Nature d'une série de Bertrand

💡 Ces exercices vous font étudier la nature d'un cas particulier de série numérique. L'idée est à chaque fois de comparer à une série de Riemann suffisamment bien choisie pour permettre de conclure ; ou, quand cette façon de procéder échoue : penser à bon escient à une comparaison série-intégrale. Dans ces cas-là, il est important de comprendre pourquoi c'est pertinent et naturel d'y penser.

Commentaire général sur le corrigé de ces exercices. Je détaille à chaque fois ce qui motive mon choix particulier de α (où α est l'exposant d'une certaine série de Riemann), en prenant d'abord un α quelconque et en regardant ce qu'il doit vérifier pour que je puisse conclure. C'est pour que vous puissiez vous en inspirer, si le bon choix ne vous est pas naturel. Mais dans une rédaction d'examen ou de concours : prenez directement un choix de α qui convient, au lieu de raisonner dans un cadre général en premier lieu.

Exercice 1. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$. → page 8

Exercice 2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$. → page 8

Exercice 3. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)^5}$. → page 8

Exercice 4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}}\ln(n)^{11}}$. → page 8

Exercice 5. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}}$. → page 9

Exercice 6. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)^8}$. → page 9

Exercice 7. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)}$. → page 9

Exercice 8. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}\ln(n)^6}$. → page 9

Exercice 9. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{5}}}$. → page 10

Exercice 10. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)^5}$. → page 10

Exercice 11. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{10}}$. → page 10

Exercice 12. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{4}}}$. → page 10

Exercice 13. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)^2}$. → page 11

Exercice 14. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^4}$. → page 11

Exercice 15. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}\ln(n)^6}$. → page 11

Exercice 16. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{6}{5}}}$. → page 11

Exercice 17. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}\ln(n)^2}$. → page 12

Exercice 18. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^5}$. → page 12

Exercice 19. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^{391}}{n^{\frac{2}{3}}}$. → page 12

Exercice 20. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$. → page 12

Exercice 21. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2\ln(n)}$. → page 12

Exercice 22. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^{13}}$. → page 13

Exercice 23. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{2}}}$. → page 13

Exercice 24. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)^2}$. → page 13

Exercice 25. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{8}}\ln(n)^2}$. → page 13

Exercice 26. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}}\ln(n)^6}$. → page 14

Exercice 27. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{3}}}$. → page 14

Exercice 28. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{7}}}$. → page 14

Exercice 29. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$. → page 15

Exercice 30. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{1}{9}}}$. → page 15

Exercice 31. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}\ln(n)^4}$. → page 15

Exercice 32. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^{13}}{n^{\frac{1}{3}}}$. → page 15

Exercice 33. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^6}$. → page 15

Exercice 34. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{3}}}$. → page 16

Exercice 35. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^2}$. → page 16

Exercice 36. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}}$. → page 16

Exercice 37. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2\ln(n)}$. → page 16

Exercice 38. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{9}{8}}}$. → page 17

Exercice 39. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{5}}}$. → page 17

Exercice 40. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{8}}\ln(n)^3}$. → page 17

Exercice 41. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^3\ln(n)}$. → page 18

Exercice 42. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\ln(n)}$. → page 18

Exercice 43. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}\ln(n)}$. → page 18

Exercice 44. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n}$. → page 18

Exercice 45. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}}$. → page 19

Exercice 46. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^{45}}{\sqrt{n}}$. → page 19

Exercice 47. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^6}$. → page 19

Exercice 48. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}\ln(n)}$. → page 19

Exercice 49. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{2}{3}}}$. → page 19

Exercice 50. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{2}{7}}}$. → page 19

Exercice 51. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}}\ln(n)}$. → page 20

Exercice 52. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{2}{3}}}$. → page 20

Exercice 53. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{5}{4}}}$. → page 20

Exercice 54. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}}$. → page 21

Exercice 55. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$. → page 21

Exercice 56. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{9}{7}}\ln(n)}$. → page 21

Exercice 57. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)}$. → page 21

Exercice 58. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}}$. → page 21

Exercice 59. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}}$. → page 22

Exercice 60. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{3}}}$. → page 22

Exercice 61. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{4}{5}}}$. → page 22

Exercice 62. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{8}{9}}\ln(n)}$. → page 22

Exercice 63. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}}$. → page 23

Exercice 64. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^{274}}{n^{\frac{9}{2}}}$. → page 23

Exercice 65. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{9}{2}}\ln(n)^2}$. → page 23

Exercice 66. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{10}{7}}}$. → page 24

Exercice 67. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{7}{4}}}$. → page 24

Exercice 68. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$. → page 24

Exercice 69. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^4\ln(n)^2}$. → page 24

Exercice 70. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$. → page 25

Exercice 71. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{9}}}$. → page 25

