Colle du 5 février 2010

- Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment :
- Application en escalier sur un segment, intégrale d'une application en escalier sur un segment.
- Fonction continue par morceaux sur un segment, intégrale d'une fonction continue par morceaux.
- Propriétés : linéarité, positivité, Chasles, *etc.*, Cauchy-Schwarz, inégalité de la moyenne.
- Convergence des sommes de Riemann
- Primitives et intégrale. Intégration par parties. Formule de Taylor avec reste intégral.
- Changement de variables. Tableau des primitives usuelles.
- Primitives de fractions rationnelles,
- Primitives de fractions rationnelles en sinus et cosinus ,
- Primitives de fractions rationnelles en exp, $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$

Exercice

Exercice Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes réels $(B_n)_{n\geq 0}$ telle que $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_n = 0$ pour $n \geq 0$.

Exercice On suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ est un nombre rationnel. Montrer que $\int_0^\pi f_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t$ est entier, et conclure.

Exercice Calculer $\int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}\mathrm{d}x$. Limite quand $n \to \infty$?

Exercice Soit $(a(n))_{n\geq 1}$ une suite, $A(x) = \sum_{1\leq n\leq x} a(n)$, et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\sum_{1\leq n\leq x} a(n)\varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_{1^x} A(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

Dans cet exercice, on note (p_i) la suite des nombres premiers. Soit $P_N = \prod_{i=1}^N p_i$. Montrer par récurrence que $P_N \leq 4^N$ (on utilisera le fait que si $n+1$ n'est pas premier, alors $2m+1 = n+1$ et tout nombre premier p compris entre $m+2$ et $2m+2$ divise $\binom{2m+1}{m}$, puis que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$. Alors, $P_{m+1} \leq 4^{m+1}$ implique $P_{n+1} \leq 4^{n+1}$).

En déduire que $\theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln(p)$, puis que $\pi(x) \leq 4\left(\frac{x}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)^2}\right)$, où $\pi(x)$ est le cardinal de l'ensemble des nombres premiers entre 1 et x. Enfin, montrer que pour x assez grand, $\pi(x) \leq 4\ln(2)\frac{x}{\ln(x)}$.

Exercice On note d_n le plus petit commun multiple de tous les nombres entre 2 et n. Soit $I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n\mathrm{d}x$. Montrer que $d_{2n+1}I_n$ est un entier, et en déduire une minoration de d_{2n+1} (on utilisera $I_n \leq 1/4^n$). Si l'exercice précédent a été fait, en déduire que $\pi(x) \geq \frac{\ln(2)}{2}\frac{x}{\ln(x)}$ pour x assez grand.

Exercice Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors $\exp\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \exp \circ f$.

Exercice sin/t non intégrable

Exercice fonction gamma

Exercice f' intégrable somme convergente

Exercice somme de riemann continue

Exercice 1/x-1/E(x)