Séries entières génératrices d'une suite (guidé)

On peut parfois expliciter une suite en passant par sa série entière « génératrice ». Quelques exemples avec des suites vérifiant des relations de récurrence linéaires non triviales.

Exercice 1. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -3$, $v_0 = 1$, et : → page 55

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n - 2v_n - 4, \\ v_{n+1} &= 4u_n + 3v_n + 22. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3 \cdot 29^n, \quad |v_n| \leqslant 3 \cdot 29^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{cases} (3\,x+1)\,S_u(x) + 2xS_v(x) &= \frac{4\,x}{x-1} - 3, \\ -4xS_u(x) + (-3\,x+1)\,S_v(x) &= -\frac{22\,x}{x-1} + 1. \end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{3\,(13\,x^2 - 2\,x + 1)}{(x+1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{59\,x^2 + 12\,x + 1}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x+1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -12\,(-1)^n - 18\,n + 9, \quad v_n = 12\,(-1)^n + 36\,n - 11.$$

Exercice 2. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -3$, $v_0 = -1$, et : → page 56

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 58u_n - 16v_n + 1, \\ v_{n+1} &= 168u_n - 46v_n - 1. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3 \cdot 215^n, \quad |v_n| \leqslant 3 \cdot 215^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{cases} (-58\,x+1)\,S_u(x) + 16xS_v(x) &= -\frac{x}{x-1} - 3, \\ -168xS_u(x) + (46\,x+1)\,S_v(x) &= \frac{x}{x-1} - 1. \end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{184\,x^2 - 118\,x - 3}{(10\,x-1)(2\,x-1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{672\,x^2 - 446\,x - 1}{(10\,x-1)(2\,x-1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{10\,x-1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{2\,x-1} + \frac{f}{10\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -18 \cdot 10^n + 8 \cdot 2^n + 7, \quad v_n = -54 \cdot 10^n + 28 \cdot 2^n + 25.$$

Exercice 3. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -4$, $v_0 = -2$, et : → page 58

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n + 1, \\ v_{n+1} & = & -2u_n - v_n. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4 \cdot 4^n, \quad |v_n| \leqslant 4 \cdot 4^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-2\,x+1)\,S_u(x) - xS_v(x) & = & -\frac{x}{x-1} - 4, \\ 2xS_u(x) + (x+1)\,S_v(x) & = & -2. \end{array} \right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{7\,x^2 - x - 4}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{2\,(7\,x^2 - 7\,x + 1)}{(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = 2\,n - 11, \quad v_n = -2\,n + 12.$$

Exercice 4. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = -11$, et : → page 60

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 3u_{n+2} - 6u_{n+1} - 8u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X^2 - 6X - 8$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 11\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = \frac{2\,x^2 + 2\,x + 1}{(4\,x+1)(2\,x-1)(x+1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{4\,x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{5}{9} \cdot 2^n + \frac{1}{9}\,(-1)^n - \frac{5}{9}\,(-4)^n\,.$$

Exercice 5. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = -1$, et : → page 61
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 4u_n - 4v_n + 11, \\ v_{n+1} & = & 6u_n - 6v_n. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 19^n, \quad |v_n| \leqslant 19^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} (-4\,x+1)\, S_u(x) + 4xS_v(x) & = & -\frac{11\,x}{x-1} - 1, \\ -6xS_u(x) + (6\,x+1)\, S_v(x) & = & -1. \end{array} \right.$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{68\,x^2 + 10\,x - 1}{(2\,x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{68\,x^2 - x - 1}{(2\,x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{2\,x+1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{2\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \frac{22}{3}\,(-2)^n + \frac{77}{3}, \quad v_n = 11\,(-2)^n + 22.$$

Exercice 6. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -13$, $v_0 = 2$, et : → page 63

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & -3u_n + 2v_n + 1, \\ v_{n+1} & = & -4u_n + 3v_n - 1. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 13\cdot 8^n, \quad |v_n| \leqslant 13\cdot 8^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (3\,x+1)\,S_u(x) - 2xS_v(x) & = & -\frac{x}{x-1} - 13, \\ 4xS_u(x) + (-3\,x+1)\,S_v(x) & = & \frac{x}{x-1} + 2. \end{array} \right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{48\,x^2 - 57\,x + 13}{(x+1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{65\,x^2 - 55\,x - 2}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x+1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{59}{2}\,(-1)^n - 2\,n + \frac{33}{2}, \quad v_n = -\frac{59}{2}\,(-1)^n - 4\,n + \frac{63}{2}.$$

Exercice 7. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, et : → page 65

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 2(n+1)u_{n+1} + u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - X - \frac{1}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.

2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :

$$S'' - 2S' + S = 0.$$

4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -(x-2)e^x.$$

5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{n-2}{n!}.$$

Exercice 8. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, et : → page 66

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n - 3v_n - 1, \\ v_{n+1} &= 6u_n + 6v_n. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 12^n, \quad |v_n| \leqslant 12^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (3\,x+1)\,S_u(x) + 3xS_v(x) &= \frac{x}{x-1} + 1, \\ -6xS_u(x) + (-6\,x+1)\,S_v(x) &= -1. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{9\,x^2 - 5\,x + 1}{(3\,x-1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{9\,x^2 - 4\,x + 1}{(3\,x-1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{3\,x-1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{3\,x-1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \frac{1}{2}\cdot 3^n - \frac{5}{2}, \quad v_n = -3^n + 3.$$

Exercice 9. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -8$, $u_1 = -2$, et : → page 68

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 4(n+1)u_{n+1} - 12u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 2X - 6$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 8\,r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :
$$S'' + 4S' - 12S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -\frac{25}{4}\, e^{(2\,x)} - \frac{7}{4}\, e^{(-6\,x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{25 \cdot 2^n}{4\,n!} - \frac{7\,(-6)^n}{4\,n!}.$$

Exercice 10. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = -3$, et : → page 69

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 6u_n + 4v_n + 36, \\ v_{n+1} & = & -6u_n - 4v_n + 1. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3 \cdot 46^n, \quad |v_n| \leqslant 3 \cdot 46^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-6\,x + 1)\,S_u(x) - 4xS_v(x) & = & -\frac{36\,x}{x-1}, \\ 6xS_u(x) + (4\,x + 1)\,S_v(x) & = & -\frac{x}{x-1} - 3. \end{array} \right.$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{8\,(20\,x + 3)x}{(2\,x - 1)(x - 1)}, \quad S_v(x) = -\frac{240\,x^2 - 22\,x + 3}{(2\,x - 1)(x - 1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{2\,x - 1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x - 1} + \frac{f}{2\,x - 1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = 104 \cdot 2^n - 184, \quad v_n = -104 \cdot 2^n + 221.$$

Exercice 11. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = 19$, et : → page 71

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n + 2)(n + 1)u_{n+2} - 4(n + 1)u_{n+1} + 3u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 2X - \frac{3}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 19\,r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 4S' + 3S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = 10\, e^{(3\,x)} - 11\, e^{x}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{10 \cdot 3^n}{n!} - \frac{11}{n!}.$$

