Calcul de sommes grâce aux sommes télescopiques et géométriques

Ces exercices permettent de vérifier que vous avez bien compris comment calculer une somme grâce aux sommes télescopiques (ou, s'il n'en apparaît pas clairement, *via* un changement d'indice). Il vous impose de réviser l'importante méthode de décomposition en éléments simples. Vous aurez aussi à réviser comment on calcule certaines sommes trigonométriques à l'aide du passage à l'exponentielle complexe (de sorte à reconnaître une somme géométrique en général).

Exercice 1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \sin\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 7

Exercice 2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\frac{3}{4}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 7

Exercice 3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \cos\left(-\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 8

Exercice 4. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-n}$, et calculer sa somme. → page 8

Exercice 5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \cos\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 9

Exercice 6. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+3)(n+1)n}$, et calculer sa somme. → page 9

Exercice 7. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 10

Exercice 8. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 11

Exercice 9. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^2-3\,n}$, et calculer sa somme. → page 11

Exercice 10. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n+5)(n+1)n}$, et calculer sa somme. → page 12

Exercice 11. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 13

Exercice 12. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)}$, et calculer sa somme. → page 13

Exercice 13. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\frac{5}{3}\pi - \frac{3}{4}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 14

Exercice 14. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+4)(n+2)(n+1)}$, et calculer sa somme. → page 15

Exercice 15. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 15

Exercice 16. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n+1)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 16

Exercice 17. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 17

Exercice 18. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{(n+1)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 17

Exercice 19. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^2-4}$, et calculer sa somme. → page 18

Exercice 20. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{(n+4)(n+1)(n-1)}$, et calculer sa somme. → page 19

Exercice 21. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{(n+3)(n+1)(n-2)}$, et calculer sa somme. → page 19

Exercice 22. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 20

Exercice 23. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+1)(n-2)n}$, et calculer sa somme. → page 21

Exercice 24. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2+3\,n}$, et calculer sa somme. → page 21

Exercice 25. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-2)}$, et calculer sa somme. → page 22

Exercice 26. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+1)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 23

Exercice 27. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^2-3\,n+2}$, et calculer sa somme. → page 23

Exercice 28. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{6}\right)^n \cos\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 24

Exercice 29. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{5}\right)^n \cos\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 24

Exercice 30. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 25

Exercice 31. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{3}{5}\right)^n \sin\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 25

Exercice 32. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 26

Exercice 33. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 27

Exercice 34. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^2+n-2}$, et calculer sa somme. → page 27

Exercice 35. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{n^2-4\,n}$, et calculer sa somme. → page 28

Exercice 36. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 28

Exercice 37. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{5}{6}\right)^n\sin\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 29

Exercice 38. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 30

Exercice 39. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{n^2-n-2}$, et calculer sa somme. → page 30

Exercice 40. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 31

Exercice 41. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 31

Exercice 42. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 32

Exercice 43. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 33

Exercice 44. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 34

Exercice 45. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)}$, et calculer sa somme. → page 34

Exercice 46. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{(n+4)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 35

Exercice 47. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{2}{5}\right)^n\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{3}{4}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 36

Exercice 48. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n^2+4\,n}$, et calculer sa somme. → page 36

Exercice 49. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sin\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 37

Exercice 50. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(-\frac{4}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 37

Exercice 51. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+4)(n+1)n}$, et calculer sa somme. → page 38

Exercice 52. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{2}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 39

Exercice 53. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 6}\frac{1}{(n-1)(n-3)n}$, et calculer sa somme. → page 40

Exercice 54. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 40

Exercice 55. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 41

Exercice 56. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}$, et calculer sa somme. → page 41

Exercice 57. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 42

Exercice 58. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+2\,n}$, et calculer sa somme. → page 43

Exercice 59. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+3)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 43

Exercice 60. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-2)}$, et calculer sa somme. → page 44

Exercice 61. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+3\,n+2}$, et calculer sa somme. → page 45

Exercice 62. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\frac{5}{6}\pi-\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 45

Exercice 63. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n+2)(n+1)n}$, et calculer sa somme. → page 46

Exercice 64. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 46

Exercice 65. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+2\,n-3}$, et calculer sa somme. → page 47

Exercice 66. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 48

Exercice 67. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+2)(n+1)n}$, et calculer sa somme. → page 48

Exercice 68. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos\left(-\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 49

Exercice 69. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(-\frac{1}{2}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 50

Exercice 70. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 50

Exercice 71. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 5} \frac{1}{n^2 - 2n - 3}$, et calculer sa somme. → page 51

Exercice 72. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 51

Exercice 73. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)}$, et calculer sa somme. → page 52

Exercice 74. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+2)(n-2)n}$, et calculer sa somme. → page 53

Exercice 75. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \sin\left(\frac{5}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 54

Exercice 76. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 54

Exercice 77. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{4}{5}\right)^n \cos\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 55

Exercice 78. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 5} \frac{1}{n^2 - 3n}$, et calculer sa somme. → page 55

Exercice 79. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+2)(n+1)n}$, et calculer sa somme. → page 56

Exercice 80. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{5}{6}\right)^n \sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 57

Exercice 81. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 58

Exercice 82. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+5)(n+1)n}$, et calculer sa somme. → page 58

Exercice 83. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2 + 3n}$, et calculer sa somme. → page 59

Exercice 84. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)}$, et calculer sa somme. → page 60

Exercice 85. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^2-n-2}$, et calculer sa somme. → page 60

Exercice 86. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{5}{6}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 61

Exercice 87. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{3}{5}\right)^n \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{5}{6}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 61

Exercice 88. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 62

Exercice 89. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{4}{5}\right)^n \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 63

Exercice 90. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{3}{5}\right)^n \cos\left(-\frac{3}{4}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 63

Exercice 91. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(-\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 64

Exercice 92. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{5}{6}\right)^n \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 65

Exercice 93. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{3}{5}\right)^n \cos\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 65

Exercice 94. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{4}{5}\right)^n \cos\left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 66

Exercice 95. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+n}$, et calculer sa somme. → page 66

Exercice 96. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{(n+1)(n-2)n}$, et calculer sa somme. → page 67

Exercice 97. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 67

Exercice 98. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{5}\right)^n \sin\left(-\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 68

Exercice 99. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi n\right)$ converge, et calculer sa somme. → page 69

Exercice 100. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{(n+4)(n-1)n}$, et calculer sa somme. → page 69

Corrigé 1. Comme $\sin\left(-\frac{5}{6}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\dfrac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right| = \dfrac{1}{6} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}}{1-\left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{6}e^{\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi n\right)} = \frac{\frac{1}{12}\sqrt{3}+\frac{1}{12}i-\frac{1}{36}}{\left|1-\left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{12}\sqrt{3}-\frac{1}{36}}{-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{37}{36}} + i\frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{37}{36}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n \sin\left(-\dfrac{5}{6}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \sin\left(-\frac{5}{6}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{37}{36}} = \frac{3\left(25290\sqrt{3}-62641\right)}{1311576\sqrt{3}-2772937}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = -\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\,i\,\pi}\right)+\frac{1}{36} = \frac{37}{36}+\frac{1}{3}\cos\left(-\frac{5}{6}\,\pi\right) = -\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{37}{36}$.

← page 1

Corrigé 2. Comme $\cos\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi}}{1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi}\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}\,i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi} = -\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{\left|1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\,i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}} + i\frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\dfrac{3}{4}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}} = -\frac{577\sqrt{2}-822}{1889\sqrt{2}-2640}.$$

← page 1

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}+\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}$.

Corrigé 3. Comme $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)}=e^{-\frac{4}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{1}{6}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{1}{6}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right|=\frac{2}{3}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)}=e^{-\frac{4}{3}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)^n=e^{-\frac{4}{3}i\pi}\times\frac{-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}}{1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)}=\frac{e^{-\frac{4}{3}i\pi}\cdot\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{6}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{4}{3}i\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{1}{6}i\pi}=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)}=\frac{-\left(\frac{2}{9}i-\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}-\frac{1}{3}i+\frac{2}{9}}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}}+i\frac{-\frac{2}{9}\sqrt{3}-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}}=\frac{51\sqrt{3}+80}{156\sqrt{3}+277}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\pi}\right)+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}+\frac{4}{3}\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}$.

Corrigé 4. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2-X=X\cdot(X-1)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

← page 1

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0{,}1\},\quad \frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{(x-1)x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}.$$

Multiplier cette égalité par x, et prendre $x\to 0$, montre qu'on a : $a=-1$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=1$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 2$:

$$\forall n\geqslant 2,\quad \frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ est télescopique, et converge d'après le lien suite-série car $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{n}=1.$$

Corrigé 5. Comme $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)=\operatorname{Re}\left(e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{-\frac{5}{6}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right|=\frac{2}{3}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 1

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)}=\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)}=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{5}{6}i\pi}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)}=\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}i+1}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}+1}{-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}}+i\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)=\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi n\right)}\right)=\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}+1}{-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}}=\frac{9\left(\sqrt{3}-1\right)}{13\sqrt{3}-18}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\operatorname{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\operatorname{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)\right|^2=1-2\operatorname{Re}\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}+\frac{4}{3}\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}$.

Corrigé 6. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

← page 1

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,-3\},\quad \frac{1}{(x+3)(x+1)x}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+3}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x\to-1$, montre qu'on a : $a=-\frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{3}$, et : $c=\frac{1}{6}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$: $\forall n\geqslant 3$, $\frac{1}{(n+3)(n+1)n}=\frac{1}{6\,(n+3)}-\frac{1}{2\,(n+1)}+\frac{1}{3\,n}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général

dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+3)(n+1)n} &= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+3}\\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m}}_{[m=n+1]}+\frac{1}{6}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+3}\frac{1}{m}}_{[m=n+3]}\\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\sum_{n=6}^{N+3}\frac{1}{n} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{6}\left(\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}}_{=0}+\left(\frac{1}{3}\times\frac{47}{60}-\frac{1}{2}\times\frac{9}{20}\right)+\underset{N\to+\infty}{o}(1)=\frac{13}{360}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{13}{360}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+3)(n+1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)(n+1)n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+3)(n+1)n}=\frac{13}{360}.$$

Corrigé 7. Comme $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)=\operatorname{Im}\left(e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}=e^{\frac{3}{2}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right|=\frac{1}{3}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}=e^{\frac{3}{2}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)^n=e^{\frac{3}{2}i\pi}\times\frac{-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}}{1-\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)}=\frac{e^{\frac{3}{2}i\pi}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{3}{2}i\pi}=-i$, et : $e^{\frac{1}{3}i\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}=\frac{-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{5}{18}i}{\left|1-\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{-\frac{1}{6}\sqrt{3}}{\frac{13}{9}}+i\frac{\frac{5}{18}}{\frac{13}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)=\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{13}{9}}=\frac{5}{26}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\operatorname{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\operatorname{Re}(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right) + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{13}{9}$.

Corrigé 8. Comme $\cos\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right)} = e^{\frac{5}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-\frac{1}{2}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-\frac{1}{2}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right| = \frac{1}{4} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right)} = e^{\frac{5}{3}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)^n = e^{\frac{5}{3}i\pi} \times \frac{\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}}{1 - \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{5}{3}i\pi}\cdot\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\right)}{\left|1 - \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{5}{3}i\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, et : $e^{-\frac{1}{2}i\pi} = -i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right)} = \frac{\left(\frac{1}{32}i - \frac{1}{8}\right)\sqrt{3} - \frac{1}{8}i - \frac{1}{32}}{\left|1 - \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{32}}{\frac{17}{16}} + i\frac{\frac{1}{32}\sqrt{3} - \frac{1}{8}}{\frac{17}{16}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{4}\right)^n\cos\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\cos\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{32}}{\frac{17}{16}} = -\frac{2}{17}\sqrt{3} - \frac{1}{34}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1 - \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\operatorname{Re}(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right) + \frac{1}{16} = \frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{17}{16}$.

