

Colle du 8 janvier 2010

- Développement limité en un point : définition - $DL_0(x_0)$ - DL_n de $1/(1-x)$
- unicité du $DL_n(x_0)$ - tronquage - utilisation de la parité
- Dérivée d'une fonction : dérivabilité en un point - théorème - dérivabilité à gauche et à droite
- Calcul des dérivées : linéarité - produit - quotient - composée - réciproque
- Fonctions de classe \mathcal{C}^p : définition - formule de Leibniz - composition des fonctions de classe \mathcal{C}^p
- Formule des accroissements finis : théorème de Rolle - théorème des accroissements finis - inégalité des accroissements finis - croissance de la fonction et signe de la dérivée - prolongement de la dérivée
- Développements limités : Révision du programme précédent
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor-Young : énoncé et conséquence - développements usuels en 0 de \cos , \sin , sh , ch , $\ln(1+x)$, \exp , $(1+x)^a$
- Opérations sur les développements limités : addition, multiplication, quotient (la division suivant les puissances croissantes n'est pas au programme), composition
- Utilisation des développements limités dans l'étude locale des fonctions : à distance finie - au voisinage de l'infini - rappels sur l'étude des branches infinies d'une fonction

Exercice Montrer que la fonction définie par $f(x) = \exp(\frac{-1}{x^2})$ si $x > 0$ et 0 sinon est de classe \mathcal{C}^∞ .

Exercice Montrer que $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Trouver une expression similaire pour \cos et \sin .

Exercice Écrire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction W de Weierstrass en 0, définie comme étant la réciproque de $x \mapsto x \exp(x)$ sur $] -1, \infty[$.

Exercice On suppose que $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$ s'annule en n points distincts $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Montrer que $|f(x)| < \frac{\sup_{[a,b]} |f^{(n)}|}{n!} \prod_{k=1}^n |x - a_k|$.

Exercice Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $u_0 = 1$. Montrer que cette suite converge vers 0, et $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. Est-ce que \sin est une application contractante ?

Exercice Montrer que si P est un polynôme réel scindé sur \mathbb{R} , alors P' est également scindé.

Exercice On suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ est un nombre rationnel. Montrer que $\int_0^\pi f_n(t) \sin(t) dt$ est entier, et conclure (plutôt de l'intégration, ça).