Exercice 72. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{5}{7}}}$. → page 25

Exercice 73. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^5}$. → page 25

Exercice 74. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}\ln(n)}$. → page 26

Exercice 75. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{7}{9}}}$. → page 26

Exercice 76. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}\ln(n)^2}$. → page 26

Exercice 77. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{4}}}$. → page 26

Exercice 78. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{3}{7}}\ln(n)}$. → page 27

Exercice 79. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^5}{n^6}$. → page 27

Exercice 80. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}}$. → page 27

Exercice 81. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}\ln(n)}$. → page 28

Exercice 82. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{5}{8}}\ln(n)}$. → page 28

Exercice 83. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^6}{n^{\frac{3}{4}}}$. → page 28

Exercice 84. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\ln(n)}$. → page 28

Exercice 85. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}\ln(n)^{23}}$. → page 29

Exercice 86. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{1}{8}}\ln(n)}$. → page 29

Exercice 87. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^4}{n^{\frac{4}{5}}}$. → page 29

Exercice 88. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}\ln(n)^4}$. → page 29

Exercice 89. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}\ln(n)}$. → page 30

Exercice 90. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^2}{n^2}$. → page 30

Exercice 91. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{3}}}$. → page 30

Exercice 92. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^{16}}{\sqrt{n}}$. → page 31

Exercice 93. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)^{86}}$. → page 31

Exercice 94. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{8}}}$. → page 31

Exercice 95. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^{2}}$. → page 31

Exercice 96. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}} \ln(n)}$. → page 32

Exercice 97. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^{3}}{\sqrt{n}}$. → page 32

Exercice 98. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{3} \ln(n)^{4}}$. → page 32

Exercice 99. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^{3}}$. → page 32

Exercice 100. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{7}{10}} \ln(n)^{4}}$. → page 33

Corrigé 1. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 1

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^2} = n^{\alpha-2} \cdot \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - 2 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - 2 < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - 2 < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 2$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < 2$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{3}{2}$ (la moyenne de 1 et de 2). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ parce que $\frac{3}{2} < 2$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge également.

Corrigé 2. L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. Il est donc possible d'utiliser la méthode de comparaison entre une série et une intégrale. Soit n au voisinage de l'infini. Pour tout $x \in [n, n+1]$, on a: $\frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \frac{1}{x\ln(x)}$, et donc, en intégrant cette inégalité : ← page 1

$$\frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \geqslant 0.$$

Or la série télescopique $\sum_{n\geqslant 2} (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)))$ diverge, étant donné que : $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 3. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 1

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(n)^5} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(2)^5}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(n)^5}$ converge également.

Corrigé 4. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 1

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^{11}} = \frac{n^{\alpha - \frac{4}{5}}}{\ln(n)^{11}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{4}{5} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{4}{5} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{4}{5} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{4}{5}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^{11}} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^{11}} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{4}{5}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^{11}} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^{11}}$ diverge également.

Corrigé 5. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 1

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}} = n^{\alpha - \frac{7}{6}} \cdot \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{7}{6} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{7}{6} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{7}{6} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{7}{6}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{7}{6}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{13}{12}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{7}{6}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}\right)$ parce que $\frac{13}{12} < \frac{7}{6}$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$ est d'exposant $\frac{13}{12} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}}$ converge également.

Corrigé 6. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 1

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(n)^8} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(2)^8}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(n)^8}$ converge également.

Corrigé 7. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 1

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln(n)}$ converge également.

Corrigé 8. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 1

$$\frac{1}{n^{\frac{7}{2}} \ln(n)^6} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{7}{2}} \ln(2)^6}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$ est d'exposant $\frac{7}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}} \ln(n)^6}$ converge également.

Corrigé 9. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

← page 1

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{5}}} = n^{\alpha - \frac{7}{5}} \cdot \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{7}{5} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{7}{5} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{7}{5} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{7}{5}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{5}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{7}{5}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{6}{5}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{7}{5}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{5}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{6}{5}}}\right)$ parce que $\frac{6}{5} < \frac{7}{5}$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}}$ est d'exposant $\frac{6}{5} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{5}}}$ converge également.

Corrigé 10. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

← page 1

$$\frac{n^\alpha}{\ln(n)^5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha > 0$). Par conséquent, si $\alpha > 0$, alors pour tout n assez grand on a :

$$\frac{n^\alpha}{\ln(n)^5} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{\ln(n)^5} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{\ln(n)^5} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)^5}$ diverge également.

Corrigé 11. Nous pourrions utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n) \leqslant n-1 \leqslant n$, de sorte que :

← page 1

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(n)^2}{n^{10}} \leqslant \frac{n^2}{n^{10}} = \frac{1}{n^8}.$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^8}$ est d'exposant $8 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{10}}$ converge également.