Corrigé 9. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2 - 3X = X\cdot(X-3)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3{,}0\}, \quad \frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{1}{(x-3)x} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x - 3$, et prendre $x \to 3$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -\frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 4$:

$$\forall n \geqslant 4, \quad \frac{1}{n^2 - 3n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right).$$

Sommons cette relation de $n = 4$ jusqu'à un entier $N \geqslant 4$, et faisons un changement d'indice de sommation afin

d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n^2-3\,n} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-3} - \sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-3} - \sum_{n=7}^{N+3}\frac{1}{m-3}\right) \quad \textcolor{blue}{(\ m-3=n \iff m=n+3\ )}\\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-3} - \sum_{n=7}^{N+3}\frac{1}{n-3}\right) \quad \textcolor{blue}{\text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}}\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancel{\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-3}} - \cancel{\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-3}} - \sum_{n=N+1}^{N+3}\frac{1}{n-3}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\times\frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^2-3\,n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{n^2-3\,n} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{3}\sum_{n=4}^{N}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right) = \frac{11}{18}.$$

Corrigé 10. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-5,-1,0\},\qquad \frac{1}{(x+5)(x+1)x} = \frac{a}{x+5}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+5$, et prendre $x\to -5$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{20}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-\frac{1}{4}$, et : $c=\frac{1}{5}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 2$: $\forall n\geqslant 2$, $\dfrac{1}{(n+5)(n+1)n} = \dfrac{1}{20\,(n+5)} - \dfrac{1}{4\,(n+1)} + \dfrac{1}{5\,n}$. Sommons cette relation de $n=2$ jusqu'à un entier $N\geqslant 2$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n+5)(n+1)n} &= \frac{1}{5}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{20}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+5}\\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{m=3}^{N+1}\frac{1}{m}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{20}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+5}\frac{1}{m}}_{[m=n+5]}\\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{20}\sum_{n=7}^{N+5}\frac{1}{n} \quad \textcolor{blue}{\text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}}\\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&\quad + \frac{1}{20}\left(\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+5}+\frac{1}{N+4}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)}_{=0}\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{5}\times\frac{29}{20}-\frac{1}{4}\times\frac{19}{20}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{21}{400} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{21}{400}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n+5)(n+1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+5)(n+1)n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n+5)(n+1)n} = \frac{21}{400}.$$

Corrigé 11. Comme $\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)}=e^{\frac{1}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{5}{3}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{5}{3}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\dfrac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right|=\dfrac{1}{2}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 1

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)}=e^{\frac{1}{3}i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)^n=e^{\frac{1}{3}i\pi}\times\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)}=\frac{e^{\frac{1}{3}i\pi}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{1}{3}i\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{5}{3}i\pi}=-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)}=\frac{\frac{1}{4}i\sqrt{3}+\frac{3}{4}}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}+i\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}=1.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}-\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{3}{4}$.

Corrigé 12. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

← page 1

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,3,1\},\quad \frac{1}{(x+1)(x-1)(x-3)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-1}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x\to -1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{8}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{8}$, et : $c=-\frac{1}{4}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 4$: $\forall n\geqslant 4$, $\dfrac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)}=\dfrac{1}{8\,(n+1)}-\dfrac{1}{4\,(n-1)}+\dfrac{1}{8\,(n-3)}$. Sommons cette relation de $n=4$ jusqu'à un entier $N\geqslant 4$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même

terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)} &= \frac{1}{8}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-3} - \frac{1}{4}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{8}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-3} - \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+2}\frac{1}{m-3}}_{[m=n+2]} + \frac{1}{8}\underbrace{\sum_{m=8}^{N+4}\frac{1}{m-3}}_{[m=n+4]} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-3} - \frac{1}{4}\sum_{n=6}^{N+2}\frac{1}{n-3} + \frac{1}{8}\sum_{n=8}^{N+4}\frac{1}{n-3} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=8}^{N}\frac{1}{n-3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=8}^{N}\frac{1}{n-3}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left(\sum_{n=8}^{N}\frac{1}{n-3}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\sum_{n=8}^{N}\frac{1}{n-3}}_{=0} + \left(\frac{1}{8}\times\frac{25}{12}-\frac{1}{4}\times\frac{7}{12}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{11}{96} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{11}{96}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)} = \frac{11}{96}.$$

Corrigé 13. Comme $\cos\left(-\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi n\right)} = e^{-\frac{5}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{3}{4}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{3}{4}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right| = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi n\right)} = e^{-\frac{5}{3}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)^n = e^{-\frac{5}{3}i\pi}\times\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{5}{3}i\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{5}{3}i\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, et : $e^{-\frac{3}{4}i\pi} = -\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi n\right)} = \frac{-\left(\frac{1}{8}i-\frac{1}{8}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{1}{8}i\sqrt{3}-\left(\frac{1}{8}i+\frac{1}{8}\right)\sqrt{2}-\frac{1}{8}}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{1}{8}\sqrt{2}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}} + i\frac{-\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{1}{8}\sqrt{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(-\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(-\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{1}{8}\sqrt{2}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2, \quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \cos\left(-\frac{3}{4}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{4}$.

Corrigé 14. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1, -2\}, \qquad \frac{1}{(x+4)(x+2)(x+1)} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

Multiplier cette égalité par $x + 4$, et prendre $x \to -4$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{6}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{3}$, et : $c = -\frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 0$: $\forall n \geqslant 0$, $\dfrac{1}{(n+4)(n+2)(n+1)} = \dfrac{1}{6\,(n+4)} - \dfrac{1}{2\,(n+2)} + \dfrac{1}{3\,(n+1)}$. Sommons cette relation de $n = 0$ jusqu'à un entier $N \geqslant 0$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+4)(n+2)(n+1)} &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+4} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=1}^{N+1}\frac{1}{m+1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{6}\underbrace{\sum_{m=3}^{N+3}\frac{1}{m+1}}_{[m=n+3]} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N+3}\frac{1}{n+1} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{N+4} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+2}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1}}_{=0} + \left(\frac{1}{3}\times\frac{11}{6} - \frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{7}{36} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{36}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+4)(n+2)(n+1)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+4)(n+2)(n+1)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+4)(n+2)(n+1)} = \frac{7}{36}.$$

Corrigé 15. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \qquad \frac{1}{(x+1)(x-1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1}.$$

Multiplier cette égalité par $x + 1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -1$, et : $c = \frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 2$: $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{(n+1)(n-1)n} = \dfrac{1}{2\,(n+1)} + \dfrac{1}{2\,(n-1)} - \dfrac{1}{n}$. Sommons cette relation de $n = 2$ jusqu'à un entier $N \geqslant 2$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général

dans chaque somme. On obtient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\underbrace{\sum_{m=3}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=4}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N+2}\frac{1}{n-1} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - 1\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-1\times\frac{1}{2}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{1}{4} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$
\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \frac{1}{4}.
$$

Corrigé 16. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 2

$$
\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\},\qquad \frac{1}{(x+1)(x-1)x} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1}.
$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x\to -1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-1$, et : $c=\frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 2$: $\forall n\geqslant 2$, $\dfrac{1}{(n+1)(n-1)n} = \dfrac{1}{2\,(n+1)}+\dfrac{1}{2\,(n-1)}-\dfrac{1}{n}$. Sommons cette relation de $n=2$ jusqu'à un entier $N\geqslant 2$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\underbrace{\sum_{m=3}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=4}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N+2}\frac{1}{n-1} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - 1\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-1\times\frac{1}{2}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{1}{4} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n+1)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \frac{1}{4}.$$

Corrigé 17. Comme $\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right| = \frac{2}{3} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)} = \frac{-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}}{1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)} = \frac{\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{2}{3}i\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{3}i\sqrt{3}-\frac{1}{9}}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{7}{9}} + i\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{7}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{7}{9}} = -\frac{3}{7}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = -\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right) + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} + \frac{4}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{7}{9}$.

Corrigé 18. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}, \quad \frac{1}{(x+1)(x-1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -1$, et : $c = \frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 4$: $\forall n \geqslant 4$, $\frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \frac{1}{2\,(n+1)} + \frac{1}{2\,(n-1)} - \frac{1}{n}$. Sommons cette relation de $n = 4$ jusqu'à un entier $N \geqslant 4$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général

dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\underbrace{\sum_{m=5}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=5}^{N+1}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=6}^{N+2}\frac{1}{n-1} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - 1\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{7}{12} - 1\times\frac{1}{4}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{1}{24} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \frac{1}{24}.$$

Corrigé 19. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2-4=(X-2)(X+2)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 2

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\},\quad \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}.$$

Multiplier cette égalité par $x-2$, et prendre $x\to 2$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{4}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-\frac{1}{4}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$:

$$\forall n\geqslant 3,\quad \frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons un changement d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}-\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2}\right) &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}-\sum_{n=7}^{N+4}\frac{1}{m-2}\right) \quad (\, m-2=n+2 \iff m=n+4\,) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}-\sum_{n=7}^{N+4}\frac{1}{n-2}\right) \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cancel{\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}}-\cancel{\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}}-\sum_{n=N+1}^{N+4}\frac{1}{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}-\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\times\frac{25}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n^2-4}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^2-4} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{25}{48}.$$

Corrigé 20. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1,-4\}, \qquad \frac{1}{(x+4)(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+4}.$$

Multiplier cette égalité par $x-1$, et prendre $x \to 1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{10}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -\frac{1}{6}$, et : $c = \frac{1}{15}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 4$: $\forall n \geqslant 4$, $\dfrac{1}{(n+4)(n+1)(n-1)} = \dfrac{1}{15\,(n+4)} - \dfrac{1}{6\,(n+1)} + \dfrac{1}{10\,(n-1)}$. Sommons cette relation de $n=4$ jusqu'à un entier $N \geqslant 4$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n+4)(n+1)(n-1)} &= \frac{1}{10}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{15}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+4} \\
&= \frac{1}{10}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{6}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]} + \frac{1}{15}\underbrace{\sum_{m=9}^{N+5}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+5]} \\
&= \frac{1}{10}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{6}\sum_{n=6}^{N+2}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{15}\sum_{n=9}^{N+5}\frac{1}{n-1} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{15}\left(\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+4}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{10}\times\frac{153}{140} - \frac{1}{6}\times\frac{107}{210}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{307}{12600} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{307}{12600}
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{(n+4)(n+1)(n-1)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(n+4)(n+1)(n-1)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{(n+4)(n+1)(n-1)} = \frac{307}{12600}.$$

Corrigé 21. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,2\}, \qquad \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}.$$

Multiplier cette égalité par $x+3$, et prendre $x \to -3$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{10}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -\frac{1}{6}$, et : $c = \frac{1}{15}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 4$: $\forall n \geqslant 4$, $\dfrac{1}{(n+3)(n+1)(n-2)} = \dfrac{1}{10\,(n+3)} - \dfrac{1}{6\,(n+1)} + \dfrac{1}{15\,(n-2)}$. Sommons cette relation de $n=4$ jusqu'à un entier $N \geqslant 4$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même

terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n+3)(n+1)(n-2)} &= \frac{1}{15}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{10}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+3} \\
&= \frac{1}{15}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{6}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+3}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+3]} + \frac{1}{10}\underbrace{\sum_{m=9}^{N+5}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+5]} \\
&= \frac{1}{15}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{6}\sum_{n=7}^{N+3}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{10}\sum_{n=9}^{N+5}\frac{1}{n-2} \quad \text{(} m \text{ est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer } n\text{)} \\
&= \frac{1}{15}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{10}\left(\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right)\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-2}}_{=0} + \left(\frac{1}{15}\times\frac{29}{20}-\frac{1}{6}\times\frac{11}{30}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{8}{225} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{8}{225}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{(n+3)(n+1)(n-2)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)(n+1)(n-2)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{(n+3)(n+1)(n-2)} = \frac{8}{225}.$$

Corrigé 22. Comme $\cos\left(-\frac{1}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-\frac{1}{3}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right| = \frac{3}{4} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 2

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi n\right)} = \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{3}i\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi n\right)} = \frac{-\frac{3}{8}i\sqrt{3}+\frac{5}{8}}{\left|1-\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{13}{16}} + i\frac{-\frac{3}{8}\sqrt{3}}{\frac{13}{16}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{13}{16}} = \frac{10}{13}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\operatorname{Re}(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right) + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} - \frac{3}{2}\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{13}{16}$.