Exercice 12. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et : → page 72

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 78(n+1)u_{n+1} + 1121u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 39X - \frac{1121}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 78S' + 1121S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -\frac{17}{40}\, e^{(59\,x)} + \frac{57}{40}\, e^{(19\,x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{17 \cdot 59^n}{40\, n!} + \frac{57 \cdot 19^n}{40\, n!}.$$

Exercice 13. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -5$, $u_1 = -3$, $u_2 = -2$, et : → page 74

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 - X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 5\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = \frac{8\,x + 5}{(x+1)^2(x-1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{2}\,(-1)^n\,(n+1) - \frac{13}{4}\,(-1)^n - \frac{13}{4}.$$

Exercice 14. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = -5$, et : → page 75

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 3u_n - 4v_n + 3, \\ v_{n+1} & = & 2u_n - 3v_n - 1. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 5 \cdot 10^n, \quad |v_n| \leqslant 5 \cdot 10^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-3\,x+1)\,S_u(x) + 4xS_v(x) & = & -\frac{3\,x}{x-1}, \\ -2xS_u(x) + (3\,x+1)\,S_v(x) & = & \frac{x}{x-1} - 5. \end{array} \right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{(7\,x-23)x}{(x+1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{6\,x^2 - 19\,x + 5}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x+1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{15}{2}\,(-1)^n + 8\,n + \frac{15}{2}, \quad v_n = -\frac{15}{2}\,(-1)^n + 4\,n + \frac{5}{2}.$$

Exercice 15. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = -4$, et : → page 77

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -2u_n - 2v_n - 2, \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n + 1. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4 \cdot 6^n, \quad |v_n| \leqslant 4 \cdot 6^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (2\,x+1)\,S_u(x) + 2xS_v(x) & = & \frac{2\,x}{x-1} - 1, \\ -xS_u(x) + (-x+1)\,S_v(x) & = & -\frac{x}{x-1} - 4. \end{array} \right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{9\,x^2 - 8\,x + 1}{(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{9\,x^2 - 4\,x - 4}{(x+1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = -9\,(-1)^n - 1, \quad v_n = \frac{9}{2}\,(-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Exercice 16. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et : → page 79

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - (n+1)u_{n+1} - 2u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :

$$S'' - S' - 2S = 0.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{1}{3}\,e^{(2\,x)} + \frac{2}{3}\,e^{(-x)}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n}{3\,n!} + \frac{2\,(-1)^n}{3\,n!}.$$

Exercice 17. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = -2$, et : → page 80

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X^2 - 4$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = \frac{x+1}{(2\,x+1)(x-1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{2\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{3}\,(-2)^n - \frac{2}{3}.$$

Exercice 18. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, et : → page 82

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -u_n + v_n - 1, \\ v_{n+1} & = & -2u_n + 2v_n. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4^n, \quad |v_n| \leqslant 4^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x+1)\, S_u(x) - xS_v(x) & = & \frac{x}{x-1} + 1, \\ 2xS_u(x) + (-2\,x+1)\, S_v(x) & = & 1. \end{array} \right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{3\,x^2 - 3\,x + 1}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{3\,x^2 - 2\,x + 1}{(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = n - 2, \quad v_n = 2\,n - 2.$$

Exercice 19. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, et : → page 84

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -16u_n + 45v_n + 1, \\ v_{n+1} & = & -6u_n + 17v_n + 1. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 62^n, \quad |v_n| \leqslant 62^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\left\{\begin{array}{rcl} (16\,x+1)\,S_u(x) - 45xS_v(x) & = & -\frac{x}{x-1} + 1, \\ 6xS_u(x) + (-17\,x+1)\,S_v(x) & = & -\frac{x}{x-1} - 1. \end{array}\right.$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{90\,x^2 - 62\,x + 1}{(2\,x-1)(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{32\,x^2 - 20\,x - 1}{(2\,x-1)(x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2\,x-1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{2\,x-1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -10 \cdot 2^n + \frac{51}{2}\,(-1)^n - \frac{29}{2}, \quad v_n = -4 \cdot 2^n + \frac{17}{2}\,(-1)^n - \frac{11}{2}.$$

Exercice 20. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, et : → page 85
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 22(n+1)u_{n+1} - 135u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 11X - \frac{135}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' + 22S' - 135S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -\frac{1}{32}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{32}\,e^{(-27\,x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{5^n}{32\,n!} + \frac{(-27)^n}{32\,n!}.$$

Exercice 21. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -2$, $u_1 = 0$, et : → page 87
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 2(n+1)u_{n+1} + u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - X - \frac{1}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 2S' + S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = 2\,(x-1)e^x.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2\,(n-1)}{n!}.$$

Exercice 22. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -2$, $u_1 = 0$, $u_2 = -4$, et : → page 88
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 66 u_{n+2} - u_{n+1} - 66 u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 66X^2 - X - 66$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = \frac{2\,(x^2 + 66\,x + 1)}{(66\,x+1)(x+1)(x-1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{66\,x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{64}{65}\,(-1)^n - \frac{2}{4355}\,(-66)^n - \frac{68}{67}.$$

Exercice 23. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = -1$, et : → page 90
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n + 6v_n - 21, \\ v_{n+1} &= -3u_n + 5v_n. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 31^n, \quad |v_n| \leqslant 31^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (4\,x+1)\,S_u(x) - 6xS_v(x) & = & \frac{21\,x}{x-1}, \\ 3xS_u(x) + (-5\,x+1)\,S_v(x) & = & -1. \end{array}\right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{3\,(37\,x-9)x}{(2\,x-1)(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{67\,x^2 - 3\,x - 1}{(2\,x-1)(x+1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2\,x-1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{2\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 19 \cdot 2^n + 23\,(-1)^n - 42, \quad v_n = 19 \cdot 2^n + \frac{23}{2}\,(-1)^n - \frac{63}{2}.$$

Exercice 24. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, et : → page 91

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 5u_n - 2v_n + 1, \\ v_{n+1} & = & 4u_n - v_n - 1. \end{array}\right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 8^n, \quad |v_n| \leqslant 8^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-5\,x+1)\,S_u(x) + 2xS_v(x) & = & -\frac{x}{x-1}, \\ -4xS_u(x) + (x+1)\,S_v(x) & = & \frac{x}{x-1} + 1. \end{array}\right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{(5\,x-1)x}{(3\,x-1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{14\,x^2 - 7\,x + 1}{(3\,x-1)(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{3\,x-1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{3\,x-1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - 2\,n - \frac{1}{2}, \quad v_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - 4\,n + \frac{1}{2}.$$