Corrigé 12. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

← page 1

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{4}}} = n^{\alpha - \frac{7}{4}} \cdot \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{7}{4} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{7}{4} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{7}{4} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{7}{4}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{4}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{7}{4}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{11}{8}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{7}{4}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{4}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{11}{8}}}\right)$ parce que $\frac{11}{8} < \frac{7}{4}$, or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{11}{8}}}$ est d'exposant $\frac{11}{8} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{4}}}$ converge également.

Corrigé 13. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^2}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. Il est donc possible d'utiliser la méthode de comparaison entre une série et une intégrale. Soit n au voisinage de l'infini. Pour tout $x \in [n-1, n]$, on a: $\dfrac{1}{n\ln(n)^2} \leqslant \dfrac{1}{x\ln(x)^2}$, et donc, en intégrant cette inégalité : ← page 2

$$0 \leqslant \frac{1}{n\ln(n)^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x\ln(x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 2} \left(\dfrac{1}{\ln(n-1)} - \dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ converge, étant donné que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ converge également.

Corrigé 14. Nous pourrions utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n) \leqslant n - 1 \leqslant n$, de sorte que : ← page 2

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{\ln(n)^2}{n^4} \leqslant \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)^2}{n^4}$ converge également.

Corrigé 15. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 2

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}\ln(n)^6} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}\ln(2)^6}.$$

Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est d'exposant $\frac{5}{4} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}\ln(n)^6}$ converge également.

Corrigé 16. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 2

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{6}{5}}} = n^{\alpha-\frac{6}{5}} \cdot \ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{6}{5} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{6}{5} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{6}{5} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{6}{5}$, on a :

$$\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{6}{5}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{6}{5}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{11}{10}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{6}{5}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\ln(n)^2}{n^{\frac{6}{5}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{11}{10}}}\right)$ parce que $\frac{11}{10} < \frac{6}{5}$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{11}{10}}}$ est d'exposant $\frac{11}{10} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{6}{5}}}$ converge également.

Corrigé 17. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 2

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{4}} \ln(n)^2} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{5}{4}} \ln(2)^2}.$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est d'exposant $\frac{5}{4} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}} \ln(n)^2}$ converge également.

Corrigé 18. Nous pourrions utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n) \leqslant n - 1 \leqslant n$, de sorte que : ← page 2

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \frac{\ln(n)^3}{n^5} \leqslant \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^5}$ converge également.

Corrigé 19. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 2

$$\frac{\ln(n)^{391}}{n^{\frac{2}{3}}} \geqslant \frac{\ln(2)^{391}}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est d'exposant $\frac{2}{3} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^{391}}{n^{\frac{2}{3}}}$ diverge également.

Corrigé 20. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 2

$$\frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{\ln(2)}{n}.$$

Or la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge également.

Corrigé 21. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 2

$$\frac{1}{n^2 \ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^2 \ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ converge également.

Corrigé 22. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 2

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^{13}} = \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\ln(n)^{13}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{1}{2} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{1}{2} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{1}{2} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^{13}} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^{13}} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^{13}} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^{13}}$ diverge également.

Corrigé 23. Nous pourrions utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n) \leqslant n - 1 \leqslant n$, de sorte que : ← page 2

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{2}}} \leqslant \frac{n^2}{n^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ est d'exposant $\frac{5}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{2}}}$ converge également.

Corrigé 24. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 2

$$\frac{n^\alpha}{\ln(n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha > 0$). Par conséquent, si $\alpha > 0$, alors pour tout n assez grand on a :

$$\frac{n^\alpha}{\ln(n)^2} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{\ln(n)^2} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{\ln(n)^2} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)^2}$ diverge également.

Corrigé 25. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 2

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{8}}\ln(n)^2} = \frac{n^{\alpha-\frac{3}{8}}}{\ln(n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{3}{8} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{3}{8} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{3}{8} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{3}{8}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^2} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^2} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{3}{8}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^2} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^2}$ diverge également.

Corrigé 26. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 2

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^6} = \frac{n^{\alpha - \frac{4}{5}}}{\ln(n)^6} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{4}{5} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{4}{5} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{4}{5} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{4}{5}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^6} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^6} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{4}{5}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^6} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)^6}$ diverge également.

Corrigé 27. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 2

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{3}}} \geqslant \frac{\ln(2)}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ est d'exposant $\frac{1}{3} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{3}}}$ diverge également.

Corrigé 28. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 2

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{7}}} = n^{\alpha - \frac{8}{7}} \cdot \ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{8}{7} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{8}{7} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{8}{7} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{8}{7}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{7}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{8}{7}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{15}{14}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{8}{7}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{7}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{15}{14}}}\right)$ parce que $\frac{15}{14} < \frac{8}{7}$, or la série de Riemann

$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{15}{14}}}$ est d'exposant $\frac{15}{14}>1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{7}}}$ converge également.