Corrigé 23. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 0\}, \qquad \frac{1}{(x+1)(x-2)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{6}$, et : $c = -\frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 3$: $\forall n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{(n+1)(n-2)n} = \dfrac{1}{3\,(n+1)} + \dfrac{1}{6\,(n-2)} - \dfrac{1}{2\,n}$. Sommons cette relation de $n = 3$ jusqu'à un entier $N \geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-2)n} &= \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+2}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+2]} + \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+3}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+3]} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{3}\sum_{n=6}^{N+3}\frac{1}{n-2} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{=0}\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2} + \left(\frac{1}{6}\times\frac{11}{6} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{5}{36} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{36}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-2)n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-2)n} = \frac{5}{36}.$$

Corrigé 24. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2 + 3\,X = X \cdot (X+3)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : ← page 2

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3{,}0\}, \qquad \frac{1}{x^2 + 3\,x} = \frac{1}{(x+3)x} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+3$, et prendre $x \to -3$, montre qu'on a : $a = -\frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 2$:

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{1}{n^2 + 3\,n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Sommons cette relation de $n = 2$ jusqu'à un entier $N \geqslant 2$, et faisons un changement d'indice de sommation afin

d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2+3\,n} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+3}\right) &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=5}^{N+3}\frac{1}{m}\right) \quad \textcolor{blue}{(\ m=n+3 \Longleftrightarrow m=n+3\ )}\\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=5}^{N+3}\frac{1}{n}\right) \quad \textcolor{blue}{(m \text{ est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer } n)}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cancel{\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n}} - \cancel{\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n}} - \sum_{n=N+1}^{N+3}\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{13}{12} - \left(\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\times\frac{13}{12}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+3\,n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+3\,n} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{13}{36}.$$

Corrigé 25. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 2

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2,-1\},\qquad \frac{1}{(x+2)(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+1}.$$

Multiplier cette égalité par $x-2$, et prendre $x\to 2$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{12}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{4}$, et : $c=-\frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$: $\forall n\geqslant 3$, $\displaystyle\frac{1}{(n+2)(n+1)(n-2)} = \frac{1}{4\,(n+2)} - \frac{1}{3\,(n+1)} + \frac{1}{12\,(n-2)}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+2)(n+1)(n-2)} &= \frac{1}{12}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2}\\ &= \frac{1}{12}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+3}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+3]} + \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+4}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+4]}\\ &= \frac{1}{12}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{3}\sum_{n=6}^{N+3}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{4}\sum_{n=7}^{N+4}\frac{1}{n-2} \quad \textcolor{blue}{(m \text{ est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer } n)}\\ &= \frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}}_{=0} + \left(\frac{1}{12}\times\frac{25}{12}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{13}{144} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{13}{144}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+2)(n+1)(n-2)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)(n-2)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+2)(n+1)(n-2)} = \frac{13}{144}.$$

Corrigé 26. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

← page 2

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1,0\},\qquad \frac{1}{(x+1)(x-1)x}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x\to -1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{2}$, et : $c=-1$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$: $\forall n\geqslant 3,\ \dfrac{1}{(n+1)(n-1)n}=\dfrac{1}{2\,(n+1)}+\dfrac{1}{2\,(n-1)}-\dfrac{1}{n}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}&=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1}-1\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1}-1\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]}+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1}-1\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n-1}\qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}\right)-1\left(\frac{1}{3}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right)\\
&=\underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)}_{=0}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}-1\times\frac{1}{3}\right)+\underset{N\to+\infty}{o}(1)=\frac{1}{12}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}=\frac{1}{12}.$$

Corrigé 27. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. Le discriminant de $X^2-3\,X+2$ est : $\Delta=1>0$. On en déduit que les racines de $X^2-3\,X+2$ sont $\frac{3+\sqrt{1}}{2}=2$ et $\frac{3-\sqrt{1}}{2}=1$. Donc : $X^2-3\,X+2=(X-2)(X-1)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

← page 2

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2{,}1\},\qquad \frac{1}{x^2-3\,x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}.$$

Multiplier cette égalité par $x-2$, et prendre $x\to 2$, montre qu'on a : $a=1$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-1$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$:

$$\forall n\geqslant 3,\qquad \frac{1}{n^2-3\,n+2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$ est télescopique, et converge d'après le lien suite-série car $\dfrac{1}{n-1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n^2-3\,n+2}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^2-3\,n+2}=\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)=1-\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{n-1}=1.$$

Corrigé 28. Comme $\cos\left(-\frac{3}{2}\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{6}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{6}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right| = \frac{1}{6} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\times\frac{1}{1-\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{6}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{3}{2}i\,\pi} = i$, et : $e^{\frac{2}{3}i\,\pi} = \frac{1}{2}i\,\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{12}\,\sqrt{3}+\frac{13}{12}i}{\left|1-\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{12}\,\sqrt{3}}{\frac{43}{36}} + i\frac{\frac{13}{12}}{\frac{43}{36}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{6}\right)^n\cos\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n\cos\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{12}\,\sqrt{3}}{\frac{43}{36}} = -\frac{3}{43}\,\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)+\frac{1}{36} = \frac{37}{36}-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\right) = \frac{43}{36}$.

← page 2

Corrigé 29. Comme $\cos\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{\frac{1}{6}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right| = \frac{1}{5} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right)} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{6}i\,\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{1}{6}i\,\pi} = \frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{10}\,\sqrt{3}+\frac{1}{10}i+1}{\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{10}\,\sqrt{3}+1}{-\frac{1}{5}\,\sqrt{3}+\frac{26}{25}} + i\frac{\frac{1}{10}}{-\frac{1}{5}\,\sqrt{3}+\frac{26}{25}}.$$

← page 2

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cos\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cos\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi n\right)}\right)=\frac{-\frac{1}{10}\sqrt{3}+1}{-\frac{1}{5}\sqrt{3}+\frac{26}{25}}=\frac{5\left(\sqrt{3}-10\right)}{2\left(5\sqrt{3}-26\right)}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)+\frac{1}{25}=\frac{26}{25}-\frac{2}{5}\cos\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)=-\frac{1}{5}\sqrt{3}+\frac{26}{25}$.

Corrigé 30. Comme $\cos\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{5}{3}i\,\pi n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right|=\frac{2}{3}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 2

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)}=\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{3}i\,\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{5}{3}i\,\pi}=-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)}=\frac{-\frac{1}{3}i\sqrt{3}+\frac{2}{3}}{\left|1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}+i\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{7}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{6}{7}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\left(\frac{5}{3}\,\pi\right)=\frac{7}{9}$.

Corrigé 31. Comme $\sin\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)}=e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{5}{6}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la ← page 2

série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{5}{6}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right| = \frac{3}{5} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)} = e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)^n = e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\times\frac{1}{1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\cdot\left(1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{1}{6}i\,\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, et : $e^{\frac{5}{6}i\,\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)} = \frac{\left(\frac{3}{10}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{10}}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}\sqrt{3}+\frac{34}{25}} + i\frac{\frac{3}{10}\sqrt{3}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}\sqrt{3}+\frac{34}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sin\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sin\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{3}{10}\sqrt{3}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}\sqrt{3}+\frac{34}{25}} = \frac{5\left(177\sqrt{3}+305\right)}{2\left(1020\sqrt{3}+1831\right)}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)+\frac{9}{25} = \frac{34}{25}-\frac{6}{5}\cos\left(\frac{5}{6}\,\pi\right) = \frac{3}{5}\sqrt{3}+\frac{34}{25}$.

Corrigé 32. Comme $\cos\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{-\frac{1}{4}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right| = \frac{2}{3} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}}{1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)} = \frac{\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{4}i\,\pi} = -\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3}i-\frac{1}{3}\right)\sqrt{2}-\frac{4}{9}}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{13}{9}} + i\frac{\frac{1}{3}\sqrt{2}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{13}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{4}\,\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{13}{9}} = -\frac{2\left(44\sqrt{2}+63\right)}{241\sqrt{2}+312}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = -\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right) + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} + \frac{4}{3}\cos\left(-\frac{1}{4}\,\pi\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{13}{9}$.

Corrigé 33. Comme $\cos\left(\frac{3}{2}\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{3}{2}\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi n\right)} = e^{\frac{3}{2}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{1}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{1}{3}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 3

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi n\right)} = e^{\frac{3}{2}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)^n = e^{\frac{3}{2}i\,\pi} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{3}{2}i\,\pi}\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{3}{2}i\,\pi} = -i$, et : $e^{-\frac{1}{3}i\,\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}i}{\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} + i\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{3}{2}\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{3}{2}\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi\right) = \frac{3}{4}$.

Corrigé 34. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. Le discriminant de $X^2 + X - 2$ est : $\Delta = 9 > 0$. On en déduit que les racines de $X^2 + X - 2$ sont $\frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$ et $\frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$. Donc : $X^2 + X - 2 = (X+2)(X-1)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2{,}1\}, \quad \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1}.$$

Multiplier cette égalité par $x+2$, et prendre $x \to -2$, montre qu'on a : $a = -\frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 4$:

$$\forall n \geqslant 4, \quad \frac{1}{n^2 + n - 2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Sommons cette relation de $n = 4$ jusqu'à un entier $N \geqslant 4$, et faisons un changement d'indice de sommation afin

d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n^2+n-2} &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=7}^{N+3}\frac{1}{m-1}\right) \quad (\ m-1=n+2 \iff m=n+3\ )\\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=7}^{N+3}\frac{1}{n-1}\right) \quad (m \text{ est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer } n)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cancel{\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}}-\cancel{\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}}-\sum_{n=N+1}^{N+3}\frac{1}{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{47}{60}-\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\times\frac{47}{60}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^2+n-2}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n-2} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{3}\sum_{n=4}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{47}{180}.$$

Corrigé 35. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2-4X = X\cdot(X-4)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 3

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{4{,}0\},\quad \frac{1}{x^2-4x} = \frac{1}{(x-4)x} = \frac{a}{x-4}+\frac{b}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x-4$, et prendre $x\to 4$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{4}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-\frac{1}{4}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 5$:

$$\forall n\geqslant 5,\quad \frac{1}{n^2-4n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n}\right).$$

Sommons cette relation de $n=5$ jusqu'à un entier $N\geqslant 5$, et faisons un changement d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n^2-4n} &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-4}-\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-4}-\sum_{n=9}^{N+4}\frac{1}{m-4}\right) \quad (\ m-4=n \iff m=n+4\ )\\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-4}-\sum_{n=9}^{N+4}\frac{1}{n-4}\right) \quad (m \text{ est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer } n)\\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cancel{\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-4}}-\cancel{\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-4}}-\sum_{n=N+1}^{N+4}\frac{1}{n-4}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}-\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\frac{1}{N-3}+\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\times\frac{25}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{n^2-4n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{n^2-4n} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4}\sum_{n=5}^{N}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n}\right) = \frac{25}{48}.$$

Corrigé 36. Comme $\cos\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)} = e^{-\frac{1}{4}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{1}{6}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. ← page 3

Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{1}{6}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right| = \frac{2}{3} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)} = e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)^n = e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\times\frac{-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}}{1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\cdot\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{4}i\,\pi} = -\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, et : $e^{\frac{1}{6}i\,\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)} = \frac{\left(\frac{1}{6}i-\frac{1}{6}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\frac{1}{18}i-\frac{7}{18}\right)\sqrt{2}}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{7}{18}\sqrt{2}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}} + i\frac{\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{18}\sqrt{2}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{7}{18}\sqrt{2}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\right)+\frac{4}{9} = \frac{13}{9}+\frac{4}{3}\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{9}$.

Corrigé 37. Comme $\sin\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)} = e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{5}{6}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. ← page 3

Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{5}{6}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right| = \frac{5}{6} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)} = e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\times\frac{1}{1-\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\cdot\left(1-\left(-\frac{5}{6}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{2}i\,\pi} = -i$, et : $e^{\frac{2}{3}i\,\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)} = \frac{-\frac{5}{12}\sqrt{3}-\frac{7}{12}i}{\left|1-\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{5}{12}\sqrt{3}}{\frac{31}{36}} + i\frac{-\frac{7}{12}}{\frac{31}{36}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{5}{6}\right)^n\sin\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^n\sin\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{7}{12}}{\frac{31}{36}} = -\frac{21}{31}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)+\frac{25}{36}=\frac{61}{36}+\frac{5}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{31}{36}$.