Exercice 25. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = 11$, et : → page 93
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 23u_n - 12v_n + 1, \\ v_{n+1} &= 24u_n - 13v_n - 1. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 11 \cdot 38^n, \quad |v_n| \leqslant 11 \cdot 38^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (-23\,x+1)\,S_u(x) + 12xS_v(x) &= -\frac{x}{x-1} - 1, \\ -24xS_u(x) + (13\,x+1)\,S_v(x) &= \frac{x}{x-1} + 11. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{170\,x^2 - 143\,x - 1}{(11\,x-1)(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{324\,x^2 - 289\,x + 11}{(11\,x-1)(x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{11\,x-1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{11\,x-1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{127}{10} \cdot 11^n + 13\,(-1)^n - \frac{13}{10}, \quad v_n = -\frac{127}{10} \cdot 11^n + 26\,(-1)^n - \frac{23}{10}.$$

Exercice 26. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 11$, et : → page 95
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 4(n+1)u_{n+1} + 3u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 2X - \frac{3}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 11\,r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 4S' + 3S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{9}{2}\, e^{(3\,x)} - \frac{5}{2}\, e^{x}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{9 \cdot 3^n}{2\,n!} - \frac{5}{2\,n!}.$$

Exercice 27. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 0$, et : → page 96
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 3S' + 2S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -2\, e^{(2\,x)} + 4\, e^{x}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{2 \cdot 2^n}{n!} + \frac{4}{n!}.$$

Exercice 28. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 3$, $u_1 = 14$, et : → page 98
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 5(n+1)u_{n+1} + 6u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{5}{2}X - 3$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 14\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 5S' + 6S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = 8\, e^{(3\,x)} - 5\, e^{(2\,x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{8 \cdot 3^n}{n!} - \frac{5 \cdot 2^n}{n!}.$$

Exercice 29. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=-1$, $v_0=1$, et : → page 99

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} &=& u_n-4v_n-13,\\ v_{n+1} &=& 2u_n-5v_n+3.\end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant 18^n,\quad |v_n|\leqslant 18^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R=\min(1,R_u,R_v)>0$. Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$, on a :

$$\begin{cases} (-x+1)\,S_u(x)+4xS_v(x) &=& \frac{13\,x}{x-1}-1,\\ -2xS_u(x)+(5\,x+1)\,S_v(x) &=& -\frac{3\,x}{x-1}+1.\end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x\in]-R,R[$:

$$S_u(x)=\frac{(17\,x+1)(4\,x+1)}{(3\,x+1)(x+1)(x-1)},\quad S_v(x)=\frac{26\,x^2+x-1}{(3\,x+1)(x+1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f)\in\mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S_u(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{3\,x+1},\quad S_v(x)=\frac{d}{x-1}+\frac{e}{x+1}+\frac{f}{3\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=12\,(-1)^n-\frac{7}{4}\,(-3)^n-\frac{45}{4},\quad v_n=6\,(-1)^n-\frac{7}{4}\,(-3)^n-\frac{13}{4}.$$

Exercice 30. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=1$, $v_0=0$, et : → page 101

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} &=& 4u_n+5v_n+3,\\ v_{n+1} &=& -4u_n-5v_n+2.\end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant 12^n,\quad |v_n|\leqslant 12^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R=\min(1,R_u,R_v)>0$. Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$, on a :

$$\begin{cases} (-4\,x+1)\,S_u(x)-5xS_v(x) &=& -\frac{3\,x}{x-1}+1,\\ 4xS_u(x)+(5\,x+1)\,S_v(x) &=& -\frac{2\,x}{x-1}.\end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{20\,x^2 + 7\,x + 1}{(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{2\,(8\,x+1)x}{(x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = 7\,(-1)^n + 14, \quad v_n = -7\,(-1)^n - 9.$$

Exercice 31. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 12$, $v_0 = -4$, et : → page 102
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -38u_n - 18v_n + 5, \\ v_{n+1} &= 36u_n + 16v_n + 1. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 12 \cdot 61^n, \quad |v_n| \leqslant 12 \cdot 61^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (38\,x+1)\,S_u(x) + 18xS_v(x) &= -\frac{5\,x}{x-1} + 12, \\ -36xS_u(x) + (-16\,x+1)\,S_v(x) &= -\frac{x}{x-1} - 4. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{22\,x^2 - 127\,x + 12}{(20\,x+1)(2\,x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{62\,x^2 - 285\,x + 4}{(20\,x+1)(2\,x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{2\,x+1} + \frac{c}{20\,x+1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{2\,x+1} + \frac{f}{20\,x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -6\,(-2)^n + \frac{409}{21}\,(-20)^n - \frac{31}{21}, \quad v_n = 12\,(-2)^n - \frac{409}{21}\,(-20)^n + \frac{73}{21}.$$

Exercice 32. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = 2$, et : → page 104
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -2u_n + 3v_n + 13, \\ v_{n+1} &= -6u_n + 7v_n + 1. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2 \cdot 18^n, \quad |v_n| \leqslant 2 \cdot 18^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (2\,x+1)\,S_u(x) - 3xS_v(x) & = & -\frac{13\,x}{x-1} - 1, \\ 6xS_u(x) + (-7\,x+1)\,S_v(x) & = & -\frac{x}{x-1} + 2. \end{array}\right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{101\,x^2 - 27\,x + 1}{(4\,x-1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{86\,x^2 - 9\,x - 2}{(4\,x-1)(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{4\,x-1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{4\,x-1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -4^n + 25\,n, \quad v_n = -2 \cdot 4^n + 25\,n + 4.$$

Exercice 33. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = -2$, et : → page 106

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -78u_n + 11v_n, \\ v_{n+1} & = & -462u_n + 65v_n + 2. \end{array}\right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2 \cdot 529^n, \quad |v_n| \leqslant 2 \cdot 529^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (78\,x+1)\,S_u(x) - 11xS_v(x) & = & -1, \\ 462xS_u(x) + (-65\,x+1)\,S_v(x) & = & -\frac{2\,x}{x-1} - 2. \end{array}\right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{21\,x^2 - 44\,x + 1}{(12\,x+1)(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{2\,(75\,x^2 - 155\,x + 1)}{(12\,x+1)(x+1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f)\in\mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S_u(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{12\,x+1},\quad S_v(x)=\frac{d}{x-1}+\frac{e}{x+1}+\frac{f}{12\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=3\,(-1)^n-\frac{63}{13}\,(-12)^n+\frac{11}{13},\quad v_n=21\,(-1)^n-\frac{378}{13}\,(-12)^n+\frac{79}{13}.$$

Exercice 34. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=-4$, $v_0=-3$, et : → page 108

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n+3v_n+5,\\ v_{n+1} &= -2u_n+2v_n-5.\end{cases}\qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_nx^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}v_nx^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant 4\cdot 11^n,\quad |v_n|\leqslant 4\cdot 11^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R=\min(1,R_u,R_v)>0$. Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$, on a :

$$\begin{cases} (3\,x+1)\,S_u(x)-3xS_v(x) &= -\frac{5\,x}{x-1}-4,\\ 2xS_u(x)+(-2\,x+1)\,S_v(x) &= \frac{5\,x}{x-1}-3.\end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x\in]-R,R[$:

$$S_u(x)=\frac{4\,(6\,x^2-2\,x+1)}{(x+1)(x-1)},\quad S_v(x)=\frac{3\,(8\,x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f)\in\mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S_u(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1},\quad S_v(x)=d+\frac{e}{x-1}+\frac{f}{x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad u_n=-18\,(-1)^n-10,\quad v_n=-12\,(-1)^n-15.$$

