Calcul exact de cosinus en des angles commensurables avec π

On montre comment obtenir de nouvelles valeurs remarquables du cosinus (on passerait alors au sinus et à la tangente grâce aux formules $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et $\tan = \frac{\sin}{\cos}$). La formule d'Euler est la clé, parce que les exponentielles complexes (d'arguments commensurables avec π) vérifient des équations extrêmement simples, dont on déduit des équations polynomiales qu'on sait résoudre, vérifiées par des cosinus d'angles commensurables avec π. Nous nous sommes limités à des équations polynomiales d'ordre 2, ce qui limite la variété des exercices, mais la méthode permettrait par duplication d'avoir d'autres valeurs remarquables.

Exercice 1. → page 16

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$.

Exercice 2. → page 16

1. Montrer que $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)$.

Exercice 3. → page 16

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

Exercice 4. → page 17

1. Montrer que $z = e^{\frac{4}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$.

Exercice 5. → page 17

1. Montrer que $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$.

Exercice 6. → page 18

1. Montrer que $z = e^{\frac{4}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$.

Exercice 7. → page 18

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

Exercice 8. → page 19

1. Montrer que $z = e^{\frac{7}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$.

Exercice 9. → page 19

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$.

Exercice 10. → page 20

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$.

Exercice 11. → page 20

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$.

Exercice 12. → page 21

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$.

Exercice 13. → page 21

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 14. → page 22

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 15. → page 22

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 16. → page 23

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 17. → page 23

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 18. → page 24

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 19. → page 24

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 20. → page 25

1. Montrer que $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 21. → page 25

1. Montrer que $\cos\left(\frac{5}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{5}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 22. → page 26

1. Montrer que $z = e^{\frac{1}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 23. → page 26

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 24. → page 27

1. Montrer que $z = e^{\frac{2}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 25. → page 27

1. Montrer que $z = e^{\frac{2}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 26. → page 27

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 27. → page 28

1. Montrer que $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 28. → page 28

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 29. → page 29

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 30. → page 29

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 31. → page 30

1. Montrer que $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 32. → page 30

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 33. → page 31

1. Montrer que $\cos\left(\frac{5}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{5}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 34. → page 31

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$.

Exercice 35. → page 32

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$.

Exercice 36. → page 32

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$.

Exercice 37. → page 33

1. Montrer que $z = e^{\frac{4}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$.

Exercice 38. → page 33

1. Montrer que $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)$.

Exercice 39. → page 34

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$.

Exercice 40. → page 34

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

Exercice 41. → page 35

1. Montrer que $z = e^{\frac{1}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$.

Exercice 42. → page 35

1. Montrer que $z = e^{\frac{2}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$.

Exercice 43. → page 36

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$.

Exercice 44. → page 36

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$.

Exercice 45. → page 37

1. Montrer que $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$.

Exercice 46. → page 37

1. Montrer que $z = e^{\frac{2}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$.

Exercice 47. → page 38

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 48. → page 38

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 49. → page 39

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 50. → page 39

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 51. → page 40

1. Montrer que $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 52. → page 40

1. Montrer que $\cos\left(\dfrac{11}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{11}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 53. → page 41

1. Montrer que $z = e^{\frac{4}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 54. → page 41

1. Montrer que $\cos\left(\dfrac{15}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{15}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 55. → page 41

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 56. → page 42

1. Montrer que $\cos\left(\dfrac{13}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{13}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 57. → page 42

1. Montrer que $z = e^{\frac{2}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 58. → page 43

1. Montrer que $\cos\left(\dfrac{1}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{1}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 59. → page 43

1. Montrer que $z = e^{\frac{4}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 60. → page 44

1. Montrer que $\cos\left(\dfrac{13}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\dfrac{13}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 61. → page 44