Corrigé 29. Pour tout $n\geqslant 2$, on a : ← page 3

$$\frac{\ln(n)}{n}\geqslant\frac{\ln(2)}{n}.$$

Or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n}$ diverge également.

Corrigé 30. Pour tout $n\geqslant 2$, on a : ← page 3

$$\frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{1}{9}}}\geqslant\frac{\ln(2)^3}{n^{\frac{1}{9}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{1}{9}}}$ est d'exposant $\frac{1}{9}\leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{1}{9}}}$ diverge également.

Corrigé 31. Pour tout $n\geqslant 2$, on a $\ln(n)\geqslant\ln(2)$, donc : ← page 3

$$\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}\ln(n)^4}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}\ln(2)^4}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ est d'exposant $\frac{7}{6}>1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}\ln(n)^4}$ converge également.

Corrigé 32. Pour tout $n\geqslant 2$, on a : ← page 3

$$\frac{\ln(n)^{13}}{n^{\frac{1}{3}}}\geqslant\frac{\ln(2)^{13}}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ est d'exposant $\frac{1}{3}\leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^{13}}{n^{\frac{1}{3}}}$ diverge également.

Corrigé 33. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 3

$$n^\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^6}=\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\ln(n)^6}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha-\frac{1}{2}>0,\\ 0 & \text{si } \alpha-\frac{1}{2}\leqslant 0,\end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha-\frac{1}{2}>0$). Par conséquent, si $\alpha>\frac{1}{2}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^6}\geqslant 1,\ \text{donc : }\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^6}\geqslant\frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^6} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^6}$ diverge également.

Corrigé 34. Nous pourrions utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n) \leqslant n-1 \leqslant n$, de sorte que : ← page 3

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{3}}} \leqslant \frac{n}{n^{\frac{10}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}.$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}$ est d'exposant $\frac{7}{3} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{3}}}$ converge également.

Corrigé 35. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 3

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^2} = \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\ln(n)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{1}{2} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{1}{2} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{1}{2} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^2} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^2} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^2} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)^2}$ diverge également.

Corrigé 36. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 3

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}} = n^{\alpha-\frac{9}{8}} \cdot \ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{9}{8} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{9}{8} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{9}{8} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{9}{8}$, on a :

$$\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{9}{8}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{17}{16}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{9}{8}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{17}{16}}}\right)$ parce que $\frac{17}{16} < \frac{9}{8}$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{17}{16}}}$ est d'exposant $\frac{17}{16} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}}$ converge également.

Corrigé 37. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 3

$$\frac{1}{n^2 \ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^2 \ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ converge également.

Corrigé 38. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 3

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{9}{8}}} = n^{\alpha - \frac{9}{8}} \cdot \ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{9}{8} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{9}{8} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{9}{8} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{9}{8}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{9}{8}}} = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{9}{8}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{17}{16}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{9}{8}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{9}{8}}} = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{17}{16}}}\right)$ parce que $\frac{17}{16} < \frac{9}{8}$, or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{17}{16}}}$ est d'exposant $\frac{17}{16} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{9}{8}}}$ converge également.

Corrigé 39. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 3

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{5}}} = n^{\alpha - \frac{8}{5}} \cdot \ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{8}{5} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{8}{5} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{8}{5} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{8}{5}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{5}}} = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{8}{5}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{13}{10}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{8}{5}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{5}}} = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{13}{10}}}\right)$ parce que $\frac{13}{10} < \frac{8}{5}$, or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{13}{10}}}$ est d'exposant $\frac{13}{10} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{8}{5}}}$ converge également.

Corrigé 40. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 3

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^3} = \frac{n^{\alpha - \frac{3}{8}}}{\ln(n)^3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{3}{8} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{3}{8} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{3}{8} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{3}{8}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^3} \geqslant 1, \ \text{donc :} \ \frac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^3} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{3}{8}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^3} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{8}} \ln(n)^3}$ diverge également.

Corrigé 41. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 3

$$\frac{1}{n^3 \ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^3 \ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ est d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^3 \ln(n)}$ converge également.

Corrigé 42. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 3

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{3}} \ln(n)} = \frac{n^{\alpha - \frac{2}{3}}}{\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{2}{3} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{2}{3} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{2}{3} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{2}{3}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{3}} \ln(n)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{2}{3}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{2}{3}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}} \ln(n)} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}} \ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 43. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 3

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{4}} \ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{5}{4}} \ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est d'exposant $\frac{5}{4} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}} \ln(n)}$ converge également.

Corrigé 44. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 3

$$\frac{\ln(n)^3}{n} \geqslant \frac{\ln(2)^3}{n}.$$

Or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln(n)^3}{n}$ diverge également.