Exercice 35. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=-1$, $u_1=1$, et : → page 109

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+2)(n+1)u_{n+2}+2(n+1)u_{n+1}+u_n=0.\qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2-X-\frac{1}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1,+\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_nx^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :
$$S'' + 2S' + S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -e^{(-x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Exercice 36. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = -1$, et : → page 111

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -30u_n - 31v_n + 8, \\ v_{n+1} &= 62u_n + 63v_n + 1. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 126^n, \quad |v_n| \leqslant 126^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (30\,x+1)\,S_u(x) + 31xS_v(x) &= -\frac{8\,x}{x-1} - 1, \\ -62xS_u(x) + (-63\,x+1)\,S_v(x) &= -\frac{x}{x-1} - 1. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{629\,x^2 - 103\,x + 1}{(32\,x-1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{618\,x^2 - 90\,x - 1}{(32\,x-1)(x-1)^2}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{32\,x-1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{32\,x-1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{53}{31} \cdot 32^n + 17\,n - \frac{84}{31}, \quad v_n = -\frac{106}{31} \cdot 32^n - 17\,n + \frac{75}{31}.$$

Exercice 37. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 4$, $u_1 = 0$, $u_2 = -9$, et : → page 113

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 23u_{n+2} + 79u_{n+1} + 57u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 23X^2 - 79X - 57$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 9\,r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = \frac{307\,x^2 + 92\,x + 4}{(19\,x+1)(3\,x+1)(x+1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{3\,x+1} + \frac{c}{19\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{73}{12}\,(-1)^n - \frac{67}{32}\,(-3)^n + \frac{1}{96}\,(-19)^n\,.$$

Exercice 38. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = -4$, $u_2 = -5$, et : → page 114

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 14u_{n+2} + 39u_{n+1} + 54u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 14X^2 - 39X - 54$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 5\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = \frac{90\,x^2 - 18\,x + 1}{(9\,x-1)(6\,x-1)(x+1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{6\,x-1} + \frac{c}{9\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{10} \cdot 9^n - \frac{6}{7} \cdot 6^n + \frac{109}{70}\,(-1)^n\,.$$

Exercice 39. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 5$, et : → page 115

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 32u_{n+2} + 29u_{n+1} + 62u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 32X^2 - 29X - 62$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.

2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 5\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = \frac{8\,x^2 + 31\,x - 1}{(31\,x - 1)(2\,x - 1)(x + 1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{31\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{116} \cdot 31^n - \frac{22}{29} \cdot 2^n - \frac{1}{4}\,(-1)^n\,.$$

Exercice 40. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = -6$, et : → page 117

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 6\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :

$$S'' - 3S' + 2S = 0.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -6\, e^{(2\,x)} + 6\, e^x.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{6 \cdot 2^n}{n!} + \frac{6}{n!}.$$

Exercice 41. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $v_0 = -4$, et : → page 118

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -3u_n + 3v_n + 3, \\ v_{n+1} & = & -6u_n + 6v_n - 4. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4 \cdot 16^n, \quad |v_n| \leqslant 4 \cdot 16^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{cases} (3\,x+1)\,S_u(x) - 3xS_v(x) &= -\frac{3\,x}{x-1} + 2, \\ 6xS_u(x) + (-6\,x+1)\,S_v(x) &= \frac{4\,x}{x-1} - 4. \end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{6\,x^2 + 23\,x - 2}{(3\,x-1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{2\,(3\,x^2 + 12\,x + 2)}{(3\,x-1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{3\,x-1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{3\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = -\frac{19}{2} \cdot 3^n + \frac{27}{2}, \quad v_n = -19 \cdot 3^n + 17.$$

Exercice 42. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 0$, et : → page 120

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 4X^2 - 5X - 2$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{(3\,x-1)(x+1)}{(2\,x-1)(x-1)^2}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{2\,x-1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \cdot 2^n - 4\,n - 4.$$

Exercice 43. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -10$, $u_1 = -1$, et : → page 122

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 12(n+1)u_{n+1} + 11u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 6X - \frac{11}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 10\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 12S' + 11S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{9}{10}\, e^{(11\, x)} - \frac{109}{10}\, e^x.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{9 \cdot 11^n}{10\, n!} - \frac{109}{10\, n!}.$$

Exercice 44. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -2$, $v_0 = 6$, et : → page 123

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - 2v_n - 3, \\ v_{n+1} &= u_n - 2v_n - 1. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 6 \cdot 6^n, \quad |v_n| \leqslant 6 \cdot 6^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (-x+1)\, S_u(x) + 2xS_v(x) &= \frac{3\,x}{x-1} - 2, \\ -xS_u(x) + (2\,x+1)\, S_v(x) &= \frac{x}{x-1} + 6. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{12\,x^2 - 17\,x - 2}{(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{3\,(2\,x-1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \frac{27}{2}\,(-1)^n - \frac{7}{2}, \quad v_n = \frac{27}{2}\,(-1)^n - \frac{3}{2}.$$

Exercice 45. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 3$, $u_1 = -1$, et : → page 125

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 2(n+1)u_{n+1} + u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - X - \frac{1}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' + 2S' + S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = (2\,x + 3)e^{(-x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{(-1)^n\,(2\,n - 3)}{n!}.$$

Exercice 46. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -12$, $v_0 = -22$, et : → page 126
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 8u_n - 3v_n + 1, \\ v_{n+1} &= 6u_n - v_n. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 22 \cdot 12^n, \quad |v_n| \leqslant 22 \cdot 12^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (-8\,x + 1)\,S_u(x) + 3xS_v(x) &= -\frac{x}{x-1} - 12, \\ -6xS_u(x) + (x+1)\,S_v(x) &= -22. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{53\,x^2 - 67\,x + 12}{(5\,x-1)(2\,x-1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{2\,(49\,x^2 - 63\,x + 11)}{(5\,x-1)(2\,x-1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{5\,x-1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{2\,x-1} + \frac{f}{5\,x-1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{3}{2} \cdot 5^n - 11 \cdot 2^n + \frac{1}{2}, \quad v_n = -\frac{3}{2} \cdot 5^n - 22 \cdot 2^n + \frac{3}{2}.$$

Exercice 47. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = -12$, $u_2 = -4$, et : → page 128
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X^2 - X - 3$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 12\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = \frac{4\,(8\,x-3)x}{(3\,x-1)(x+1)(x-1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{3\,x-1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{11}{2}\,(-1)^n - 5.$$

Exercice 48. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, et : → page 129

