Colle du 21 avril 2010

- Équations différentielles :
- Équations différentielles linéaires du premier ordre : Reprise du programme précédent.
- Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre du type exponentielle-polynôme : Définition, résolution de l'équation sans second membre, résolution de l'équation avec second membre, recherche d'une solution particulière.
- Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée.
- Espaces vectoriels euclidiens :
- Rappels et compléments sur les formes bilinéaires :
- Forme bilinéaire, forme bilinéaire symétrique, noyau d'une forme bilinéaire symétrique, forme bilinéaire symétrique dégénérée, non dégénérée, forme bilinéaire symétrique positive, définie positive.
- Matrice d'une forme bilinéaire dans une base, théorème du noyau.
- Propriétés particulières des formes bilinéaires symétriques positives : Cauchy-Schwarz, Minkowski.
- Espaces vectoriels euclidiens : Définition, produit scalaire, carré scalaire, norme.
- Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, s.e.v. orthogonaux, orthogonal d'un s.e.v., théorème de Pythagore.

Exercice Si f est un endomorphisme de E, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note $P(f)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0} a_k f^k$, où par convention $f^0 = id$.

Montrer que $\ker(P_1 P_2(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f))$ si P_1 et P_2 sont premiers entre eux, et en déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ selon les valeurs du discriminant de $X^2 + aX + b$.

Généralisation : quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$.

Exercice (Avec l'exercice précédent)

Résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + y'' + 1 = 0$.

Exercice Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ tels que $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation de récurrence entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2} pour tout n, et calculer T_0, T_1, T_2.

Montrer qu'ils sont orthogonaux pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ défini par $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$. En déduire que $T_n^{\perp} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire de la forme $(P|Q) = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t$ où $a < b$ et w est une fonction continue strictement positive. On a de plus $\deg(P_n) = n$. Montrer que les P_n sont scindés à racines simples, avec leurs racines dans l'intervalle $[a, b]$.

Exercice Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 7x + 19y + 33z \\ y' & = & x + 2y + 4z \\ z' & = & -2x - 5y - 9z \end{array}\right.$$

Exercice Montrer que $(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et que les polynômes d'interpolation de Lagrange en 0, 1, *etc.*, n sont orthonormaux pour ce produit scalaire.

Exercice Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Cas d'égalité ?

Exercice Montrer que dans une base convenable d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, une forme quadratique non dégénérée a pour matrice $\operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-p \text{ fois}})$.