1. Montrer que $z = e^{\frac{7}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 62. → page 45

1. Montrer que $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 63. → page 45

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 64. → page 45

1. Montrer que $z = e^{\frac{3}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 65. → page 46

1. Montrer que $\cos\left(\frac{7}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 66. → page 46

1. Montrer que $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 67. → page 47

1. Montrer que $z = e^{\frac{1}{5}\,\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right)$.

Exercice 68. → page 47

1. Montrer que $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)$.

Exercice 69. → page 48

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

Exercice 70. → page 48

1. Montrer que $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)$.

Exercice 71. → page 48

1. Montrer que $z = e^{\frac{1}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$.

Exercice 72. → page 49

1. Montrer que $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$.

Exercice 73. → page 49

1. Montrer que $z = e^{\frac{2}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$.

Exercice 74. → page 50

1. Montrer que $z = e^{\frac{7}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$.

Exercice 75. → page 50

1. Montrer que $z = e^{\frac{1}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$.

Exercice 76. → page 51

1. Montrer que $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$.

Exercice 77. → page 51

1. Montrer que $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$.

Exercice 78. → page 52

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$.

Exercice 79. → page 52

1. Montrer que $z = e^{\frac{2}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$.

Exercice 80. → page 53

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

Exercice 81. → page 53

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$.

Exercice 82. → page 54

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$.

Exercice 83. → page 54

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1=0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

Exercice 84. → page 55

1. Montrer que $z = e^{\frac{4}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1=0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$.

Exercice 85. → page 55

1. Montrer que $z = e^{\frac{9}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1=0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$.

Exercice 86. → page 56

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2+x-1=0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

Exercice 87. → page 56

1. Montrer que $z = e^{\frac{7}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2-x-1=0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$.

Exercice 88. → page 57

1. Montrer que $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$.

Exercice 89. → page 57

1. Montrer que $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$.

Exercice 90. → page 57

1. Montrer que $z = e^{\frac{7}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$.

Exercice 91. → page 58

1. Montrer que $z = e^{\frac{4}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$.

Exercice 92. → page 58

1. Montrer que $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$.

Exercice 93. → page 59

1. Montrer que $z = e^{\frac{2}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$.

Exercice 94. → page 59

1. Montrer que $z = e^{\frac{8}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

Exercice 95. → page 60

1. Montrer que $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$.

Exercice 96. → page 60

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$.

Exercice 97. → page 61

1. Montrer que $z = e^{\frac{7}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$.

Exercice 98. → page 61

1. Montrer que $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$.

Exercice 99. → page 61

1. Montrer que $\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right)$.

Exercice 100. → page 62

1. Montrer que $z = e^{\frac{6}{5}\pi}$ vérifie : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est solution de l'équation polynomiale du second degré : $x^2 + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simple et exacte de $\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$.

Corrigé 1. ← page 1

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{9i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{9}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 2. ← page 1

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{5}{8}\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.
2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{5}{8}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) < 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 3. ← page 1

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5}i\pi}\right)^5 = e^{8i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{8}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 4. ← page 1

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{4}{5}i\pi}\right)^5 = e^{4i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = e^{\frac{4}{5}i\pi} + e^{-\frac{4}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{4}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 5. ← page 1

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$, avec : $\theta = \frac{1}{8}\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + 1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{1}{8}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 6. ← page 1

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{4}{5}i\pi}\right)^5 = e^{4i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = e^{\frac{4}{5}i\pi} + e^{-\frac{4}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{4}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 7. ← page 2

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5}i\pi}\right)^5 = e^{8i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{8}{5}\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{8}{5}\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 8. ← page 2

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{7}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{7i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{7}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\pi\right) = e^{\frac{7}{5}i\pi} + e^{-\frac{7}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{7}{5}\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 9. ← page 2

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{3i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{3}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{3}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 10. ← page 2

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{3i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{3}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 11. ← page 2

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{9i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 12. ← page 2

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{6}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 13. ← page 2

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{6}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 14. ← page 3

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{9i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 15. ← page 3

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{3i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{3}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 16. ← page 3

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\,\pi}\right)^5 = -e^{3i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\,\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{3}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{3}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 17. ← page 3

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\,\pi}\right)^5 = -e^{9i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\,\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{5}\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 18. ← page 3

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{6}{5}\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 19. ← page 3

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{6}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\,\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\,\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 20. ← page 3

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{1}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\dfrac{1}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{1}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{1}{8}\,\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{1}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 21. ← page 4