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &=& 3u_n - v_n - 1, \\ v_{n+1} &=& 2u_n. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 5^n, \quad |v_n| \leqslant 5^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (-3\,x+1)\,S_u(x) + xS_v(x) &=& \frac{x}{x-1}, \\ -2xS_u(x) + (1)\,S_v(x) &=& 1. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{(x-2)x}{(2\,x-1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{x^2 - 4\,x + 1}{(2\,x-1)(x-1)^2}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{2\,x-1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{2\,x-1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3 \cdot 2^n + n + 3, \quad v_n = -3 \cdot 2^n + 2\,n + 4.$$

Exercice 49. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $v_0 = -2$, et : → page 131

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & -3u_n - 2v_n - 2, \\ v_{n+1} & = & 4u_n + 3v_n - 2. \end{array} \right. \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2 \cdot 9^n, \quad |v_n| \leqslant 2 \cdot 9^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} (3\,x+1)\,S_u(x) + 2xS_v(x) & = & \frac{2\,x}{x-1} + 2, \\ -4xS_u(x) + (-3\,x+1)\,S_v(x) & = & \frac{2\,x}{x-1} - 2. \end{array} \right.$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{2\,(6\,x^2 - 3\,x + 1)}{(x+1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{2\,(8\,x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)^2}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x+1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5\,(-1)^n + 4\,n - 3, \quad v_n = -5\,(-1)^n - 8\,n + 3.$$

Exercice 50. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = -2$, et : → page 133

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 79u_n - 234v_n + 2, \\ v_{n+1} & = & 39u_n - 116v_n - 1. \end{array} \right. \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2 \cdot 315^n, \quad |v_n| \leqslant 2 \cdot 315^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} (-79\,x+1)\,S_u(x) + 234xS_v(x) & = & -\frac{2\,x}{x-1} + 1, \\ -39xS_u(x) + (116\,x+1)\,S_v(x) & = & \frac{x}{x-1} - 2. \end{array} \right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$S_u(x) = -\frac{118\,x^2 - 585\,x - 1}{(38\,x+1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{2\,(20\,x^2 - 99\,x + 1)}{(38\,x+1)(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{38\,x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{38\,x+1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{536}{39}\,(-38)^n + 12\,n + \frac{575}{39}, \quad v_n = -\frac{268}{39}\,(-38)^n + 4\,n + \frac{190}{39}.$$

Exercice 51. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -4$, $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, et : → page 134

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+2} - 5u_{n+1} - 6u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 2X^2 - 5X - 6$ admet au moins une racine r dans $[1,+\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{19\,x^2 - 8\,x - 4}{(3\,x+1)(2\,x-1)(x+1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{3\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{13}{15}\cdot 2^n - \frac{23}{6}\,(-1)^n + \frac{7}{10}\,(-3)^n.$$

Exercice 52. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, et : → page 136

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 6u_n + 4v_n - 5, \\ v_{n+1} &= -2u_n - 2. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 15^n, \quad |v_n| \leqslant 15^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (-6\,x+1)\,S_u(x) - 4xS_v(x) &= \frac{5\,x}{x-1}, \\ 2xS_u(x) + (1)\,S_v(x) &= \frac{2\,x}{x-1}. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{(8\,x+5)x}{(4\,x-1)(2\,x-1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{2\,(11\,x-1)x}{(4\,x-1)(2\,x-1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{4\,x-1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{2\,x-1} + \frac{f}{4\,x-1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{14}{3}\cdot 4^n + 9\cdot 2^n - \frac{13}{3}, \quad v_n = \frac{7}{3}\cdot 4^n - 9\cdot 2^n + \frac{20}{3}.$$

Exercice 53. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, et : → page 137
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 50(n+1)u_{n+1} - 336u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 25X - 168$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 50S' - 336S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{5}{62}\,e^{(56\,x)} + \frac{57}{62}\,e^{(-6\,x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5\cdot 56^n}{62\,n!} + \frac{57\,(-6)^n}{62\,n!}.$$

Exercice 54. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 8$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, et : → page 139
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 - 4X - 4$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 8\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = \frac{8\,(4\,x^2 - x - 1)}{(2\,x+1)(2\,x-1)(x+1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{2\,x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n + \frac{32}{3}\,(-1)^n - 4\,(-2)^n\,.$$

Exercice 55. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 6$, $u_2 = 1$, et : → page 140
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 3u_{n+2} - 25u_{n+1} + 21u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X^2 - 25X - 21$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 6\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = -\frac{31\,x^2 - 12\,x - 2}{(7\,x+1)(3\,x-1)(x-1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{3\,x-1} + \frac{c}{7\,x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{23}{20} \cdot 3^n - \frac{17}{80}\,(-7)^n + \frac{17}{16}.$$

Exercice 56. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 4$, et : → page 142

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' + 3S' + 2S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = 4\, e^{(-x)} - 4\, e^{(-2\,x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4\,(-1)^n}{n!} - \frac{4\,(-2)^n}{n!}.$$

Exercice 57. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, et : → page 143

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -5u_n - 12v_n - 1, \\ v_{n+1} &= 6u_n + 13v_n + 1. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2 \cdot 20^n, \quad |v_n| \leqslant 2 \cdot 20^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (5\,x+1)\,S_u(x) + 12xS_v(x) &= \frac{x}{x-1} + 2, \\ -6xS_u(x) + (-13\,x+1)\,S_v(x) &= -\frac{x}{x-1} + 1. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{39\,x - 2}{(7\,x-1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{18\,x+1}{(7\,x-1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{7\,x-1}, \quad S_v(x) = \frac{c}{x-1} + \frac{d}{7\,x-1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{25}{6} \cdot 7^n + \frac{37}{6}, \quad v_n = \frac{25}{6} \cdot 7^n - \frac{19}{6}.$$

Exercice 58. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = -1$, et : → page 145

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 5u_{n+2} + 7u_{n+1} - 3u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 5X^2 - 7X - 3$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{(4\,x-1)x}{(3\,x-1)(x-1)^2}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{3\,x-1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4} \cdot 3^n - \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}.$$

Exercice 59. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, et : → page 146

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 2(n+1)u_{n+1} - 3u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - X - \frac{3}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :

$$S'' + 2S' - 3S = 0.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -\frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)} - \frac{1}{2}\,e^{x}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{(-3)^n}{2\,n!} - \frac{1}{2\,n!}.$$

Exercice 60. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = -1$, et : → page 148

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - v_n + 10, \\ v_{n+1} &= 2u_n - 2v_n + 9. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant 13^n,\quad |v_n|\leqslant 13^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R=\min(1,R_u,R_v)>0$. Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$, on a :
$$\begin{cases} (-x+1)\,S_u(x)+xS_v(x) &= -\frac{10\,x}{x-1},\\ -2xS_u(x)+(2\,x+1)\,S_v(x) &= -\frac{9\,x}{x-1}-1.\end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x\in]-R,R[$:
$$S_u(x)=-\frac{(10\,x+11)x}{(x+1)(x-1)},\quad S_v(x)=-\frac{10\,x^2+11\,x-1}{(x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f)\in\mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x\in]-R,R[,\quad S_u(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1},\quad S_v(x)=d+\frac{e}{x-1}+\frac{f}{x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad u_n=-\frac{1}{2}\,(-1)^n+\frac{21}{2},\quad v_n=-\,(-1)^n+10.$$

