Colle du 4 mars 2010

- Calcul approché d'intégrales sur un segment :
- Méthode des rectangles, des rectangles médians, des trapèzes, de Simpson.
- Matrices :
- Matrice d'une application linéaire : matrice sur un corps K, matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée, matrice d'une application linéaire, bijection entre $\mathcal{L}(E^n, F^p)$ et $M_{p,n}(K)$.
- Structure d'espace vectoriel de $M_{p,n}(K)$.
- Produit de matrices : produit d'un ligne par une colonne, d'une matrice par une colonne, formules analytiques d'une application linéaire, application au rang d'une application linéaire, produit de deux matrices. Théorème fondamental : produit de matrices et composition d'applications linéaires. Propriétés du produit matriciel, structure d'algèbre de $M_n(K)$. Matrices carrées inversibles.
- Transposition : définition et propriétés, matrices carrées symétriques et antisymétriques.

Exercice Soit $\mathcal{B}$ une base fixée de E un K-espace vectoriel. Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E^n) & \rightarrow & \mathscr{M}_n(K) \\ f & \mapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \end{cases}$ est un isomorphisme de K-algèbres.

Exercice Déterminer la matrice de $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{cases}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, et déterminer son inverse.

En déduire, si on a une relation du type $a_d = \sum_{q=0}^{d} b_q \binom{d}{q}$ et $a_0 = b_0$ pour tout d entre 1 et n, une relation qui exprime b_d en fonction de a_d pour tout d entre 1 et n.

En déduire le nombre de permutations sans point fixe dans $\mathfrak{S}_n$, et le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$ si $n \geq k$ (montrer d'abord que n^k égale la somme, pour $j = 1$ à n, du nombre de surjections de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ fois $\binom{n}{q}$).

Exercice Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Calculer U^2. Quel est le rang de U ? Son noyau ? Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à U. Trouver une base $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ de E telle que $f(\vec{e_1}) = n\vec{e_1}$ et $f(\vec{e_i}) = \vec{0}$ sinon.

Exercice Soit $G \subseteq M_n(K)$ un groupe pour le produit. Donner un exemple de tel groupe. Montrer que toutes les matrices ont même noyau et même image.

Exercice Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(K)$. Montrer que $\frac{1}{\operatorname{card}(G)} \sum_{M \in G} M$ est un projecteur.

Exercice Quel est le cardinal de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?