème de représentation de Riesz est faux en dimension infinie.

Exercice Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et f une application linéaire de E dans E. Montrer qu'il existe une unique application linéaire f^* de E dans E telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, on ait $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

Calculer f^* si f est un projecteur orthogonal. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E et $f(E) \subseteq E$, alors $f^*(E^\perp) \subseteq E^\perp$.

On admet que si $f = f^*$, alors f admet une valeur propre réelle. En déduire que si $f = f^*$, alors f est diagonalisable.

Exercice Pour n entier naturel non nul, on note $L_n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}(X^2 - 1)^n$. Montrer que pour n et m distincts, $\int_{-1}^1 L_n L_m = 0$

Montrer que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et toutes dans $]-1, 1[$.

En notant a_1, …, a_n ces racines, montrer qu'il existe λ_1, …, λ_n réels tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait $\int_{-1}^1 P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i)$.

Exercice Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ tels que $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation de récurrence entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2} pour tout n, et calculer T_0, T_1, T_2.

Montrer qu'ils sont orthogonaux pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ défini par $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$. En déduire que $T_n^\perp = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire de la forme $(P|Q) = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t$ où $a < b$ et w est une fonction continue strictement positive. On a de plus $\deg(P_n) = n$. Montrer que les P_n sont scindés à racines simples, avec leurs racines dans l'intervalle $[a, b]$.

Exercice On identifie matrices et applications linéaires associées.

Déterminer, pour $\vec{x} \neq 0$, l'ensemble $\{f\vec{x} | f \in SO(2)\}$, ainsi que $\{f \in O(2) | f\vec{x} = \vec{x}\}$. En déduire que $O(2)$ est engendré par les rotations et les symétries.

Exercice Montrer qu'un sous-groupe fini de $SO(2)$ est cyclique.

Exercice Montrer que $(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et que les polynômes d'interpolation de Lagrange en 0, 1, *etc.*, n sont orthonormaux pour ce produit scalaire.

Exercice Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Cas d'égalité ?

Exercice Montrer que dans une base convenable d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, une forme quadratique non dégénérée a pour matrice $\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-p \text{ fois}})$.