Corrigé 38. Comme $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)}=e^{\frac{2}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{-\frac{4}{3}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{-\frac{4}{3}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right|=\frac{3}{5}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 3

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)}=e^{\frac{2}{3}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)^n=e^{\frac{2}{3}i\pi}\times\frac{\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}}{1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)}=\frac{e^{\frac{2}{3}i\pi}\cdot\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{4}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{2}{3}i\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{-\frac{4}{3}i\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)}=\frac{-\frac{12}{25}i\sqrt{3}-\frac{3}{25}}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{-\frac{3}{25}}{\frac{49}{25}}+i\frac{-\frac{12}{25}\sqrt{3}}{\frac{49}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi n\right)}\right)=\frac{-\frac{3}{25}}{\frac{49}{25}}=-\frac{3}{49}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)+\frac{9}{25}=\frac{34}{25}-\frac{6}{5}\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{49}{25}$.

Corrigé 39. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. Le discriminant de X^2-X-2 est : $\Delta=9>0$. On en déduit que les racines de X^2-X-2 sont $\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$ et $\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$. Donc : $X^2-X-2=(X+1)(X-2)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 3

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\},\quad \frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x\to -1$, montre qu'on a : $a=-\frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 5$:

$$\forall n\geqslant 5,\quad \frac{1}{n^2-n-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Sommons cette relation de $n = 5$ jusqu'à un entier $N \geqslant 5$, et faisons un changement d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n^2-n-2} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n-2} - \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n+1}\right) &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n-2} - \sum_{n=8}^{N+3} \frac{1}{m-2}\right) \quad (\, m-2 = n+1 \iff m = n+3 \,)\\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n-2} - \sum_{n=8}^{N+3} \frac{1}{n-2}\right) \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cancel{\sum_{n=8}^{N} \frac{1}{n-2}} - \cancel{\sum_{n=8}^{N} \frac{1}{n-2}} - \sum_{n=N+1}^{N+3} \frac{1}{n-2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{47}{60} - \left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \times \frac{47}{60}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 5} \frac{1}{n^2-n-2}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n-2} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{3}\sum_{n=5}^{N}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{47}{180}.$$

Corrigé 40. Comme $\cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\frac{1}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{3}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right| = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 3

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{3}\pi n\right)} = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}}{1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{1}{3}i\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{3}\pi n\right)} = \frac{\frac{1}{4}i\sqrt{3}}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2} = i\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{3}\pi n\right)}\right) = 0.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\operatorname{Re}(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{3}{4}$.

Corrigé 41. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition ← page 3

en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,0,-1\},\qquad \frac{1}{(x+1)(x-1)x}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}.$$

Multiplier cette égalité par $x-1$, et prendre $x\to 1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-1$, et : $c=\frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$: $\forall n\geqslant 3,\ \dfrac{1}{(n+1)(n-1)n}=\dfrac{1}{2\,(n+1)}+\dfrac{1}{2\,(n-1)}-\dfrac{1}{n}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}&=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1}-1\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1}-1\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]}+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1}-1\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n-1}\qquad\text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}\right)-1\left(\frac{1}{3}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right)\\
&=\underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}-1\times\frac{1}{3}\right)+\underset{N\to+\infty}{o}(1)=\frac{1}{12}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}=\frac{1}{12}.$$

Corrigé 42. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 3

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1,0\},\qquad \frac{1}{(x+1)(x-1)x}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x-1$, et prendre $x\to 1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{2}$, et : $c=-1$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$: $\forall n\geqslant 3,\ \dfrac{1}{(n+1)(n-1)n}=\dfrac{1}{2\,(n+1)}+\dfrac{1}{2\,(n-1)}-\dfrac{1}{n}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général

dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n-1} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - 1\left(\frac{1}{3}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{6} - 1\times\frac{1}{3}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{1}{12} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n+1)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \frac{1}{12}.$$

Corrigé 43. Comme $\sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\left(\frac{3}{4}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{4}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{3}{4}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 3

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{4}\pi n\right)} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{3}{4}i\pi} = \left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{4}\pi n\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}+1}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}+1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}} + i\frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{4}\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{4}} = \frac{2}{5\sqrt{2}+4}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2, \quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \cos\left(\frac{3}{4}\,\pi\right) = \frac{1}{2}\,\sqrt{2} + \frac{5}{4}$.

Corrigé 44. Comme $\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(\frac{1}{2}\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{2}\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi n\right)} = e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{\frac{3}{4}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{\frac{3}{4}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right| = \frac{1}{4} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{2}\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi n\right)} = e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)^n = e^{\frac{1}{2}i\,\pi} \times \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\cdot\left(1 - \left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{1}{2}i\,\pi} = i$, et : $e^{\frac{3}{4}i\,\pi} = \left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{2}\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi n\right)} = \frac{-\left(\frac{1}{8}i - \frac{1}{8}\right)\sqrt{2} + i}{\left|1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{8}\,\sqrt{2}}{-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{17}{16}} + i\,\frac{-\frac{1}{8}\,\sqrt{2} + 1}{-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{17}{16}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \sin\left(\frac{1}{2}\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \sin\left(\frac{1}{2}\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{2}\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{8}\,\sqrt{2} + 1}{-\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{17}{16}} = \frac{4\left(4\,\sqrt{2} - 1\right)}{17\,\sqrt{2} - 8}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = -\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right) + \frac{1}{16} = \frac{17}{16} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{4}\,\pi\right) = -\frac{1}{4}\,\sqrt{2} + \frac{17}{16}$.

← page 3

Corrigé 45. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}, \quad \frac{1}{(x+1)(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-3}.$$

Multiplier cette égalité par $x + 1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{8}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -\frac{1}{4}$, et : $c = \frac{1}{8}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 5$: $\forall n \geqslant 5$, $\displaystyle\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)} = \frac{1}{8\,(n+1)} - \frac{1}{4\,(n-1)} + \frac{1}{8\,(n-3)}$. Sommons cette relation de $n = 5$ jusqu'à un entier $N \geqslant 5$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même

← page 3

terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)} &= \frac{1}{8}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-3} - \frac{1}{4}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{8}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-3} - \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+2}\frac{1}{m-3}}_{[m=n+2]} + \frac{1}{8}\underbrace{\sum_{m=9}^{N+4}\frac{1}{m-3}}_{[m=n+4]} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-3} - \frac{1}{4}\sum_{n=7}^{N+2}\frac{1}{n-3} + \frac{1}{8}\sum_{n=9}^{N+4}\frac{1}{n-3} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left(\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)}_{=0}\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3} + \left(\frac{1}{8}\times\frac{77}{60}-\frac{1}{4}\times\frac{9}{20}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{23}{480} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{23}{480}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 5} \frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-3)} = \frac{23}{480}.$$

Corrigé 46. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 3

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-4,0\}, \qquad \frac{1}{(x+4)(x-1)x} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+4}+\frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x-1$, et prendre $x\to 1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{5}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{20}$, et : $c=-\frac{1}{4}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 4$: $\forall n\geqslant 4$, $\frac{1}{(n+4)(n-1)n} = \frac{1}{20\,(n+4)}+\frac{1}{5\,(n-1)}-\frac{1}{4\,n}$. Sommons cette relation de $n=4$ jusqu'à un entier $N\geqslant 4$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n+4)(n-1)n} &= \frac{1}{5}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{20}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+4} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{20}\underbrace{\sum_{m=9}^{N+5}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+5]} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=5}^{N+1}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{20}\sum_{n=9}^{N+5}\frac{1}{n-1} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{20}\left(\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+4}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)}_{=0}\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1} + \left(\frac{1}{5}\times\frac{153}{140}-\frac{1}{4}\times\frac{319}{420}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{241}{8400} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{241}{8400}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 4}\dfrac{1}{(n+4)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(n+4)(n-1)n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{(n+4)(n-1)n}=\frac{241}{8400}.$$

Corrigé 47. Comme $\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{3}{4}\,\pi n\right)=\operatorname{Im}\left(e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{3}{4}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{3}{4}\,\pi n\right)}=e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n e^{\frac{3}{4}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n e^{\frac{3}{4}i\,\pi n}=\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-\dfrac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\dfrac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right|=\dfrac{2}{5}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{3}{4}\,\pi n\right)}=e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)^n=e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\times\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)}=\frac{e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\cdot\left(1-\left(-\frac{2}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{2}{3}i\,\pi}=\frac{1}{2}i\,\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{3}{4}i\,\pi}=\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right)\,\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{3}{4}\,\pi n\right)}=\frac{-\left(\frac{1}{10}i-\frac{1}{10}\right)\,\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\,\sqrt{3}+\left(\frac{1}{10}i+\frac{1}{10}\right)\,\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{\left|1-\left(-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{1}{10}\,\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{10}\,\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{-\frac{2}{5}\,\sqrt{2}+\frac{29}{25}}+i\frac{-\frac{1}{10}\,\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{1}{10}\,\sqrt{2}}{-\frac{2}{5}\,\sqrt{2}+\frac{29}{25}}$$

Il en résulte que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n\sin\left(\dfrac{2}{3}\,\pi+\dfrac{3}{4}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{3}{4}\,\pi n\right)=\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{3}{4}\,\pi n\right)}\right)=\frac{-\frac{1}{10}\,\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{1}{10}\,\sqrt{2}}{-\frac{2}{5}\,\sqrt{2}+\frac{29}{25}}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)+\frac{4}{25}=\frac{29}{25}+\frac{4}{5}\cos\left(\frac{3}{4}\,\pi\right)=-\frac{2}{5}\,\sqrt{2}+\frac{29}{25}$.

← page 3

Corrigé 48. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2+4\,X=X\cdot(X+4)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

← page 3

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4{,}0\},\quad \frac{1}{x^2+4\,x}=\frac{1}{(x+4)x}=\frac{a}{x+4}+\frac{b}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+4$, et prendre $x\to-4$, montre qu'on a : $a=-\frac{1}{4}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{4}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$:

$$\forall n\geqslant 3,\quad \frac{1}{n^2+4\,n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right).$$

Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons un changement d'indice de sommation afin

d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^2+4n} &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{m=7}^{N+4}\frac{1}{m}\right) \quad (\ m=n+4 \iff m=n+4\ )\\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=7}^{N+4}\frac{1}{n}\right) \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cancel{\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}}-\cancel{\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}}-\sum_{n=N+1}^{N+4}\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{19}{20}-\left(\frac{1}{N+4}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\times\frac{19}{20}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n^2+4n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^2+4n} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right) = \frac{19}{80}.$$

Corrigé 49. Comme $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)} = e^{-\frac{2}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{1}{2}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{1}{2}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right| = \frac{3}{5} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 3

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)} = e^{-\frac{2}{3}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)^n = e^{-\frac{2}{3}i\pi}\times\frac{\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}}{1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{2}{3}i\pi}\cdot\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{2}{3}i\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{1}{2}i\pi} = i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)} = \frac{\left(\frac{9}{50}i+\frac{3}{10}\right)\sqrt{3}-\frac{3}{10}i+\frac{9}{50}}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{3}{10}\sqrt{3}+\frac{9}{50}}{\frac{34}{25}}+i\,\frac{\frac{9}{50}\sqrt{3}-\frac{3}{10}}{\frac{34}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sin\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sin\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{9}{50}\sqrt{3}-\frac{3}{10}}{\frac{34}{25}} = \frac{9}{68}\sqrt{3}-\frac{15}{68}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)+\frac{9}{25} = \frac{34}{25}-\frac{6}{5}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{34}{25}$.

Corrigé 50. Comme $\sin\left(-\frac{4}{3}\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si ← page 4

et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{4}{3}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right| = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi n\right)} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{4}{3}i\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{4}{3}i\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi n\right)} = \frac{\frac{1}{4}i\sqrt{3}+\frac{5}{4}}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} + i\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{7}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(-\frac{4}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(-\frac{4}{3}\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}-\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{7}{4}$.