Corrigé 45. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 4

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \geqslant \frac{\ln(2)}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ est d'exposant $\frac{1}{4} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}}$ diverge également.

Corrigé 46. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 4

$$\frac{\ln(n)^{45}}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\ln(2)^{45}}{\sqrt{n}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^{45}}{\sqrt{n}}$ diverge également.

Corrigé 47. Nous pourrions utiliser la méthode « $n^{\alpha}u_n$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n) \leqslant n-1 \leqslant n$, de sorte que : ← page 4

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(n)}{n^6} \leqslant \frac{n}{n^6} = \frac{1}{n^5}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^5}$ est d'exposant $5 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^6}$ converge également.

Corrigé 48. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 4

$$\frac{1}{n^{\frac{9}{8}}\ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}\ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$ est d'exposant $\frac{9}{8} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}\ln(n)}$ converge également.

Corrigé 49. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 4

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{2}{3}}} \geqslant \frac{\ln(2)}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est d'exposant $\frac{2}{3} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{2}{3}}}$ diverge également.

Corrigé 50. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 4

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{2}{7}}} \geqslant \frac{\ln(2)}{n^{\frac{2}{7}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{2}{7}}}$ est d'exposant $\frac{2}{7} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{2}{7}}}$ diverge également.

Corrigé 51. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 4

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)} = \frac{n^{\alpha-\frac{4}{5}}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{4}{5} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{4}{5} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{4}{5} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{4}{5}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{4}{5}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}} \ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 52. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 4

$$\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{2}{3}}} \geqslant \frac{\ln(2)^2}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est d'exposant $\frac{2}{3} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{2}{3}}}$ diverge également.

Corrigé 53. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 4

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{5}{4}}} = n^{\alpha-\frac{5}{4}} \cdot \ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{5}{4} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{5}{4} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{5}{4} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{5}{4}$, on a :

$$\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{5}{4}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{5}{4}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{9}{8}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{5}{4}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{5}{4}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}\right)$ parce que $\frac{9}{8} < \frac{5}{4}$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$ est d'exposant $\frac{9}{8} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{5}{4}}}$ converge également.

Corrigé 54. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 4

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \geqslant \frac{\ln(2)}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ est d'exposant $\frac{1}{4} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}}$ diverge également.

Corrigé 55. L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$, en tant que produit d'applications décroissantes et *positives* sur cet intervalle. Il est donc possible d'utiliser la méthode de comparaison entre une série et une intégrale. Soit n au voisinage de l'infini. Pour tout $x \in [n, n+1]$, on a: $\frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \frac{1}{x\ln(x)}$, et donc, en intégrant cette inégalité : ← page 4

$$\frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \geqslant 0.$$

Or la série télescopique $\sum_{n\geqslant 2} (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)))$ diverge, étant donné que : $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 56. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 4

$$\frac{1}{n^{\frac{9}{7}}\ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{9}{7}}\ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{9}{7}}}$ est d'exposant $\frac{9}{7} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{9}{7}}\ln(n)}$ converge également.

Corrigé 57. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 4

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)}$ converge également.

Corrigé 58. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 4

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}} = n^{\alpha - \frac{7}{6}} \cdot \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{7}{6} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{7}{6} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{7}{6} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{7}{6}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{7}{6}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{13}{12}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{7}{6}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}\right)$ parce que $\frac{13}{12} < \frac{7}{6}$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$ est d'exposant $\frac{13}{12} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{7}{6}}}$ converge également.

Corrigé 59. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 4

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}} = n^{\alpha - \frac{10}{7}} \cdot \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{10}{7} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{10}{7} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{10}{7} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{10}{7}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{10}{7}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{17}{14}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{10}{7}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{17}{14}}}\right)$ parce que $\frac{17}{14} < \frac{10}{7}$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{17}{14}}}$ est d'exposant $\frac{17}{14} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}}$ converge également.

Corrigé 60. Nous pourrions utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ », mais nous pouvons tout simplement remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n) \leqslant n - 1 \leqslant n$, de sorte que : ← page 4

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{3}}} \leqslant \frac{n}{n^{\frac{10}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}$ est d'exposant $\frac{7}{3} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{3}}}$ converge également.

Corrigé 61. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 5

$$\frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{4}{5}}} \geqslant \frac{\ln(2)^3}{n^{\frac{4}{5}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}$ est d'exposant $\frac{4}{5} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{4}{5}}}$ diverge également.