Exercice 61. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=-1$, $u_1=0$, et : → page 150

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+2)(n+1)u_{n+2}+13(n+1)u_{n+1}-264u_n=0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2-\frac{13}{2}X-132$ admet au moins une racine r dans $[1,+\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S''+13S'-264S=0.$$
4. En déduire :
$$\forall x\in]-R,R[,\quad S(x)=-\frac{24}{35}\,e^{(11\,x)}-\frac{11}{35}\,e^{(-24\,x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=-\frac{24\cdot 11^n}{35\,n!}-\frac{11\,(-24)^n}{35\,n!}.$$

Exercice 62. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=9$, $v_0=-1$, et : → page 151

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} &= -79u_n+80v_n+1,\\ v_{n+1} &= -40u_n+41v_n-2.\end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant 9\cdot 160^n,\quad |v_n|\leqslant 9\cdot 160^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R=\min(1,R_u,R_v)>0$. Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$, on a :
$$\left\{\begin{array}{lcl}(79\,x+1)\,S_u(x)-80xS_v(x) & = & -\frac{x}{x-1}+9,\\ 40xS_u(x)+(-41\,x+1)\,S_v(x) & = & \frac{2\,x}{x-1}-1.\end{array}\right.$$
3. En déduire, pour tout $x\in]-R,R[$:
$$S_u(x)=\frac{248\,x^2-457\,x+9}{(39\,x+1)(x-1)^2},\quad S_v(x)=\frac{241\,x^2-440\,x-1}{(39\,x+1)(x-1)^2}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f)\in\mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x\in]-R,R[,\quad S_u(x)=\frac{a}{39\,x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2},\quad S_v(x)=\frac{d}{39\,x+1}+\frac{e}{x-1}+\frac{f}{(x-1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{397}{20}\,(-39)^n-5\,n-\frac{217}{20},\quad v_n=\frac{397}{40}\,(-39)^n-5\,n-\frac{437}{40}.$$

Exercice 63. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=-1$, $u_1=-1$, et : → page 153
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+2)(n+1)u_{n+2}+2(n+1)u_{n+1}+u_n=0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2-X-\frac{1}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1,+\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S''+2S'+S=0.$$
4. En déduire :
$$\forall x\in]-R,R[,\quad S(x)=-(2\,x+1)e^{(-x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{(-1)^n\,(2\,n-1)}{n!}.$$

Exercice 64. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=1$, $u_1=-5$, $u_2=2$, et : → page 154
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+3}-3u_{n+1}-2u_n=0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme X^3-3X-2 admet au moins une racine r dans $[1,+\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant 5\,r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x)=\frac{x^2+5\,x-1}{(2\,x-1)(x+1)^2}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x\in]-R,R[,\quad S(x)=\frac{a}{2\,x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{5}{3}\,(-1)^n\,(n+1)-\frac{7}{9}\cdot 2^n+\frac{1}{9}\,(-1)^n.$$

Exercice 65. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0=1$, $u_1=0$, $u_2=0$, et : → page 156
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+3}+49u_{n+2}-u_{n+1}-49u_n=0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme X^3-49X^2-X-49 admet au moins une racine r dans $[1,+\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x)=\frac{x^2-49\,x-1}{(49\,x+1)(x+1)(x-1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\,b,\,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x\in]-R,R[,\quad S(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{49\,x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{49}{96}\,(-1)^n-\frac{1}{2400}\,(-49)^n+\frac{49}{100}.$$

Exercice 66. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et : → page 157

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + (n+1)u_{n+1} - 6u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - 3$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :
$$S'' + S' - 6S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{4}{5}\, e^{(2\,x)} + \frac{1}{5}\, e^{(-3\,x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4 \cdot 2^n}{5\, n!} + \frac{(-3)^n}{5\, n!}.$$

Exercice 67. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = -1$, $u_2 = -4$, et : → page 159

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 12u_{n+2} + 17u_{n+1} + 30u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 12X^2 - 17X - 30$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{9\,x^2 - 11\,x + 1}{(10\,x - 1)(3\,x - 1)(x + 1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{3\,x - 1} + \frac{c}{10\,x - 1}.$$

5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{77} \cdot 10^n - \frac{15}{28} \cdot 3^n - \frac{21}{44}\,(-1)^n.$$

Exercice 68. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = -2$, et : → page 160

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 37(n+1)u_{n+1} - 120u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{37}{2}X - 60$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 37S' - 120S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -\frac{5}{43}\, e^{(40\, x)} - \frac{38}{43}\, e^{(-3\, x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{5 \cdot 40^n}{43\, n!} - \frac{38\, (-3)^n}{43\, n!}.$$

Exercice 69. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -2$, $v_0 = 1$, et : → page 162

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n - 8v_n - 7, \\ v_{n+1} &= 4u_n - 7v_n - 13. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2 \cdot 24^n, \quad |v_n| \leqslant 2 \cdot 24^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (-5\, x + 1)\, S_u(x) + 8x S_v(x) &= \frac{7\, x}{x-1} - 2, \\ -4x S_u(x) + (7\, x + 1)\, S_v(x) &= \frac{13\, x}{x-1} + 1. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{77\, x^2 - 27\, x - 2}{(3\, x + 1)(x - 1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{(25\, x - 1)(2\, x - 1)}{(3\, x + 1)(x - 1)^2}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{3\, x + 1} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{3\, x + 1} + \frac{e}{x - 1} + \frac{f}{(x - 1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{35}{4}\, (-3)^n + 12\, n - \frac{43}{4}, \quad v_n = \frac{35}{4}\, (-3)^n + 6\, n - \frac{31}{4}.$$

Exercice 70. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, et : → page 164

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - (n+1)u_{n+1} - 2u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :

$$S'' - S' - 2S = 0.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = e^{(2\,x)} + e^{(-x)}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Exercice 71. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, et : → page 165

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 7u_{n+2} + 4u_{n+1} + 12u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 7X^2 - 4X - 12$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{(13\,x - 2)x}{(6\,x-1)(2\,x-1)(x+1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{6\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{28} \cdot 6^n + \frac{3}{4} \cdot 2^n - \frac{5}{7}\,(-1)^n.$$

Exercice 72. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, et : → page 166

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 38(n+1)u_{n+1} - 80u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 19X - 40$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3\, r^n,$$

   et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :

$$S'' - 38S' - 80S = 0.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{1}{14}\, e^{(40\,x)} - \frac{1}{14}\, e^{(-2\,x)}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{40^n}{14\, n!} - \frac{(-2)^n}{14\, n!}.$$

Exercice 73. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = -2$, et : → page 168