Corrigé 51. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 4

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-4\},\quad \frac{1}{(x+4)(x+1)x} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+4}.$$

Multiplier cette égalité par x, et prendre $x\to 0$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{4}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-\frac{1}{3}$, et : $c=\frac{1}{12}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$: $\forall n\geqslant 3$, $\frac{1}{(n+4)(n+1)n} = \frac{1}{12\,(n+4)} - \frac{1}{3\,(n+1)} + \frac{1}{4\,n}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque

somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+4)(n+1)n} &= \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{12}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+4} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{12}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+4}\frac{1}{m}}_{[m=n+4]} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{12}\sum_{n=7}^{N+4}\frac{1}{n} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{12}\left(\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+4}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n}}_{=0} + \left(\frac{1}{4}\times\frac{19}{20}-\frac{1}{3}\times\frac{37}{60}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{23}{720} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{23}{720}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+4)(n+1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)(n+1)n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+4)(n+1)n} = \frac{23}{720}.$$

Corrigé 52. Comme $\cos\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{-\frac{1}{2}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right| = \frac{1}{5} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 4

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{2}i\,\pi} = -i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{5}i+1}{\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{1}{\frac{26}{25}} + i\frac{-\frac{1}{5}}{\frac{26}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)}\right) = \frac{1}{\frac{26}{25}} = \frac{25}{26}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2, \quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right)+\frac{1}{25}=\frac{26}{25}-\frac{2}{5}\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{26}{25}$.

Corrigé 53. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 4

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3,1,0\},\qquad \frac{1}{(x-1)(x-3)x}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x-3$, et prendre $x\to 3$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{6}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-\frac{1}{2}$, et : $c=\frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 6$: $\forall n\geqslant 6,\ \dfrac{1}{(n-1)(n-3)n}=-\dfrac{1}{2\,(n-1)}+\dfrac{1}{6\,(n-3)}+\dfrac{1}{3\,n}$. Sommons cette relation de $n=6$ jusqu'à un entier $N\geqslant 6$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{(n-1)(n-3)n} &= \frac{1}{6}\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-3}-\frac{1}{2}\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-3}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=8}^{N+2}\frac{1}{m-3}}_{[m=n+2]}+\frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=9}^{N+3}\frac{1}{m-3}}_{[m=n+3]}\\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-3}-\frac{1}{2}\sum_{n=8}^{N+2}\frac{1}{n-3}+\frac{1}{3}\sum_{n=9}^{N+3}\frac{1}{n-3} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right)\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\frac{1}{N}\right)\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}}_{=0}+\left(\frac{1}{6}\times\frac{47}{60}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right)+\underset{N\to+\infty}{o}(1)=\frac{11}{360}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{11}{360}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 6}\frac{1}{(n-1)(n-3)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=6}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)(n-3)n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{(n-1)(n-3)n}=\frac{11}{360}.$$

Corrigé 54. Comme $\sin\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)}=e^{-\frac{4}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{-\frac{3}{2}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{-\frac{3}{2}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right|=\dfrac{1}{3}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 4

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)}=e^{-\frac{4}{3}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)^n=e^{-\frac{4}{3}i\pi}\times\frac{-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}}{1-\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)}=\frac{e^{-\frac{4}{3}i\pi}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{4}{3}i\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{-\frac{3}{2}i\pi}=i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)}=\frac{-\left(\frac{1}{18}i-\frac{1}{6}\right)\sqrt{3}+\frac{1}{6}i+\frac{1}{18}}{\left|1-\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{18}}{\frac{10}{9}}+i\frac{-\frac{1}{18}\sqrt{3}+\frac{1}{6}}{\frac{10}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi n\right)}\right)=\frac{-\frac{1}{18}\sqrt{3}+\frac{1}{6}}{\frac{10}{9}}=-\frac{1}{20}\sqrt{3}+\frac{3}{20}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{10}{9}$.

Corrigé 55. Comme $\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right|=\frac{3}{4}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 4

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)}=\frac{1-\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{2}{3}i\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}=\frac{\frac{3}{8}i\sqrt{3}+\frac{11}{8}}{\left|1-\left(\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{11}{8}}{\frac{37}{16}}+i\frac{\frac{3}{8}\sqrt{3}}{\frac{37}{16}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{11}{8}}{\frac{37}{16}}=\frac{22}{37}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{37}{16}$.

Corrigé 56. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition ← page 4

en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,2\},\qquad \frac{1}{(x+1)(x-2)x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}.$$

Multiplier cette égalité par x, et prendre $x\to 0$, montre qu'on a : $a=-\frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{3}$, et : $c=\frac{1}{6}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 5$: $\forall n\geqslant 5$, $\dfrac{1}{(n+1)(n-2)n}=\dfrac{1}{3\,(n+1)}+\dfrac{1}{6\,(n-2)}-\dfrac{1}{2\,n}$. Sommons cette relation de $n=5$ jusqu'à un entier $N\geqslant 5$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-2)n} &= \frac{1}{6}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-2}-\frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n+1}\\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-2}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+2}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+2]}+\frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=8}^{N+3}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+3]}\\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-2}-\frac{1}{2}\sum_{n=7}^{N+2}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{3}\sum_{n=8}^{N+3}\frac{1}{n-2} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=8}^{N}\frac{1}{n-2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\sum_{n=8}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(\sum_{n=8}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\sum_{n=8}^{N}\frac{1}{n-2}}_{=0}+\left(\frac{1}{6}\times\frac{47}{60}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right)+\underset{N\to+\infty}{o}(1)=\frac{11}{360}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{11}{360}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}=\frac{11}{360}.$$

Corrigé 57. Comme $\sin\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)=\operatorname{Im}\left(e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)}=e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\dfrac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right|=\dfrac{2}{3}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 4

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)}=e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n=e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\times\frac{-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}}{1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)}=\frac{e^{\frac{1}{6}i\,\pi}\cdot\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{1}{6}i\,\pi}=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, et : $e^{\frac{2}{3}i\,\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)}=\frac{\frac{1}{9}\sqrt{3}-\frac{5}{9}i}{\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{1}{9}\sqrt{3}}{\frac{7}{9}}+i\frac{-\frac{5}{9}}{\frac{7}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)=\frac{-\frac{5}{9}}{\frac{7}{9}}=-\frac{5}{7}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}+\frac{4}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{7}{9}$.

Corrigé 58. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2+2X=X\cdot(X+2)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 4

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-2\},\quad \frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{(x+2)x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+2}.$$

Multiplier cette égalité par x, et prendre $x\to 0$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-\frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 2$:

$$\forall n\geqslant 2,\quad \frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Sommons cette relation de $n=2$ jusqu'à un entier $N\geqslant 2$, et faisons un changement d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+2}\right)&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=4}^{N+2}\frac{1}{m}\right)\qquad (\ m=n+2\Longleftrightarrow m=n+2\ )\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=4}^{N+2}\frac{1}{n}\right)\qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancel{\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}}-\cancel{\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}}-\sum_{n=N+1}^{N+2}\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right)\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+2n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2n}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{5}{12}.$$

Corrigé 59. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 4

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-3\},\quad \frac{1}{(x+3)(x-1)x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+3}.$$

Multiplier cette égalité par x, et prendre $x\to 0$, montre qu'on a : $a=-\frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{4}$, et : $c=\frac{1}{12}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$: $\forall n\geqslant 3$, $\displaystyle\frac{1}{(n+3)(n-1)n}=\frac{1}{12\,(n+3)}+\frac{1}{4\,(n-1)}-\frac{1}{3\,n}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N \geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+3)(n-1)n} &= \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{12}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+3} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{12}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+4}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+4]} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{12}\sum_{n=7}^{N+4}\frac{1}{n-1} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{12}\left(\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{4}\times\frac{77}{60}-\frac{1}{3}\times\frac{47}{60}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{43}{720} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{43}{720}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+3)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)(n-1)n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+3)(n-1)n} = \frac{43}{720}.$$

Corrigé 60. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}, \qquad \frac{1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{6}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -\frac{1}{2}$, et : $c = \frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 3$: $\forall n \geqslant 3$, $\frac{1}{(n+1)(n-1)(n-2)} = \frac{1}{6\,(n+1)} - \frac{1}{2\,(n-1)} + \frac{1}{3\,(n-2)}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N \geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)(n-2)} &= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{6}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+3}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+3]} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{6}\sum_{n=6}^{N+3}\frac{1}{n-2} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N-1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2}}_{=0} + \left(\frac{1}{3}\times\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{7}{36} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{36}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+1)(n-1)(n-2)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)(n-2)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)(n-2)} = \frac{7}{36}.$$

Corrigé 61. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. Le discriminant de $X^2+3\,X+2$ est : $\Delta = 1 > 0$. On en déduit que les racines de $X^2+3\,X+2$ sont $\frac{-3+\sqrt{1}}{2} = -1$ et $\frac{-3-\sqrt{1}}{2} = -2$. Donc : $X^2+3\,X+2 = (X+2)(X+1)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}, \quad \frac{1}{x^2+3\,x+2} = \frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}.$$

Multiplier cette égalité par $x+2$, et prendre $x\to-2$, montre qu'on a : $a=-1$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=1$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 2$:

$$\forall n\geqslant 2, \quad \frac{1}{n^2+3\,n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ est télescopique, et converge d'après le lien suite-série car $\frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+3\,n+2}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+3\,n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{3} - \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{n+2} = \frac{1}{3}.$$

Corrigé 62. Comme $\cos\left(-\frac{5}{6}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{2}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{2}{3}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right| = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 4

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n = e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\times\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}}{1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{5}{6}i\,\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$, et : $e^{-\frac{2}{3}i\,\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = \frac{\frac{1}{8}\sqrt{3}+\frac{5}{8}i}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{8}\sqrt{3}}{\frac{7}{4}} + i\,\frac{\frac{5}{8}}{\frac{7}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(-\frac{5}{6}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(-\frac{5}{6}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{5}{6}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{1}{8}\sqrt{3}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{14}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2, \quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \cos\left(-\frac{2}{3}\,\pi\right) = \frac{7}{4}$.

Corrigé 63. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, 0\}, \qquad \frac{1}{(x+2)(x+1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = -1$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{2}$, et : $c = \frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 2$: $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)n} = \dfrac{1}{2\,(n+2)} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2\,n}$. Sommons cette relation de $n = 2$ jusqu'à un entier $N \geqslant 2$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - 1\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - 1 \underbrace{\sum_{m=3}^{N+1} \frac{1}{m}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{m=4}^{N+2} \frac{1}{m}}_{[m=n+2]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - 1\sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N+2} \frac{1}{n} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n}\right) - 1\left(\frac{1}{3} + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n}}_{=0} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} - 1 \times \frac{1}{3}\right) + \underset{N \to +\infty}{o}(1) = \frac{1}{12} + \underset{N \to +\infty}{o}(1) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{(n+2)(n+1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} = \frac{1}{12}.$$

Corrigé 64. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0\}, \qquad \frac{1}{(x+1)(x-1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{2}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{2}$, et : $c = -1$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 3$: $\forall n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{(n+1)(n-1)n} = \dfrac{1}{2\,(n+1)} + \dfrac{1}{2\,(n-1)} - \dfrac{1}{n}$. Sommons cette relation de $n = 3$ jusqu'à un entier $N \geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général

dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} - 1\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n-1} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - 1\left(\frac{1}{3}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}-1\times\frac{1}{3}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{1}{12} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+1)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)n} = \frac{1}{12}.$$

Corrigé 65. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. Le discriminant de X^2+2X-3 est : $\Delta = 16 > 0$. On en déduit que les racines de X^2+2X-3 sont $\frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$ et $\frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$. Donc : $X^2+2X-3 = (X+3)(X-1)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 4

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1\},\quad \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-1}.$$

Multiplier cette égalité par $x+3$, et prendre $x\to-3$, montre qu'on a : $a = -\frac{1}{4}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{4}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 2$:

$$\forall n\geqslant 2,\quad \frac{1}{n^2+2n-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+3}\right).$$

Sommons cette relation de $n=2$ jusqu'à un entier $N\geqslant 2$, et faisons un changement d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2+2n-3} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+3}\right) &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=6}^{N+4}\frac{1}{m-1}\right) \quad (\,m-1=n+3 \iff m=n+4\,) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=6}^{N+4}\frac{1}{n-1}\right) \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cancel{\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-1}}-\cancel{\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-1}}-\sum_{n=N+1}^{N+4}\frac{1}{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}-\left(\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\times\frac{25}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+2n-3}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2n-3} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{25}{48}.$$

Corrigé 66. Comme $\cos\left(-\frac{3}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{1}{2}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi} \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right| = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{1}{2}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)^n = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi} \times \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{3}{2}i\,\pi} = i$, et : $e^{\frac{1}{2}i\,\pi} = i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{1}{2}\,\pi n\right)} = \frac{i-\frac{1}{2}}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} + i\frac{1}{\frac{5}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\frac{3}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(-\frac{3}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\,\pi+\frac{1}{2}\,\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{2}{5}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \cos\left(\frac{1}{2}\,\pi\right) = \frac{5}{4}$.

