Colle du 29 janvier 2010

- Algèbre linéaire : Reprise du programme précédent
- III. Espaces vectoriels de dimensions finies :
- Généralités : définition - théorème de la base incomplète - théorème de la dimension - caractérisation des bases en dimension finie
- Sous-espace vectoriel en dimension finie : dimension d'un s.e.v. - rang d'une famille finie - existence de supplémentaires - relation de Grassmann
- Application linéaire en dimension finie : rang d'une application linéaire - image d'une famille génératrice - caractérisation dans une base - isomorphisme entre $\mathrm{im}(f)$ et tout supplémentaire de $\ker(f)$ - théorème du rang et conséquences.
- Définitions uniquement d'une valeur propre et d'un vecteur propre.
- IV. Dualité en dimension finie : Forme linéaire, hyperplan, base duale

Exercice Si f est un endomorphisme de E, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note $P(f)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0} a_k f^k$, où par convention $f^0 = id$. Vérifier que l'ensemble des polynômes d'endomorphisme (pour $\circ$) est bien une algèbre sur $\mathbb{C}$, isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.

Montrer que $\ker(P_1 P_2(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f))$ si P_1 et P_2 sont premiers entre eux, et en déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ selon les valeurs du discriminant de $X^2 + aX + b$.

Exercice (dépend de l'exercice précédent) Retrouver l'expression d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$.

Exercice Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Montrer que $p = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{f\in G} f$ est un projecteur. Soit q un projecteur, montrer que $p = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{f\in G} fpf^{-1}$ est aussi un projecteur. Quel est son noyau ? Son image ?

Exercice Soit G un groupe pour la composition, inclus dans $L(E)$. Montrer que tous les éléments ont même noyau et même image, à isomorphisme d'espaces vectoriels près.

Exercice Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application linéaire, $\vec{a} \in H = \ker(f)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(\vec{x}) = \vec{x} + f(\vec{x})\vec{a}$. Vérifier que c'est bien linéaire. Montrer que $D = \mathrm{Im}(u - id) \subseteq H$. On dit que u est une transvection de droite D et d'hyperplan H. Notons $\tau(f, a)$ une telle transvection, dorénavant. Montrer que $\tau(f, a) \in GL(E)$, et que si g est dans $GL(E)$, alors $g\tau(f, a)g^{-1} = \tau(f \circ g^{-1}, g(a))$. En déduire que le centre Z de $GL(E)$ est formé des applications linéaires $\vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exercice Montrer que si $u \in GL(E)$ laisse invariantes toutes les droites vectorielles de E, alors u est une homothétie.

Exercice Soit f une application linéaire de E, λ et μ deux complexes et $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs de E tels que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ et $f(\vec{y}) = \mu\vec{y}$. Montrer que $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre. En déduire que $(x \mapsto e^{ax}, x \mapsto e^{bx})$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $a \neq b$, et même question pour $(\cos, \sin)$.

Exercice Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $(\mathrm{im}(f^n))_{n\geq 0}$ et $(\ker(f^n))_{n\geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion. En déduire que si on a $\mathrm{im}(f^n) = \mathrm{im}(f^{n+1})$ pour un certain n, alors la suite stationne à partir de ce rang. De même pour $\ker(f^n)$.

Exercice Soit f un endomorphisme nilpotent, n le plus petit entier tel que $f^n = 0$. Montrer que la famille $(1, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre.

Exercice Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes réels $(B_n)_{n\geq 0}$ telle que $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_n = 0$ pour $n \geq 0$

Exercice Montrer qu'il existe une unique application polynômiale P vérifiant $P(0) = 0$ et $P(t+1) - P(t) = Ct^{n-1}$.

Exercice Existe-t-il une application linéaire h vérifiant $h^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales ? Des fonctions trigonométriques ? Des fonctions exponentielles ? Les calculer si possible.

Exercice Justifier que si $K \subseteq L$ est une suite de corps, alors L est un K-espace vectoriel. Si $K \subseteq L \subseteq M$ est une suite d'extensions de corps, montrer que $\dim_K M = \dim_L M \cdot \dim_K L$. si $K \subseteq L$, on dit que $x \in L$ est algébrique sur K s'il est annulé par un polynôme de $K[X]$, et qu'il est transcendant sinon. Montrer que x est algébrique sur K si, et seulement si $K[x] = K(x)$, si, et seulement si $\dim_K K[x] < +\infty$. En déduire que l'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps. Montrer l'existence de nombres transcendants (Bonus).

Exercice Montrer que $\phi \ : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ \quad P & \mapsto \quad (P(0), P(1), \dots, P(n) \end{cases}$ est un isomorphisme. Quelle est son application réciproque ?