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{5}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{5}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{5}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\dfrac{5}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{5}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{5}{8}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{5}{8}\,\pi\right) < 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{5}{8}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 22. ← page 4

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{1}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) = e^{\frac{1}{5}i\pi} + e^{-\frac{1}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{1}{5}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 23. ← page 4

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{6}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 24. ← page 4

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{2}{5} i\pi}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = e^{\frac{2}{5}i\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{2}{5}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 25. ← page 4

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{2}{5} i\pi}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = e^{\frac{2}{5}i\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{2}{5}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 26. ← page 4

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{9i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{9}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 27. ← page 4

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{3}{8}\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{8}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) > 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 28. ← page 5

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5}i\pi}\right)^5 = e^{8i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{8}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 29. ← page 5

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{9i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{9}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 30. ← page 5

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{3i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\,\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 31. ← page 5

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{13}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{13}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{13}{8}\,\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\,\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 32. ← page 5

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{8i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{8}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 33. ← page 5

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{5}{8}\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{5}{8}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) < 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 34. ← page 5

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente,

$2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{6}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 35. ← page 6

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\,\pi}\right)^5 = -e^{9i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{9}{5}\,\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 36. ← page 6

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{6i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{6}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 37. ← page 6

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{4}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{4i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{4}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{4}{5}i\,\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{4}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 38. ← page 6

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{3}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{3}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\dfrac{3}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de

considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{8}\,\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 39. ← page 6

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\,\pi}\right)^5 = -e^{3i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 40. ← page 6

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{8i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{8}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{8}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{8}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{8}{5}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{8}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 41. ← page 7

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{1}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{1}{5}i\pi} + e^{-\frac{1}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{1}{5}\,\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 42. ← page 7

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{2}{5}i\pi}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{2}{5}i\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{2}{5}\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 43. ← page 7

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{9i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{5}\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 44. ← page 7

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{9i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2}\,\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\,\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 45. ← page 7

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{1}{8}\,\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\dfrac{1}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{1}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{1}{8}\,\pi \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{1}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 46. ← page 7

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{2}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{2i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{2}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\,\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux

racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{2}{5}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 47. ← page 7

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{6}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 48. ← page 8

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1 - (-z)^5}{1 - (-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{3i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente,

$2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 49. ← page 8

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\,\pi}\right)^5 = -e^{3i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 50. ← page 8

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5}i\,\pi}\right)^5 = -e^{9i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{9}{5}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2}\,\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\,\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 51. ← page 8

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{9}{8}\,\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{9}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{9}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{8}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right) < 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{9}{8}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 52. ← page 8

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{11}{8}\,\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{11}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{11}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\dfrac{11}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{11}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{11}{8}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{11}{8}\,\pi\right) < 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{11}{8}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 53. ← page 8

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{4}{5} i\pi}\right)^5 = e^{4i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = e^{\frac{4}{5}i\pi} + e^{-\frac{4}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{4}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 54. ← page 8

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$, avec : $\theta = \frac{15}{8}\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{15}{4}\pi\right) + 1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + 2} > 0$ et : $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + 2} < 0$ (bien noter que $\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{15}{8}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right) > 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + 2}.$$

Corrigé 55. ← page 9

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1 - (-z)^5}{1 - (-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5} i\pi}\right)^5 = -e^{3i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 56. ← page 9

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{13}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{13}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{13}{8}\,\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 57. ← page 9

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{2}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{2i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{2}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{2}{5}\,\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 58. ← page 9

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{1}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{1}{8}\,\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 59. ← page 9

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{4}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{4i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{4}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{4}{5}i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle

des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{4}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\,\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 60. ← page 9

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{13}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{13}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\dfrac{13}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{13}{8}\,\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\,\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 61. ← page 9

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{7}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{7i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{7}{5}i\pi} + e^{-\frac{7}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{7}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\,\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 62. ← page 10

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{13}{8}\,\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{13}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\,\sqrt{2}+\frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\dfrac{13}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.
2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{13}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{13}{8}\,\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{13}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{13}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\,\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 63. ← page 10