← page 4

Corrigé 67. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-2,0\}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = -1$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{2}$, et : $c = \frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 1$: $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\frac{1}{(n+2)(n+1)n} = \frac{1}{2\,(n+2)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2\,n}$. Sommons cette relation de $n = 1$ jusqu'à un entier $N \geqslant 1$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque

← page 5

somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+2)(n+1)n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 1\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 1\underbrace{\sum_{m=2}^{N+1}\frac{1}{m}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=3}^{N+2}\frac{1}{m}}_{[m=n+2]}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 1\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}\right) - 1\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-1\times\frac{1}{2}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{1}{4} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+2)(n+1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+2)(n+1)n} = \frac{1}{4}.$$

Corrigé 68. Comme $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)} = e^{-\frac{4}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right| = \frac{2}{3} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 5

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)} = e^{-\frac{4}{3}i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)^n = e^{-\frac{4}{3}i\pi}\times\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{4}{3}i\pi}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{4}{3}i\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{1}{3}i\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)} = \frac{\frac{1}{6}i\sqrt{3}-\frac{5}{6}}{\left|1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{7}{9}} + i\frac{\frac{1}{6}\sqrt{3}}{\frac{7}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{7}{9}} = -\frac{15}{14}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right) + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\,\pi\right) = \frac{7}{9}$.

Corrigé 69. Comme $\sin\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{1}{2}i\,\pi n} = \sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right| = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 5

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)}{\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{2}i\,\pi} = -i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{2}i + 1}{\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{1}{\frac{5}{4}} + i\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\,\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{2}{5}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \cos\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right) = \frac{5}{4}$.

Corrigé 70. Comme $\sin\left(\frac{3}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(\frac{3}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right)} = e^{\frac{3}{2}i\,\pi}\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{\frac{1}{2}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{\frac{1}{2}i\,\pi n} = \sum\limits_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right| = \frac{1}{4} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 5

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi n\right)} = e^{\frac{3}{2}i\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)^n = e^{\frac{3}{2}i\,\pi} \times \frac{-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}}{1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{3}{2}i\,\pi}\cdot\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\cdot\left(1 - \left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{3}{2}i\,\pi} = -i$, et : $e^{\frac{1}{2}i\,\pi} = i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)}=\frac{\frac{1}{16}i-\frac{1}{4}}{\left|1-\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{17}{16}}+i\frac{\frac{1}{16}}{\frac{17}{16}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)=\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{17}{16}}=\frac{1}{17}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\operatorname{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\operatorname{Re}(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\right|^2=1-2\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)+\frac{1}{16}=\frac{17}{16}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{17}{16}$.

Corrigé 71. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. Le discriminant de X^2-2X-3 est : $\Delta=16>0$. On en déduit que les racines de X^2-2X-3 sont $\frac{2+\sqrt{16}}{2}=3$ et $\frac{2-\sqrt{16}}{2}=-1$. Donc : $X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 5

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1{,}3\},\quad \frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x+1)(x-3)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x\to -1$, montre qu'on a : $a=-\frac{1}{4}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{4}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 5$:

$$\forall n\geqslant 5,\quad \frac{1}{n^2-2n-3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Sommons cette relation de $n=5$ jusqu'à un entier $N\geqslant 5$, et faisons un changement d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n^2-2n-3}=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-3}-\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n+1}\right)&=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-3}-\sum_{n=9}^{N+4}\frac{1}{m-3}\right) && (\ m-3=n+1\iff m=n+4\ )\\ &=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n-3}-\sum_{n=9}^{N+4}\frac{1}{n-3}\right) && (m \text{ est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer } n)\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cancel{\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}}-\cancel{\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-3}}-\sum_{n=N+1}^{N+4}\frac{1}{n-3}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{77}{60}-\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\frac{1}{N}\right)\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}\times\frac{77}{60}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{n^2-2n-3}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{n^2-2n-3}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4}\sum_{n=5}^{N}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{77}{240}.$$

Corrigé 72. Comme $\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)=\operatorname{Re}\left(e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série ← page 5

$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)} = e^{-\frac{1}{3}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{\frac{5}{3}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{\frac{5}{3}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right| = \frac{1}{3} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)} = e^{-\frac{1}{3}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)^n = e^{-\frac{1}{3}i\pi}\times\frac{\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}}{1-\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{3}i\pi}\cdot\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{5}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{3}i\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{5}{3}i\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)} = \frac{-\frac{1}{9}i\sqrt{3}-\frac{2}{9}}{\left|1-\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{7}{9}} + i\frac{-\frac{1}{9}\sqrt{3}}{\frac{7}{9}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{7}{9}} = -\frac{2}{7}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}i\pi}\right)+\frac{1}{9} = \frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{7}{9}$.

Corrigé 73. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 5

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-2,-1\},\quad \frac{1}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+1}.$$

Multiplier cette égalité par $x-1$, et prendre $x\to 1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{6}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{3}$, et : $c=-\frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 4$: $\forall n\geqslant 4$, $\frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)} = \frac{1}{3\,(n+2)}-\frac{1}{2\,(n+1)}+\frac{1}{6\,(n-1)}$. Sommons cette relation de $n=4$ jusqu'à un entier $N\geqslant 4$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même

terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)} &= \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+2}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]} + \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+3}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+3]} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=6}^{N+2}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=7}^{N+3}\frac{1}{n-1} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{6}\times\frac{47}{60}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{11}{360} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{11}{360}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)} = \frac{11}{360}.$$

Corrigé 74. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}, \qquad \frac{1}{(x+2)(x-2)x} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-2}.$$

Multiplier cette égalité par $x+2$, et prendre $x\to-2$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{8}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=-\frac{1}{4}$, et : $c=\frac{1}{8}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 3$: $\forall n\geqslant 3$, $\frac{1}{(n+2)(n-2)n} = \frac{1}{8\,(n+2)} + \frac{1}{8\,(n-2)} - \frac{1}{4\,n}$. Sommons cette relation de $n=3$ jusqu'à un entier $N\geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+2)(n-2)n} &= \frac{1}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+2}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+2]} + \frac{1}{8}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+4}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+4]} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{4}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{8}\sum_{n=7}^{N+4}\frac{1}{n-2} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left(\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}}_{=0} + \left(\frac{1}{8}\times\frac{25}{12}-\frac{1}{4}\times\frac{7}{12}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{11}{96} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{11}{96}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{1}{(n+2)(n-2)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n-2)n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+2)(n-2)n} = \frac{11}{96}.$$

Corrigé 75. Comme $\sin\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n e^{\frac{5}{3}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\dfrac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right| = \dfrac{3}{4} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 5

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}}{1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)} = \frac{\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{3}{4}e^{-\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{5}{3}i\,\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)} = \frac{\frac{3}{8}i\sqrt{3}-\frac{15}{16}}{\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{15}{16}}{\frac{37}{16}} + i\,\frac{\frac{3}{8}\sqrt{3}}{\frac{37}{16}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n \sin\left(\dfrac{5}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \sin\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(\frac{5}{3}\,\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{3}}{\frac{37}{16}} = \frac{6}{37}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\operatorname{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = -\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{5}{3}i\,\pi}\right) + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{5}{3}\,\pi\right) = \frac{37}{16}$.

Corrigé 76. Comme $\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi + \frac{1}{3}\,\pi n\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)} = e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\dfrac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right| = \dfrac{3}{5} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 5

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)} = e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)^n = e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\times\frac{\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}}{1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\cdot\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{2}{3}i\,\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{1}{3}i\,\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}=\frac{-\frac{9}{50}i\sqrt{3}-\frac{21}{50}}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{-\frac{21}{50}}{\frac{19}{25}}+i\frac{-\frac{9}{50}\sqrt{3}}{\frac{19}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi n\right)}\right)=\frac{-\frac{9}{50}\sqrt{3}}{\frac{19}{25}}=-\frac{9}{38}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)+\frac{9}{25}=\frac{34}{25}-\frac{6}{5}\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{19}{25}$.

Corrigé 77. Comme $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{4}{5}\right)^n e^{-\frac{2}{3}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right|=\frac{4}{5}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 5

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)}=\frac{-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}}{1-\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)}=\frac{\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{2}{3}i\pi}=-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)}=\frac{\frac{2}{5}i\sqrt{3}-\frac{6}{25}}{\left|1-\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{-\frac{6}{25}}{\frac{21}{25}}+i\frac{\frac{2}{5}\sqrt{3}}{\frac{21}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{4}{5}\right)^n\cos\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n\cos\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)=\frac{-\frac{6}{25}}{\frac{21}{25}}=-\frac{2}{7}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)+\frac{16}{25}=\frac{41}{25}+\frac{8}{5}\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{21}{25}$.

Corrigé 78. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition ← page 5

en éléments simples du terme général. On a : $X^2 - 3\,X = X \cdot (X-3)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3{,}0\}, \quad \frac{1}{x^2 - 3\,x} = \frac{1}{(x-3)x} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x-3$, et prendre $x \to 3$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -\frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 5$:

$$\forall n \geqslant 5, \quad \frac{1}{n^2 - 3\,n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right).$$

Sommons cette relation de $n = 5$ jusqu'à un entier $N \geqslant 5$, et faisons un changement d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n^2 - 3\,n} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n-3} - \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n-3} - \sum_{n=8}^{N+3} \frac{1}{m-3}\right) && \textcolor{blue}{(\ m-3 = n \iff m = n+3\ )} \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n-3} - \sum_{n=8}^{N+3} \frac{1}{n-3}\right) && \textcolor{blue}{(m \text{ est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer } n)} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cancel{\sum_{n=8}^{N} \frac{1}{n-3}} - \cancel{\sum_{n=8}^{N} \frac{1}{n-3}} - \sum_{n=N+1}^{N+3} \frac{1}{n-3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{13}{12} - \left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} + \frac{1}{N}\right)\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \times \frac{13}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 5} \frac{1}{n^2 - 3\,n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 3\,n} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{3} \sum_{n=5}^{N} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right) = \frac{13}{36}.$$

Corrigé 79. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, -2\}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = -1$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{2}$, et : $c = \frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 3$: $\forall n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)n} = \dfrac{1}{2\,(n+2)} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2\,n}$. Sommons cette relation de $n = 3$ jusqu'à un entier $N \geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque

somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - 1\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - 1\underbrace{\sum_{m=4}^{N+1}\frac{1}{m}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+2}\frac{1}{m}}_{[m=n+2]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - 1\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n}\right) - 1\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)}_{=0}\sum_{n=5}^{N}\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{7}{12} - 1\times\frac{1}{4}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{1}{24} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n+2)(n+1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} = \frac{1}{24}.$$

Corrigé 80. Comme $\sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\left(\frac{3}{2}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{\frac{3}{2}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right| = \frac{5}{6} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 5

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi n\right)} = \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)} = \frac{1-\left(\frac{5}{6}e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{3}{2}i\pi} = -i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi n\right)} = \frac{-\frac{5}{6}i+1}{\left|1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{1}{\frac{61}{36}} + i\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{61}{36}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{5}{6}\right)^n \sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n \sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{61}{36}} = -\frac{30}{61}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{5}{6}e^{\frac{3}{2}i\,\pi}\right) + \frac{25}{36} = \frac{61}{36} - \frac{5}{3}\cos\left(\frac{3}{2}\,\pi\right) = \frac{61}{36}$.