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 29u_n - 26v_n - 1, \\ v_{n+1} & = & 13u_n - 10v_n - 4. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2 \cdot 56^n, \quad |v_n| \leqslant 2 \cdot 56^n,$$

   et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (-29\,x + 1)\, S_u(x) + 26xS_v(x) & = & \frac{x}{x-1} - 1, \\ -13xS_u(x) + (10\,x + 1)\, S_v(x) & = & \frac{4\,x}{x-1} - 2. \end{array} \right.$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{52\,x^2 + 42\,x - 1}{(16\,x - 1)(3\,x - 1)(x - 1)}, \quad S_v(x) = -\frac{58\,x^2 + 43\,x - 2}{(16\,x - 1)(3\,x - 1)(x - 1)}.$$

   Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{3\,x-1} + \frac{c}{16\,x-1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{3\,x-1} + \frac{f}{16\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{12}{5} \cdot 16^n - \frac{13}{2} \cdot 3^n + \frac{31}{10}, \quad v_n = \frac{6}{5} \cdot 16^n - \frac{13}{2} \cdot 3^n + \frac{33}{10}.$$

Exercice 74. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 17$, $v_0 = 1$, et : → page 170

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -24u_n - 21v_n - 1, \\ v_{n+1} &= 14u_n + 11v_n. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 17 \cdot 46^n, \quad |v_n| \leqslant 17 \cdot 46^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{cases} (24\,x+1)\,S_u(x) + 21xS_v(x) &= \frac{x}{x-1} + 17, \\ -14xS_u(x) + (-11\,x+1)\,S_v(x) &= 1. \end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{219\,x^2 - 226\,x + 17}{(10\,x+1)(3\,x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{276\,x^2 - 261\,x - 1}{(10\,x+1)(3\,x+1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{3\,x+1} + \frac{c}{10\,x+1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{3\,x+1} + \frac{f}{10\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{75}{2}\,(-3)^n + \frac{597}{11}\,(-10)^n + \frac{5}{22}, \quad v_n = \frac{75}{2}\,(-3)^n - \frac{398}{11}\,(-10)^n - \frac{7}{22}.$$

Exercice 75. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -3$, $v_0 = -3$, et : → page 171

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - 2v_n - 2, \\ v_{n+1} &= 4u_n - 3v_n + 1. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3 \cdot 8^n, \quad |v_n| \leqslant 3 \cdot 8^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{cases} (-3\,x+1)\,S_u(x) + 2xS_v(x) &= \frac{2\,x}{x-1} - 3, \\ -4xS_u(x) + (3\,x+1)\,S_v(x) &= -\frac{x}{x-1} - 3. \end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = -\frac{5\,x^2 + 2\,x + 3}{(x+1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{8\,x^2 - x + 3}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x+1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{3}{2}\,(-1)^n - 5\,n - \frac{3}{2}, \quad v_n = -3\,(-1)^n - 5\,n.$$

Exercice 76. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 17$, $u_2 = -1$, et : → page 173

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 285u_{n+2} - 1216u_{n+1} - 17340u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 285X^2 - 1216X - 17340$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 17\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{3628\,x^2 + 302\,x + 1}{(289\,x+1)(10\,x-1)(6\,x+1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{6\,x+1} + \frac{b}{10\,x-1} + \frac{c}{289\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1687}{1196} \cdot 10^n - \frac{463}{1132}\,(-6)^n - \frac{129}{84617}\,(-289)^n.$$

Exercice 77. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = -4$, $u_2 = 2$, et : → page 174

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 2X^2 - 5X - 6$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.

2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = \frac{5\,x - 1}{(3\,x-1)(2\,x+1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{2\,x+1} + \frac{b}{3\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{2}{5} \cdot 3^n + \frac{7}{5}\,(-2)^n\,.$$

Exercice 78. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, et : → page 176

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 7u_{n+2} + 16u_{n+1} - 12u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 7X^2 - 16X - 12$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{16\,x^2 - 7\,x + 1}{(3\,x-1)(2\,x-1)^2}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{3\,x-1} + \frac{b}{2\,x-1} + \frac{c}{(2\,x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3 \cdot 2^n(n+1) + 4 \cdot 3^n.$$

Exercice 79. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = -4$, et : → page 177

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' + 3S' + 2S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = -6\, e^{(-x)} + 5\, e^{(-2\, x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{6\, (-1)^n}{n!} + \frac{5\, (-2)^n}{n!}.$$

Exercice 80. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, et : → page 179

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 13u_n + 15v_n - 2, \\ v_{n+1} & = & -12u_n - 14v_n + 1. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 30^n, \quad |v_n| \leqslant 30^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} (-13\, x + 1)\, S_u(x) - 15x S_v(x) & = & \frac{2\, x}{x-1}, \\ 12x S_u(x) + (14\, x + 1)\, S_v(x) & = & -\frac{x}{x-1} + 1. \end{array} \right.$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{(28\, x - 13)x}{(2\, x + 1)(x - 1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{24\, x^2 - 13\, x + 1}{(2\, x + 1)(x - 1)^2}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{2\, x + 1} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{2\, x + 1} + \frac{e}{x - 1} + \frac{f}{(x - 1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -6\, (-2)^n - 5\, n + 6, \quad v_n = 6\, (-2)^n + 4\, n - 5.$$

Exercice 81. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, et : → page 181

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & -31u_n + 14v_n - 1, \\ v_{n+1} & = & -70u_n + 32v_n - 2. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 104^n, \quad |v_n| \leqslant 104^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{cases} (31\,x+1)\,S_u(x) - 14xS_v(x) &= \frac{x}{x-1}, \\ 70xS_u(x) + (-32\,x+1)\,S_v(x) &= \frac{2\,x}{x-1}. \end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{x}{(3\,x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{2\,x}{(3\,x+1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\,b,\,c,\,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{3\,x+1}, \quad S_v(x) = \frac{c}{x-1} + \frac{d}{3\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4}\,(-3)^n - \frac{1}{4}, \quad v_n = \frac{1}{2}\,(-3)^n - \frac{1}{2}.$$

Exercice 82. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, et : → page 182

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 15(n+1)u_{n+1} + 14u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{15}{2}X - 7$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.