Corrigé 62. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 5

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)} = \frac{n^{\alpha - \frac{8}{9}}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{8}{9} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{8}{9} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{8}{9} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{8}{9}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{8}{9}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 63. Utilisons la méthode « $n^{\alpha} u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 5

$$n^{\alpha} \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}} = n^{\alpha - \frac{10}{7}} \cdot \ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{10}{7} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{10}{7} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{10}{7} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{10}{7}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{10}{7}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{17}{14}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{10}{7}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{17}{14}}}\right)$ parce que $\frac{17}{14} < \frac{10}{7}$, or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{17}{14}}}$ est d'exposant $\frac{17}{14} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{7}}}$ converge également.

Corrigé 64. Utilisons la méthode « $n^{\alpha} u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 5

$$n^{\alpha} \cdot \frac{\ln(n)^{274}}{n^{\frac{9}{2}}} = n^{\alpha - \frac{9}{2}} \cdot \ln(n)^{274} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{9}{2} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{9}{2} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{9}{2} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{9}{2}$, on a :

$$\frac{\ln(n)^{274}}{n^{\frac{9}{2}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{9}{2}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{11}{4}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{9}{2}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)^{274}}{n^{\frac{9}{2}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{11}{4}}}\right)$ parce que $\frac{11}{4} < \frac{9}{2}$, or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{11}{4}}}$ est d'exposant $\frac{11}{4} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)^{274}}{n^{\frac{9}{2}}}$ converge également.

Corrigé 65. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 5

$$\frac{1}{n^{\frac{9}{2}} \ln(n)^2} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{9}{2}} \ln(2)^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}$ est d'exposant $\frac{9}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{9}{2}} \ln(n)^2}$ converge également.

Corrigé 66. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 5

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{10}{7}}} = n^{\alpha - \frac{10}{7}} \cdot \ln(n)^3 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{10}{7} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{10}{7} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{10}{7} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{10}{7}$, on a :

$$\frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{10}{7}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{10}{7}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{17}{14}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{10}{7}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{10}{7}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{17}{14}}}\right)$ parce que $\frac{17}{14} < \frac{10}{7}$, or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{17}{14}}}$ est d'exposant $\frac{17}{14} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^{\frac{10}{7}}}$ converge également.

Corrigé 67. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 5

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{7}{4}}} = n^{\alpha - \frac{7}{4}} \cdot \ln(n)^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{7}{4} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{7}{4} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{7}{4} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{7}{4}$, on a :

$$\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{7}{4}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{7}{4}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{11}{8}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{7}{4}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{7}{4}}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{11}{8}}}\right)$ parce que $\frac{11}{8} < \frac{7}{4}$, or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{11}{8}}}$ est d'exposant $\frac{11}{8} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{7}{4}}}$ converge également.

Corrigé 68. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 5

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\ln(2)}{\sqrt{n}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge également.

Corrigé 69. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 5

$$\frac{1}{n^4 \ln(n)^2} \leqslant \frac{1}{n^4 \ln(2)^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ est d'exposant $4 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^4 \ln(n)^2}$ converge également.

Corrigé 70. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 5

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} = \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{1}{2} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{1}{2} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{1}{2} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 71. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 5

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{9}}} = n^{\alpha-\frac{10}{9}} \cdot \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{10}{9} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{10}{9} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{10}{9} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{10}{9}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{9}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{10}{9}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{19}{18}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{10}{9}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{9}}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{19}{18}}}\right)$ parce que $\frac{19}{18} < \frac{10}{9}$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{19}{18}}}$ est d'exposant $\frac{19}{18} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{10}{9}}}$ converge également.

Corrigé 72. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 5

$$\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{5}{7}}} \geqslant \frac{\ln(2)^2}{n^{\frac{5}{7}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{7}}}$ est d'exposant $\frac{5}{7} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{5}{7}}}$ diverge également.

Corrigé 73. Nous pourrions utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ », mais nous pouvons tout simplement ← page 5

remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n) \leqslant n-1 \leqslant n$, de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(n)^3}{n^5} \leqslant \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)^3}{n^5}$ converge également.

Corrigé 74. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 5

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)} = \frac{n^{\alpha - \frac{2}{5}}}{\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{2}{5} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{2}{5} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{2}{5} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{2}{5}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{2}{5}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 75. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 5

$$\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{7}{9}}} \geqslant \frac{\ln(2)^2}{n^{\frac{7}{9}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{7}{9}}}$ est d'exposant $\frac{7}{9} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{7}{9}}}$ diverge également.

Corrigé 76. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 5

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{3}} \ln(n)^2} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} \ln(2)^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est d'exposant $\frac{5}{3} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} \ln(n)^2}$ converge également.

Corrigé 77. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 6

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \geqslant \frac{\ln(2)}{n^{\frac{3}{4}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ est d'exposant $\frac{3}{4} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{4}}}$ diverge également.