Corrigé 81. Comme $\cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right| = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 5

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n = e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\times\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}}{1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{3}i\,\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{2}{3}i\,\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)} = \frac{\frac{3}{8}i\sqrt{3}+\frac{1}{8}}{\left|1-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{4}} + i\frac{\frac{3}{8}\sqrt{3}}{\frac{7}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{14}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1 - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\right) = \frac{7}{4}$.

Corrigé 82. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 5

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-5, 0, -1\}, \qquad \frac{1}{(x+5)(x+1)x} = \frac{a}{x+5} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

Multiplier cette égalité par $x + 5$, et prendre $x \to -5$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{20}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{5}$, et : $c = -\frac{1}{4}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 1$: $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\frac{1}{(n+5)(n+1)n} = \frac{1}{20\,(n+5)} - \frac{1}{4\,(n+1)} + \frac{1}{5\,n}$. Sommons cette relation de $n = 1$ jusqu'à un entier $N \geqslant 1$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général

dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+5)(n+1)n} &= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{20}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+5}\\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\underbrace{\sum_{m=2}^{N+1}\frac{1}{m}}_{[m=n+1]}+\frac{1}{20}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+5}\frac{1}{m}}_{[m=n+5]}\\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}+\frac{1}{20}\sum_{n=6}^{N+5}\frac{1}{n} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\
&= \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{20}\left(\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+5}+\frac{1}{N+4}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)}_{=0}\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}\times\frac{137}{60}-\frac{1}{4}\times\frac{77}{60}\right)+\underset{N\to+\infty}{o}(1)=\frac{163}{1200}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{163}{1200}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+5)(n+1)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+5)(n+1)n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+5)(n+1)n}=\frac{163}{1200}.$$

Corrigé 83. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2+3X=X\cdot(X+3)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 5

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0\},\qquad \frac{1}{x^2+3x}=\frac{1}{(x+3)x}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+3$, et prendre $x\to-3$, montre qu'on a : $a=-\frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 1$:

$$\forall n\geqslant 1,\qquad \frac{1}{n^2+3n}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right).$$

Sommons cette relation de $n=1$ jusqu'à un entier $N\geqslant 1$, et faisons un changement d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+3n}=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+3}\right)&=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=4}^{N+3}\frac{1}{m}\right) \quad (\ m=n+3\iff m=n+3\ )\\
&=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=4}^{N+3}\frac{1}{n}\right) \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\
&=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancel{\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}}-\cancel{\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}}-\sum_{n=N+1}^{N+3}\frac{1}{n}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\left(\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}\right)\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{3}\times\frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+3n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+3n}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{11}{18}.$$

Corrigé 84. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : ← page 6

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

Multiplier cette égalité par $x+2$, et prendre $x \to -2$, montre qu'on a : $a = \frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = -\frac{1}{2}$, et : $c = \frac{1}{6}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 3$: $\forall n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)} = \dfrac{1}{3\,(n+2)} - \dfrac{1}{2\,(n+1)} + \dfrac{1}{6\,(n-1)}$. Sommons cette relation de $n = 3$ jusqu'à un entier $N \geqslant 3$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)} &= \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+2} \frac{1}{m-1}}_{[m=n+2]} + \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+3} \frac{1}{m-1}}_{[m=n+3]} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+2} \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=6}^{N+3} \frac{1}{n-1} \qquad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{n=6}^{N} \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \sum_{n=6}^{N} \frac{1}{n-1} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=6}^{N} \frac{1}{n-1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\sum_{n=6}^{N} \frac{1}{n-1}}_{=0} + \left(\frac{1}{6} \times \frac{13}{12} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) + \underset{N \to +\infty}{o}(1) = \frac{1}{18} + \underset{N \to +\infty}{o}(1) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-1)} = \frac{1}{18}.$$

Corrigé 85. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. Le discriminant de $X^2 - X - 2$ est : $\Delta = 9 > 0$. On en déduit que les racines de $X^2 - X - 2$ sont $\frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$ et $\frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$. Donc : $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : ← page 6

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}2\}, \quad \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x \to -1$, montre qu'on a : $a = -\frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b = \frac{1}{3}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n \geqslant 3$:

$$\forall n \geqslant 3, \quad \frac{1}{n^2 - n - 2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Sommons cette relation de $n = 3$ jusqu'à un entier $N \geqslant 3$, et faisons un changement d'indice de sommation afin

d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^2-n-2} &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}-\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}-\sum_{n=6}^{N+3}\frac{1}{m-2}\right) \quad (\, m-2=n+1 \iff m=n+3\,)\\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}-\sum_{n=6}^{N+3}\frac{1}{n-2}\right) \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}\\ &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancel{\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2}}-\cancel{\sum_{n=6}^{N}\frac{1}{n-2}}-\sum_{n=N+1}^{N+3}\frac{1}{n-2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\times\frac{11}{6}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n^2-n-2}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n-2} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{11}{18}.$$

Corrigé 86. Comme $\sin\left(\frac{4}{3}\,\pi-\frac{5}{6}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(\frac{4}{3}\,\pi-\frac{5}{6}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{4}{3}\,\pi-\frac{5}{6}\,\pi n\right)} = e^{\frac{4}{3}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{5}{6}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{5}{6}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 6

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{4}{3}\,\pi-\frac{5}{6}\,\pi n\right)} = e^{\frac{4}{3}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)^n = e^{\frac{4}{3}i\,\pi}\times\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{4}{3}i\,\pi}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}e^{\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{4}{3}i\,\pi} = -\frac{1}{2}i\,\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{-\frac{5}{6}i\,\pi} = -\frac{1}{2}\,\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{4}{3}\,\pi-\frac{5}{6}\,\pi n\right)} = \frac{-\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}\right)\,\sqrt{3}+\frac{1}{4}i-\frac{1}{2}}{\left|1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{4}\,\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{5}{4}}+i\,\frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{5}{4}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(\frac{4}{3}\,\pi-\frac{5}{6}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(\frac{4}{3}\,\pi-\frac{5}{6}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{4}{3}\,\pi-\frac{5}{6}\,\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{5}{4}} = \frac{784\,\sqrt{3}-1349}{1480\,\sqrt{3}-2569}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2\pm 2\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{6}i\,\pi}\right)+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}+\cos\left(-\frac{5}{6}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,\sqrt{3}+\frac{5}{4}.$

Corrigé 87. Comme $\cos\left(\frac{1}{4}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{1}{4}\,\pi+\frac{5}{6}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes ← page 6

converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{5}{6}\pi n\right)}=e^{\frac{1}{4}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{5}{6}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{5}{6}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right|=\frac{3}{5}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{5}{6}\pi n\right)}=e^{\frac{1}{4}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)^n=e^{\frac{1}{4}i\pi}\times\frac{-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}}{1-\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)}=\frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}\cdot\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{6}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{1}{4}i\pi}=\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, et : $e^{\frac{5}{6}i\pi}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{5}{6}\pi n\right)}=\frac{\left(\frac{3}{20}i+\frac{3}{20}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}-\left(\frac{33}{100}i+\frac{3}{100}\right)\sqrt{2}}{\left|1-\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{3}{20}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{3}{100}\sqrt{2}}{-\frac{3}{5}\sqrt{3}+\frac{34}{25}}+i\frac{\frac{3}{20}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{33}{100}\sqrt{2}}{-\frac{3}{5}\sqrt{3}+\frac{34}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{5}{6}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{5}{6}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{5}{6}\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{3}{20}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{3}{100}\sqrt{2}}{-\frac{3}{5}\sqrt{3}+\frac{34}{25}}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)+\frac{9}{25}=\frac{34}{25}+\frac{6}{5}\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{3}{5}\sqrt{3}+\frac{34}{25}$.

Corrigé 88. Comme $\cos\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}=e^{-\frac{1}{2}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right|=\frac{3}{5}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 6

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}=e^{-\frac{1}{2}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)^n=e^{-\frac{1}{2}i\pi}\times\frac{\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}}{1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)}=\frac{e^{-\frac{1}{2}i\pi}\cdot\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{2}i\pi}=-i$, et : $e^{\frac{2}{3}i\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}=\frac{\frac{3}{10}\sqrt{3}+\frac{33}{50}i}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{3}{10}\sqrt{3}}{\frac{49}{25}}+i\frac{\frac{33}{50}}{\frac{49}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{3}{10}\sqrt{3}}{\frac{49}{25}}=\frac{15}{98}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)+\frac{9}{25}=\frac{34}{25}-\frac{6}{5}\cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)=\frac{49}{25}$.

Corrigé 89. Comme $\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\,\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right|=\frac{4}{5}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 6

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)}=\frac{\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}}{1-\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)}=\frac{\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{2}{3}i\,\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)}=\frac{\frac{2}{5}i\sqrt{3}-\frac{26}{25}}{\left|1-\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}=\frac{-\frac{26}{25}}{\frac{61}{25}}+i\frac{\frac{2}{5}\sqrt{3}}{\frac{61}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}\right)^n\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{2}{3}\,\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{2}{5}\sqrt{3}}{\frac{61}{25}}=\frac{10}{61}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}i\,\pi}\right)+\frac{16}{25}=\frac{41}{25}-\frac{8}{5}\cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)=\frac{61}{25}$.

Corrigé 90. Comme $\cos\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{-\frac{3}{4}i\,\pi n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right|=\frac{3}{5}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 6

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi n\right)}=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)}=\frac{1-\left(\frac{3}{5}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}\right)}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{3}{4}i\,\pi} = -\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi n\right)} = \frac{-\left(\frac{3}{10}i-\frac{3}{10}\right)\sqrt{2}+1}{\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{3}{10}\sqrt{2}+1}{\frac{3}{5}\sqrt{2}+\frac{34}{25}} + i\,\frac{-\frac{3}{10}\sqrt{2}}{\frac{3}{5}\sqrt{2}+\frac{34}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(-\frac{3}{4}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(-\frac{3}{4}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{3}{10}\sqrt{2}+1}{\frac{3}{5}\sqrt{2}+\frac{34}{25}} = \frac{5\left(5\sqrt{2}+3\right)}{2\left(17\sqrt{2}+15\right)}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{5}e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\right)+\frac{9}{25} = \frac{34}{25}-\frac{6}{5}\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{5}\sqrt{2}+\frac{34}{25}$.

Corrigé 91. Comme $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi n\right)} = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{\frac{1}{4}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. ← page 6

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{\frac{1}{4}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right| = \frac{3}{4} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi n\right)} = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)^n = e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\times\frac{-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}}{1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{3}{2}i\,\pi}\cdot\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{3}{2}i\,\pi} = i$, et : $e^{\frac{1}{4}i\,\pi} = \left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi n\right)} = \frac{-\left(\frac{3}{8}i-\frac{3}{8}\right)\sqrt{2}-\frac{9}{16}i}{\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{25}{16}} + i\,\frac{-\frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{9}{16}}{\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{25}{16}}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\cos\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\cos\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{25}{16}} = \frac{6\left(25\sqrt{2}+24\right)}{600\sqrt{2}+913}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}+\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{25}{16}$.

Corrigé 92. Comme $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)} = e^{\frac{3}{2}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{\frac{2}{3}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right| = \frac{5}{6} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)} = e^{\frac{3}{2}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)^n = e^{\frac{3}{2}i\pi}\times\frac{\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}}{1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{3}{2}i\pi}\cdot\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}e^{-\frac{2}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{3}{2}i\pi} = -i$, et : $e^{\frac{2}{3}i\pi} = \frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)} = \frac{\frac{5}{12}\sqrt{3}+\frac{10}{9}i}{\left|1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{5}{12}\sqrt{3}}{\frac{91}{36}} + i\frac{\frac{10}{9}}{\frac{91}{36}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{5}{6}\right)^n\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{5}{12}\sqrt{3}}{\frac{91}{36}} = \frac{15}{91}\sqrt{3}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z' = \frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)\right|^2 = 1-2\mathrm{Re}\left(\frac{5}{6}e^{\frac{2}{3}i\pi}\right)+\frac{25}{36} = \frac{61}{36}-\frac{5}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{91}{36}$.