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4+z^3+z^2+z+1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{6i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\,\pi}+e^{-\frac{6}{5}i\,\pi} = z+\dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2+x-1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1 = z^2+z+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+1 = \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{6}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{6}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\,\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{6}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\,\sqrt{5}-\frac{1}{4}.$$

Corrigé 64. ← page 10

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4-z^3+z^2-z+1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{3}{5}i\,\pi}\right)^5 = -e^{3i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4-z^3+z^2-z+1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) = e^{\frac{3}{5}i\pi} + e^{-\frac{3}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 65. ← page 10

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{7}{8}\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{7}{8}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) < 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 66. ← page 10

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{1}{8}\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de

considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{1}{8}\,\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{1}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 67. ← page 10

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{1}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{1}{5}i\pi} + e^{-\frac{1}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{1}{5}\,\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 68. ← page 10

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{3}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{3}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{8}\,\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 69. ← page 11

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5} i\pi}\right)^5 = e^{8i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{8}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 70. ← page 11

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$, avec : $\theta = \frac{3}{8}\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + 1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{3}{8}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) > 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-\sqrt{2} + 2}.$$

Corrigé 71. ← page 11

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1 - (-z)^5}{1 - (-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{1}{5} i\pi}\right)^5 = -e^{i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) = e^{\frac{1}{5}i\pi} + e^{-\frac{1}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{1}{5}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 72. ← page 11

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{1}{8}\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{1}{8}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 73. ← page 11

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{2}{5}i\pi}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = e^{\frac{2}{5}i\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{2}{5}\,\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{2}{5}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 74. ← page 11

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{7}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{7i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{7}{5}i\pi} + e^{-\frac{7}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{7}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 75. ← page 11

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{1}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{1}{5}i\pi} + e^{-\frac{1}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{1}{5}\,\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{1}{5}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2}\,\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\,\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 76. ← page 12

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{7}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{7}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{7}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\dfrac{7}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{7}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{7}{8}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{7}{8}\,\pi\right) < 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{7}{8}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 77. ← page 12

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{9}{8}\,\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{9}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{9}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\dfrac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\dfrac{1}{4}\,\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{8}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right) < 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{9}{8}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 78. ← page 12

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4+z^3+z^2+z+1=\frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5=\left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5=e^{6i\pi}=1$, et donc : $z^4+z^3+z^2+z+1=0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x=2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)=e^{\frac{6}{5}i\pi}+e^{-\frac{6}{5}i\pi}=z+\frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2+x-1=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=z^2+z+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+1=\frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}=0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ et : $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{6}{5}\pi\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)<0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}.$$

Corrigé 79. ← page 12

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4+z^3+z^2+z+1=\frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5=\left(e^{\frac{2}{5}i\pi}\right)^5=e^{2i\pi}=1$, et donc : $z^4+z^3+z^2+z+1=0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x=2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)=e^{\frac{2}{5}i\pi}+e^{-\frac{2}{5}i\pi}=z+\frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2+x-1=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=z^2+z+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+1=\frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}=0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ et : $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{2}{5}\pi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)>0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)=\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}.$$

Corrigé 80. ← page 12

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5} i\pi}\right)^5 = e^{8i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{8}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 81. ← page 12

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1 - (-z)^5}{1 - (-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5} i\pi}\right)^5 = -e^{9i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = e^{\frac{9}{5}i\pi} + e^{-\frac{9}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{9}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 82. ← page 12

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5} i \pi}\right)^5 = e^{6 i \pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = e^{\frac{6}{5} i \pi} + e^{-\frac{6}{5} i \pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{6}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 83. ← page 13

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5} i \pi}\right)^5 = e^{8 i \pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = e^{\frac{8}{5} i \pi} + e^{-\frac{8}{5} i \pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{8}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 84. ← page 13

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{4}{5} i\,\pi}\right)^5 = e^{4i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{4}{5} i\,\pi} + e^{-\frac{4}{5} i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{4}{5}\,\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 85. ← page 13

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1 - (-z)^5}{1 - (-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{9}{5} i\,\pi}\right)^5 = -e^{9i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{9}{5} i\,\pi} + e^{-\frac{9}{5} i\,\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{9}{5}\,\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{9}{5}\,\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 86. ← page 13