Corrigé 78. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{7}} \ln(n)} = \frac{n^{\alpha - \frac{3}{7}}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{3}{7} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{3}{7} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{3}{7} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{3}{7}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{7}} \ln(n)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{3}{7}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{3}{7}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{3}{7}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{7}} \ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 79. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)^5}{n^6} = n^{\alpha-6} \cdot \ln(n)^5 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - 6 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - 6 < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - 6 < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 6$, on a :

$$\frac{\ln(n)^5}{n^6} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < 6$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{7}{2}$ (la moyenne de 1 et de 6). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)^5}{n^6} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}\right)$ parce que $\frac{7}{2} < 6$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$ est d'exposant $\frac{7}{2} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^5}{n^6}$ converge également.

Corrigé 80. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}} = n^{\alpha - \frac{9}{8}} \cdot \ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{9}{8} \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{9}{8} < 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{9}{8} < 0$). Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \frac{9}{8}$, on a :

$$\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha < \frac{9}{8}$ et $\alpha > 1$, par exemple : $\alpha = \frac{17}{16}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{9}{8}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{17}{16}}}\right)$ parce que $\frac{17}{16} < \frac{9}{8}$, or la série de

Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{17}{16}}}$ est d'exposant $\frac{17}{16}>1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{9}{8}}}$ converge également.

Corrigé 81. Pour tout $n\geqslant 2$, on a $\ln(n)\geqslant\ln(2)$, donc : ← page 6

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}\ln(n)}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}\ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est d'exposant $\frac{5}{3}>1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}\ln(n)}$ converge également.

Corrigé 82. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha\cdot\frac{1}{n^{\frac{5}{8}}\ln(n)}=\frac{n^{\alpha-\frac{5}{8}}}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha-\frac{5}{8}>0,\\ 0 & \text{si } \alpha-\frac{5}{8}\leqslant 0,\end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha-\frac{5}{8}>0$). Par conséquent, si $\alpha>\frac{5}{8}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha\cdot\frac{1}{n^{\frac{5}{8}}\ln(n)}\geqslant 1,\ \text{donc}:\ \frac{1}{n^{\frac{5}{8}}\ln(n)}\geqslant\frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha\in\mathbb{R}$ de sorte que $\alpha>\frac{5}{8}$ et $\alpha\leqslant 1$, par exemple : $\alpha=1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{5}{8}}\ln(n)}\geqslant\frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{5}{8}}\ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 83. Pour tout $n\geqslant 2$, on a : ← page 6

$$\frac{\ln(n)^6}{n^{\frac{3}{4}}}\geqslant\frac{\ln(2)^6}{n^{\frac{3}{4}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ est d'exposant $\frac{3}{4}\leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^6}{n^{\frac{3}{4}}}$ diverge également.

Corrigé 84. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$\frac{n^\alpha}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha>0,\\ 0 & \text{si } \alpha\leqslant 0,\end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha>0$). Par conséquent, si $\alpha>0$, alors pour tout n assez grand on a :

$$\frac{n^\alpha}{\ln(n)}\geqslant 1,\ \text{donc}:\ \frac{1}{\ln(n)}\geqslant\frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{\ln(n)} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{\ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 85. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{4}} \ln(n)^{23}} = \frac{n^{\alpha - \frac{3}{4}}}{\ln(n)^{23}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{3}{4} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{3}{4} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{3}{4} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{3}{4}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{4}} \ln(n)^{23}} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{3}{4}} \ln(n)^{23}} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{3}{4}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}} \ln(n)^{23}} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}} \ln(n)^{23}}$ diverge également.

Corrigé 86. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{8}} \ln(n)} = \frac{n^{\alpha - \frac{1}{8}}}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{1}{8} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{1}{8} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{1}{8} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{1}{8}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{8}} \ln(n)} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{1}{8}} \ln(n)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{1}{8}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{8}} \ln(n)} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{8}} \ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 87. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 6

$$\frac{\ln(n)^4}{n^{\frac{4}{5}}} \geqslant \frac{\ln(2)^4}{n^{\frac{4}{5}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{5}}}$ est d'exposant $\frac{4}{5} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln(n)^4}{n^{\frac{4}{5}}}$ diverge également.

Corrigé 88. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 6

$$\frac{1}{n^{\frac{7}{6}} \ln(n)^4} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{7}{6}} \ln(2)^4}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ est d'exposant $\frac{7}{6}>1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}\ln(n)^4}$ converge également.

Corrigé 89. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha\cdot\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}\ln(n)}=\frac{n^{\alpha-\frac{7}{8}}}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha-\frac{7}{8}>0,\\ 0 & \text{si } \alpha-\frac{7}{8}\leqslant 0,\end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha-\frac{7}{8}>0$). Par conséquent, si $\alpha>\frac{7}{8}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha\cdot\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}\ln(n)}\geqslant 1,\ \text{donc : }\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}\ln(n)}\geqslant\frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha\in\mathbb{R}$ de sorte que $\alpha>\frac{7}{8}$ et $\alpha\leqslant 1$, par exemple : $\alpha=1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}\ln(n)}\geqslant\frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}\ln(n)}$ diverge également.