← page 6

Corrigé 93. Comme $\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi n\right)} = e^{\frac{1}{4}i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{-\frac{1}{3}i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{-\frac{1}{3}i\pi n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right| = \frac{3}{5} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi n\right)} = e^{\frac{1}{4}i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)^n = e^{\frac{1}{4}i\pi}\times\frac{-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}}{1-\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}\cdot\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{3}{5}e^{\frac{1}{3}i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac{1}{4}i\pi} = \left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, et : $e^{-\frac{1}{3}i\pi} = -\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi n\right)} = \frac{\left(\frac{3}{20}i-\frac{3}{20}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}-\left(\frac{33}{100}i+\frac{33}{100}\right)\sqrt{2}}{\left|1-\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{3}{20}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{33}{100}\sqrt{2}}{\frac{49}{25}} + i\frac{\frac{3}{20}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{33}{100}\sqrt{2}}{\frac{49}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n e^{i\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{3}{20}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{33}{100}\sqrt{2}}{\frac{49}{25}}.$$

← page 6

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{5}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)+\frac{9}{25}=\frac{34}{25}+\frac{6}{5}\cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi\right)=\frac{49}{25}$.

Corrigé 94. Comme $\cos\left(-\frac{2}{3}\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{2}{3}\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi n\right)}=e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{-\frac{4}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{-\frac{4}{3}i\,\pi n}=\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right|=\frac{4}{5}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a : ← page 6

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi n\right)}=e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)^n=e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\times\frac{\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}}{1-\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)}=\frac{e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}\cdot\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{4}{5}e^{\frac{4}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{2}{3}i\,\pi}=-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, et : $e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi n\right)}=\frac{\frac{8}{25}i\sqrt{3}+\frac{28}{25}}{\left|1-\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac{28}{25}}{\frac{61}{25}}+i\frac{\frac{8}{25}\sqrt{3}}{\frac{61}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{5}\right)^n\cos\left(-\frac{2}{3}\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n\cos\left(-\frac{2}{3}\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{2}{3}\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi n\right)}\right)=\frac{\frac{28}{25}}{\frac{61}{25}}=\frac{28}{61}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{3}i\,\pi}\right)+\frac{16}{25}=\frac{41}{25}-\frac{8}{5}\cos\left(-\frac{4}{3}\,\pi\right)=\frac{61}{25}$.

Corrigé 95. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. On a : $X^2+X=X\cdot(X+1)$. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure donc l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : ← page 6

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1{,}0\},\quad \frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{(x+1)x}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x\to -1$, montre qu'on a : $a=-1$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=1$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 1$:

$$\forall n\geqslant 1,\quad \frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ est télescopique, et converge d'après le lien suite-série car $\displaystyle\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{n+1}=1.$$

Corrigé 96. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : ← page 6

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2,0\},\qquad \frac{1}{(x+1)(x-2)x}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x}.$$

Multiplier cette égalité par $x+1$, et prendre $x\to-1$, montre qu'on a : $a=\frac{1}{3}$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac{1}{6}$, et : $c=-\frac{1}{2}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant 4$: $\forall n\geqslant 4$, $\displaystyle\frac{1}{(n+1)(n-2)n}=\frac{1}{3\,(n+1)}+\frac{1}{6\,(n-2)}-\frac{1}{2\,n}$. Sommons cette relation de $n=4$ jusqu'à un entier $N\geqslant 4$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque somme. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}&=\frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-2}-\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-2}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=6}^{N+2}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+2]}+\frac{1}{3}\underbrace{\sum_{m=7}^{N+3}\frac{1}{m-2}}_{[m=n+3]}\\
&=\frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-2}-\frac{1}{2}\sum_{n=6}^{N+2}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{3}\sum_{n=7}^{N+3}\frac{1}{n-2}\qquad \textcolor{blue}{\text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)}}\\
&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\\
&=\underbrace{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{n-2}}_{=0}+\left(\frac{1}{6}\times\frac{13}{12}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)+\underset{N\to+\infty}{o}(1)=\frac{1}{18}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}$ converge, et qu'on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-2)n}=\frac{1}{18}.$$

Corrigé 97. Comme $\cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)}=e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. ← page 6
Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{\frac{1}{3}i\,\pi n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\displaystyle\left|-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right|=\frac{3}{4}<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)}=e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)^n=e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\times\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)}=\frac{e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\cdot\left(1-\left(-\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - \left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{1}{3}i\,\pi} = -\frac{1}{2}i\,\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, et : $e^{\frac{1}{3}i\,\pi} = \frac{1}{2}i\,\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)} = \frac{-\frac{7}{8}i\,\sqrt{3}+\frac{1}{8}}{\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{37}{16}} + i\frac{-\frac{7}{8}\,\sqrt{3}}{\frac{37}{16}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n e^{i\left(-\frac{1}{3}\,\pi+\frac{1}{3}\,\pi n\right)}\right) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{37}{16}} = \frac{2}{37}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = -\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}i\,\pi}\right) + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{3}\,\pi\right) = \frac{37}{16}$.

Corrigé 98. Comme $\sin\left(-\frac{3}{4}\,\pi + \frac{1}{4}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi+\frac{1}{4}\,\pi n\right)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi+\frac{1}{4}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{\frac{1}{4}i\,\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{\frac{1}{4}i\,\pi n} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right| = \frac{1}{5} < 1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 6

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi+\frac{1}{4}\,\pi n\right)} = e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)^n = e^{-\frac{3}{4}i\,\pi} \times \frac{1}{1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)} = \frac{e^{-\frac{3}{4}i\,\pi}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - \left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{-\frac{3}{4}i\,\pi} = -\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\,\sqrt{2}$, et : $e^{\frac{1}{4}i\,\pi} = \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\,\sqrt{2}$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi+\frac{1}{4}\,\pi n\right)} = \frac{-\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\,\sqrt{2}+\frac{1}{5}}{\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2} = \frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}+\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}\,\sqrt{2}+\frac{26}{25}} + i\frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}}{-\frac{1}{5}\,\sqrt{2}+\frac{26}{25}}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n \sin\left(-\frac{3}{4}\,\pi+\frac{1}{4}\,\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n \sin\left(-\frac{3}{4}\,\pi+\frac{1}{4}\,\pi n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n e^{i\left(-\frac{3}{4}\,\pi+\frac{1}{4}\,\pi n\right)}\right) = \frac{-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}}{-\frac{1}{5}\,\sqrt{2}+\frac{26}{25}} = \frac{25\left(5\,\sqrt{2}-26\right)}{2\left(363\,\sqrt{2}-260\right)}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) + |z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z = 1$ et $z' = \frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right)\right|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}i\,\pi}\right) + \frac{1}{25} = \frac{26}{25} - \frac{2}{5}\cos\left(\frac{1}{4}\,\pi\right) = -\frac{1}{5}\,\sqrt{2} + \frac{26}{25}$.

Corrigé 99. Comme $\cos\left(\frac14\pi+\frac13\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac14\pi+\frac13\pi n\right)}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'une série à valeurs complexes converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant1}\left(-\frac12\right)^n e^{i\left(\frac14\pi+\frac13\pi n\right)}=e^{\frac14 i\pi}\sum_{n\geqslant1}\left(-\frac12\right)^n e^{\frac13 i\pi n}$ converge et de calculer sa somme pour résoudre l'exercice. Or la série $\sum_{n\geqslant1}\left(-\frac12\right)^n e^{\frac13 i\pi n}=\sum_{n\geqslant1}\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)^n$ est géométrique, et sa raison vérifie : $\left|-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right|=\frac12<1$. On en déduit qu'elle converge, et on a :

← page 6

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac12\right)^n e^{i\left(\frac14\pi+\frac13\pi n\right)}=e^{\frac14 i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)^n=e^{\frac14 i\pi}\times\frac{-\frac12 e^{\frac13 i\pi}}{1-\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)}=\frac{e^{\frac14 i\pi}\cdot\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac12 e^{-\frac13 i\pi}\right)\right)}{\left|1-\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)\right|^2}.$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)$, afin de pouvoir mettre le nombre complexe obtenu sous forme algébrique. Il reste à écrire : $e^{\frac14 i\pi}=\left(\frac12 i+\frac12\right)\sqrt2$, et : $e^{\frac13 i\pi}=\frac12 i\sqrt3+\frac12$, puis à développer l'expression obtenue, pour en déduire la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac12\right)^n e^{i\left(\frac14\pi+\frac13\pi n\right)}=\frac{-\left(\frac18 i-\frac18\right)\sqrt3\sqrt2-\left(\frac14 i+\frac14\right)\sqrt2}{\left|1-\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)\right|^2}=\frac{\frac18\sqrt3\sqrt2-\frac14\sqrt2}{\frac74}+i\frac{-\frac18\sqrt3\sqrt2-\frac14\sqrt2}{\frac74}.$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant1}\left(-\frac12\right)^n\cos\left(\frac14\pi+\frac13\pi n\right)$ converge également, et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac12\right)^n\cos\left(\frac14\pi+\frac13\pi n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac12\right)^n e^{i\left(\frac14\pi+\frac13\pi n\right)}\right)=\frac{\frac18\sqrt3\sqrt2-\frac14\sqrt2}{\frac74}.$$

Remarque. Pour calculer $\left|1-\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)\right|^2$, il est ici utile de connaître « l'identité remarquable » suivante :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z\pm z'|^2=|z|^2\pm2\mathrm{Re}\left(\bar z z'\right)+|z'|^2,$$

que nous vous laissons vérifier. Cette identité montre tout son intérêt lorsque l'un des deux nombres z ou z' est un *réel* (on peut alors le sortir de $\mathrm{Re}\left(\bar z z'\right)$), tandis que l'autre est sous une *forme exponentielle* (pour que son calcul de module ou de partie réelle soit aisé). Appliquer cette formule avec $z=1$ et $z'=-\frac12 e^{\frac13 i\pi}$ donne ici : $\left|1-\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)\right|^2=1-2\mathrm{Re}\left(-\frac12 e^{\frac13 i\pi}\right)+\frac14=\frac54+\cos\left(\frac13\pi\right)=\frac74$.

Corrigé 100. La méthode est standard : nous parviendrons à calculer cette somme après avoir fait une décomposition en éléments simples du terme général. La théorie de la décomposition en éléments simples nous assure l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

← page 6

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-4\},\quad \frac{1}{(x+4)(x-1)x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+4}.$$

Multiplier cette égalité par x, et prendre $x\to0$, montre qu'on a : $a=-\frac14$. Par un moyen analogue, on trouve : $b=\frac15$, et : $c=\frac{1}{20}$. Donc l'égalité ci-dessus devient, en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives et en remplaçant x par $n\geqslant4$: $\forall n\geqslant4$, $\frac{1}{(n+4)(n-1)n}=\frac{1}{20\,(n+4)}+\frac{1}{5\,(n-1)}-\frac{1}{4\,n}$. Sommons cette relation de $n=4$ jusqu'à un entier $N\geqslant4$, et faisons des changements d'indice de sommation afin d'avoir le même terme général dans chaque

somme. On obtient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n+4)(n-1)n} &= \frac{1}{5}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{20}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n+4} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{m=5}^{N+1}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+1]} + \frac{1}{20}\underbrace{\sum_{m=9}^{N+5}\frac{1}{m-1}}_{[m=n+5]} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=5}^{N+1}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{20}\sum_{n=9}^{N+5}\frac{1}{n-1} \quad \text{(m est une variable muette et il ne coûte rien de la renommer n)} \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{20}\left(\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{N+4}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)}_{=0}\sum_{n=9}^{N}\frac{1}{n-1} + \left(\frac{1}{5}\times\frac{153}{140}-\frac{1}{4}\times\frac{319}{420}\right) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{241}{8400} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{241}{8400}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{(n+4)(n-1)n}$ converge, et qu'on a :

$$
\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)(n-1)n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n+4)(n-1)n} = \frac{241}{8400}.
$$