Colle du 26 février 2010

- Intégration : Reprise du programme précédent.
- Primitives de fractions rationnelles en x et $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$,
- Primitives de fractions rationnelles en x et $(ax^2+bx+c)^{1/2}$,
- Primitive du produit d'une exponentielle par un polynôme.
- Intégration sur un intervalle quelconque : fonctions continues positives intégrables ; définition, premières propriétés, caractérisation à l'aide d'une primitive, règles d'intégrabilité.
- Fonctions continues intégrables.

Exercice Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes réels $(B_n)_{n\geq 0}$ telle que $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_n = 0$ pour $n \geq 0$.

Exercice On suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ est un nombre rationnel. Montrer que $\int_0^\pi f_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t$ est entier avec $f_n(t) = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!}$, et conclure.

Exercice Calculer $\int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}\mathrm{d}x$. Limite quand $n \to \infty$?

Exercice Soit $(a(n))_{n\geq 1}$ une suite, $A(x) = \sum_{1\leq n\leq x} a(n)$, et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\sum_{1\leq n\leq x} a(n)\varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

Dans cet exercice, on note (p_i) la suite des nombres premiers. Soit $P_N = \prod_{i=1}^N p_i$. Montrer par récurrence que $P_N \leq 4^N$ (on utilisera le fait que si $n+1$ n'est pas premier, alors $2m+1 = n+1$ et tout nombre premier p compris entre $m+2$ et $2m+2$ divise $\binom{2m+1}{m}$, puis que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$. Alors, $P_{m+1} \leq 4^{m+1}$ implique $P_{n+1} \leq 4^{n+1}$).

En déduire que $\theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln(p)$, puis que $\pi(x) \leq 4\left(\frac{x}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)^2}\right)$, où $\pi(x)$ est le cardinal de l'ensemble des nombres premiers entre 1 et x. Enfin, montrer que pour x assez grand, $\pi(x) \leq 4\ln(2)\frac{x}{\ln(x)}$.

Exercice On note d_n le plus petit commun multiple de tous les nombres entre 2 et n. Soit $I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n\mathrm{d}x$. Montrer que $d_{2n+1}I_n$ est un entier, et en déduire une minoration de d_{2n+1} (on utilisera $I_n \leq 1/4^n$). Si l'exercice précédent a été fait, en déduire que $\pi(x) \geq \frac{\ln(2)}{2}\frac{x}{\ln(x)}$ pour x assez grand.

Exercice Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors $\exp\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \exp\circ f$.

Exercice Montrer que $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ existe, mais que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable $[0, +\infty[$.

Exercice À quelle condition sur x l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est-elle définie ? Soit $\Gamma(x)$ cette intégrale, pour tout x où l'intégrale est définie. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour x dans le domaine de définition de Γ. En déduire que $\Gamma(n+1) = n!$. Équivalent de $\Gamma(x)$ quand x tend vers 0 ?

Exercice Montrer que si f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite $\sum_{n=1}^N \left|\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right|$ converge.

Exercice En comparant $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ et $\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, montrer que la suite $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ converge. En utilisant ce fait, construire une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui est intégrable, sans pour autant qu'elle n'ait une limite ou qu'elle soit bornée.

Exercice Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application continue intégrable sur $[a, \infty[$, qui tend vers une limite finie l en $+\infty$. Montrer que $l = 0$.

Exercice Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application intégrable sur $[a, \infty[$ et uniformément continue. Montrer que $f \to 0$ en $+\infty$.

Exercice Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $|x^2 f(x)| \to 0$ quand $x \to \pm\infty$. Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$, et montrer que (après avoir justifié que la série est sommable) :

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} hf(nh) = \int_0^\infty f.$$

Exercice Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{E(x)}$ est intégrable sur $]1, \infty[$, et montrer que l'intégrale de cette fonction sur cet intervalle égale la limite de $\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ quand $n \to \infty$.

Exercice Déterminer un équivalent, quand $n \to \infty$, de $\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^s}$ si $s > 1$, et de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}$ si $s < 1$.