Corrigé 90. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha\cdot\frac{\ln(n)^2}{n^2}=n^{\alpha-2}\cdot\ln(n)^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha-2\geqslant 0,\\ 0 & \text{si } \alpha-2<0,\end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha-2<0$). Par conséquent, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha<2$, on a :

$$\frac{\ln(n)^2}{n^2}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha\in\mathbb{R}$ de sorte que $\alpha<2$ et $\alpha>1$, par exemple : $\alpha=\frac{3}{2}$ (la moyenne de 1 et de 2). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)^2}{n^2}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ parce que $\frac{3}{2}<2$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est d'exposant $\frac{3}{2}>1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^2}{n^2}$ converge également.

Corrigé 91. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 6

$$n^\alpha\cdot\frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{3}}}=n^{\alpha-\frac{5}{3}}\cdot\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha-\frac{5}{3}\geqslant 0,\\ 0 & \text{si } \alpha-\frac{5}{3}<0,\end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha-\frac{5}{3}<0$). Par conséquent, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha<\frac{5}{3}$, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{3}}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Choisissons $\alpha\in\mathbb{R}$ de sorte que $\alpha<\frac{5}{3}$ et $\alpha>1$, par exemple : $\alpha=\frac{4}{3}$ (la moyenne de 1 et de $\frac{5}{3}$). Alors d'après ce qui précède, on a : $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{3}}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)$ parce que $\frac{4}{3}<\frac{5}{3}$, or la série de Riemann

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ est d'exposant $\frac{4}{3} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{3}}}$ converge également.

Corrigé 92. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

← page 6

$$\frac{\ln(n)^{16}}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\ln(2)^{16}}{\sqrt{n}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^{16}}{\sqrt{n}}$ diverge également.

Corrigé 93. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

← page 7

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)^{86}} = \frac{n^{\alpha-\frac{8}{9}}}{\ln(n)^{86}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{8}{9} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{8}{9} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{8}{9} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{8}{9}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)^{86}} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)^{86}} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{8}{9}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)^{86}} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{8}{9}} \ln(n)^{86}}$ diverge également.

Corrigé 94. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

← page 7

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{8}}} \geqslant \frac{\ln(2)}{n^{\frac{5}{8}}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{8}}}$ est d'exposant $\frac{5}{8} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{8}}}$ diverge également.

Corrigé 95. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

← page 7

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^{2}} = \frac{n^{\alpha-\frac{2}{5}}}{\ln(n)^{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{2}{5} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{2}{5} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{2}{5} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{2}{5}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^{2}} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^{2}} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{2}{5}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^2} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^2}$ diverge également.

Corrigé 96. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 7

$$\frac{1}{n^{\frac{6}{5}} \ln(n)} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{6}{5}} \ln(2)}.$$

Or la série de Riemann $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{6}{5}}}$ est d'exposant $\frac{6}{5} > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{6}{5}} \ln(n)}$ converge également.

Corrigé 97. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : ← page 7

$$\frac{\ln(n)^3}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\ln(2)^3}{\sqrt{n}}.$$

Or la série de Riemann $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc elle diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln(n)^3}{\sqrt{n}}$ diverge également.

Corrigé 98. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc : ← page 7

$$\frac{1}{n^3 \ln(n)^4} \leqslant \frac{1}{n^3 \ln(2)^4}.$$

Or la série de Riemann $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ est d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^3 \ln(n)^4}$ converge également.

Corrigé 99. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 7

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^3} = \frac{n^{\alpha - \frac{2}{5}}}{\ln(n)^3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{2}{5} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{2}{5} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{2}{5} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{2}{5}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^3} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^3} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{2}{5}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^3} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{2}{5}} \ln(n)^3}$ diverge également.

Corrigé 100. Utilisons la méthode « $n^\alpha u_n$ » : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini : ← page 7

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{7}{10}} \ln(n)^4} = \frac{n^{\alpha - \frac{7}{10}}}{\ln(n)^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - \frac{7}{10} > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha - \frac{7}{10} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'après le théorème des croissances comparées (pour le cas $\alpha - \frac{7}{10} > 0$). Par conséquent, si $\alpha > \frac{7}{10}$, alors pour tout n assez grand on a :

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\frac{7}{10}} \ln(n)^4} \geqslant 1, \text{ donc : } \frac{1}{n^{\frac{7}{10}} \ln(n)^4} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha > \frac{7}{10}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Alors d'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{n^{\frac{7}{10}} \ln(n)^4} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n assez grand, or la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{7}{10}} \ln(n)^4}$ diverge également.