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5} i\pi}\right)^5 = e^{8i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{8}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 87. ← page 13

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1 - (-z)^5}{1 - (-z)}.$$

Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{7}{5} i\pi}\right)^5 = -e^{7i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = e^{\frac{7}{5}i\pi} + e^{-\frac{7}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 - x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{7}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 88. ← page 13

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{9}{8}\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\dfrac{9}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.
2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\dfrac{1}{4}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{9}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{8}\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{9}{8}\pi\right) < 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 89. ← page 13

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{9}{8}\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\dfrac{9}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.
2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\dfrac{1}{4}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\dfrac{9}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{9}{8}\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\dfrac{9}{8}\pi\right) < 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 90. ← page 14

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{7}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{7i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{7}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\pi\right) = e^{\frac{7}{5}i\pi} + e^{-\frac{7}{5}i\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{7}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{7}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{7}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 91. ← page 14

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
Or : $z^5 = \left(e^{\frac{4}{5}i\,\pi}\right)^5 = e^{4i\,\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right) = e^{\frac{4}{5}i\,\pi} + e^{-\frac{4}{5}i\,\pi} = z + \dfrac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\dfrac{4}{5}\,\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\dfrac{4}{5}\,\pi\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 92. ← page 14

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \dfrac{9}{8}\,\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{9}{8}\,\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{9}{4}\,\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\dfrac{9}{8}\,\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.
2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de

considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{9}{8}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right) < 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 93. ← page 14

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{2}{5}i\pi}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = e^{\frac{2}{5}i\pi} + e^{-\frac{2}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{2}{5}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 94. ← page 14

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{8}{5}i\pi}\right)^5 = e^{8i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = e^{\frac{8}{5}i\pi} + e^{-\frac{8}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question

précédente, $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{8}{5}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) > 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 95. ← page 14

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{7}{8}\pi$. Cela donne ici :

$$\left(\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

donc $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{7}{8}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) < 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 96. ← page 14

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{6}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 97. ← page 15

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $-z \neq 1$. On a donc :
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)}.$$
Or : $(-z)^5 = -\left(e^{\frac{7}{5}i\pi}\right)^5 = -e^{7i\pi} = 1$, et donc : $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, d'où le résultat.
2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = e^{\frac{7}{5}i\pi} + e^{-\frac{7}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :
$$x^2 - x - 1 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - z - \frac{1}{z} - 1 = z^2 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}{z^2} = 0,$$
d'où le résultat.
3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{7}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, puis :
$$\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Corrigé 98. ← page 15

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{9}{8}\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.
2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} > 0$ et : $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} < 0$ (bien noter que $\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{9}{8}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right) < 0$. On en déduit :
$$\cos\left(\frac{9}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}.$$

Corrigé 99. ← page 15

1. On utilise l'identité : $(\cos(\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$, avec : $\theta = \frac{13}{8}\pi$. Cela donne ici :
$$\left(\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right)\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{13}{4}\pi\right)+1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$
donc $\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right)$ est bien solution de : $x^2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} > 0$ et : $x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} < 0$ (bien noter que $-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ est effectivement positif, ce qui permet de considérer sa racine carrée). D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{13}{8}\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, donc : $\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right) > 0$. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-\sqrt{2} + 2}.$$

Corrigé 100. ← page 15

1. On reconnaît dans le membre de gauche une somme géométrique, de raison $z \neq 1$. On a donc :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

Or : $z^5 = \left(e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)^5 = e^{6i\pi} = 1$, et donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'où le résultat.

2. Posons : $x = 2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$. On utilise le fait que : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = e^{\frac{6}{5}i\pi} + e^{-\frac{6}{5}i\pi} = z + \frac{1}{z}$ (formule d'Euler). Alors :

$$x^2 + x - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0,$$

d'où le résultat.

3. On résout l'équation de la question précédente. Ses solutions sont : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et : $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (on a calculé le discriminant, etc., vous savez faire). D'après la question précédente, $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)$ est aussi une solution, donc est égal à x_1 ou x_2. On détermine à laquelle des deux racines il est égal grâce à son signe : on a $\frac{6}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) < 0$. On en déduit : $2\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, puis :

$$\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$