2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :

$$S'' + 15S' + 14S = 0.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{29}{13}\,e^{(-x)} - \frac{3}{13}\,e^{(-14\,x)}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{29\,(-1)^n}{13\,n!} - \frac{3\,(-14)^n}{13\,n!}.$$

Exercice 83. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = 0$, et : → page 184

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -2u_n + 2v_n + 1, \\ v_{n+1} &= -u_n + v_n + 2. \end{cases} \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 5^n, \quad |v_n| \leqslant 5^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (2\,x+1)\,S_u(x) - 2xS_v(x) &= -\frac{x}{x-1} - 1, \\ xS_u(x) + (-x+1)\,S_v(x) &= -\frac{2\,x}{x-1}. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{2\,x^2 + 3\,x - 1}{(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{(2\,x+3)x}{(x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = -\,(-1)^n + 2, \quad v_n = -\frac{1}{2}\,(-1)^n + \frac{5}{2}.$$

Exercice 84. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et : → page 186
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 4(n+1)u_{n+1} - 5u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 2X - \frac{5}{2}$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' + 4S' - 5S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{1}{6}\,e^{(-5\,x)} + \frac{5}{6}\,e^x.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-5)^n}{6\,n!} + \frac{5}{6\,n!}.$$

Exercice 85. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 35$, $u_2 = 1$, et : → page 187
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 9u_{n+2} - 34u_{n+1} + 24u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 9X^2 - 34X - 24$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 35\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = \frac{282\, x^2 + 44\, x + 1}{(12\, x + 1)(2\, x - 1)(x - 1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{2\, x - 1} + \frac{c}{12\, x + 1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{187}{7} \cdot 2^n - \frac{51}{91}\, (-12)^n - \frac{327}{13}.$$

Exercice 86. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = 3$, et : → page 188

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & -20u_n + 16v_n + 3, \\ v_{n+1} & = & -14u_n + 10v_n - 1. \end{array} \right. \qquad (*)$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3 \cdot 39^n, \quad |v_n| \leqslant 3 \cdot 39^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} (20\, x + 1)\, S_u(x) - 16x S_v(x) & = & -\frac{3\, x}{x-1}, \\ 14x S_u(x) + (-10\, x + 1)\, S_v(x) & = & \frac{x}{x-1} + 3. \end{array} \right.$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{(94\, x - 51)x}{(6\, x + 1)(4\, x + 1)(x - 1)}, \quad S_v(x) = \frac{122\, x^2 - 56\, x - 3}{(6\, x + 1)(4\, x + 1)(x - 1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{4\, x + 1} + \frac{c}{6\, x + 1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{4\, x + 1} + \frac{f}{6\, x + 1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{149}{5}\,(-4)^n - \frac{200}{7}\,(-6)^n - \frac{43}{35}, \quad v_n = \frac{149}{5}\,(-4)^n - 25\,(-6)^n - \frac{9}{5}.$$

Exercice 87. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $v_0 = -1$, et : → page 190

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n + 3, \\ v_{n+1} &= -4u_n - 3v_n - 4. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 11^n, \quad |v_n| \leqslant 11^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{cases} (-3\,x+1)\,S_u(x) - 2xS_v(x) &= -\frac{3\,x}{x-1}, \\ 4xS_u(x) + (3\,x+1)\,S_v(x) &= \frac{4\,x}{x-1} - 1. \end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{(3\,x+1)x}{(x+1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = -\frac{3\,x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x+1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}\,(-1)^n + 2\,n - \frac{1}{2}, \quad v_n = -\,(-1)^n - 2\,n.$$

Exercice 88. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, et : → page 192

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 - X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = -\frac{6\,x^2 - 1}{(x+1)^2(x-1)}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5}{2}\,(-1)^n\,(n+1) - \frac{19}{4}\,(-1)^n + \frac{5}{4}.$$

Exercice 89. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, et : → page 193
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 3v_n + 9, \\ v_{n+1} &= -6u_n - 7v_n - 2. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 15^n, \quad |v_n| \leqslant 15^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (-2\,x+1)\,S_u(x) - 3xS_v(x) &= -\frac{9\,x}{x-1} + 1, \\ 6xS_u(x) + (7\,x+1)\,S_v(x) &= \frac{2\,x}{x-1} + 1. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{47\,x^2 + 18\,x + 1}{(4\,x+1)(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = \frac{(14\,x-1)(3\,x+1)}{(4\,x+1)(x+1)(x-1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{4\,x+1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{4\,x+1}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -5\,(-1)^n - \frac{3}{5}\,(-4)^n + \frac{33}{5}, \quad v_n = 5\,(-1)^n + \frac{6}{5}\,(-4)^n - \frac{26}{5}.$$

Exercice 90. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -3$, $v_0 = -1$, et : → page 195
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -27u_n - 70v_n - 1, \\ v_{n+1} &= 14u_n + 36v_n - 28. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3 \cdot 98^n, \quad |v_n| \leqslant 3 \cdot 98^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (27\,x+1)\,S_u(x) + 70xS_v(x) &= \frac{x}{x-1} - 3, \\ -14xS_u(x) + (-36\,x+1)\,S_v(x) &= \frac{28\,x}{x-1} - 1. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = -\frac{3\,(606\,x^2+60\,x-1)}{(8\,x-1)(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{701\,x^2+96\,x+1}{(8\,x-1)(x-1)^2}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{8\,x-1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \quad S_v(x) = \frac{d}{8\,x-1} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{438}{7} \cdot 8^n - 285\,n - \frac{459}{7}, \quad v_n = -\frac{219}{7} \cdot 8^n + 114\,n + \frac{212}{7}.$$

Exercice 91. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 3$, $u_1 = -1$, et : → page 197
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 19(n+1)u_{n+1} - 20u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{19}{2}X - 10$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3\,r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :
$$S'' - 19S' - 20S = 0.$$
4. En déduire :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{2}{21}\,e^{(20\,x)} + \frac{61}{21}\,e^{(-x)}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2 \cdot 20^n}{21\,n!} + \frac{61\,(-1)^n}{21\,n!}.$$

Exercice 92. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, et : → page 198
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 2v_n - 1, \\ v_{n+1} &= -6u_n - 5v_n. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 11^n, \quad |v_n| \leqslant 11^n,$$

et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.

2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{cases} (-2\,x+1)\,S_u(x) - 2xS_v(x) &= \frac{x}{x-1} + 1, \\ 6xS_u(x) + (5\,x+1)\,S_v(x) &= -1. \end{cases}$$

3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S_u(x) = \frac{8\,x^2 - x - 1}{(2\,x+1)(x+1)(x-1)}, \quad S_v(x) = -\frac{(5\,x+1)(2\,x-1)}{(2\,x+1)(x+1)(x-1)}.$$

Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2\,x+1}, \quad S_v(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{2\,x+1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4\,(-1)^n - 2\,(-2)^n - 1, \quad v_n = -6\,(-1)^n + 4\,(-2)^n + 1.$$

Exercice 93. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = -4$, et : → page 200

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 3u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X^2 - 3X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.

2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\,r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{(7\,x+1)x}{(x+1)^3}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3\,(-1)^n\,(n+2)(n+1) + 13\,(-1)^n\,(n+1) - 7\,(-1)^n\,.$$

Exercice 94. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et : → page 202

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} + 240(n+1)u_{n+1} + 476u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 120X - 238$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant r^n,$$

   et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que S vérifie :

$$S'' + 240S' + 476S = 0.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{1}{236}\,e^{(-2\,x)} - \frac{1}{236}\,e^{(-238\,x)}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-2)^n}{236\,n!} - \frac{(-238)^n}{236\,n!}.$$

Exercice 95. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, et : → page 203

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 33u_{n+2} + 167u_{n+1} - 135u_n = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 33X^2 - 167X - 135$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\,r^n,$$

   et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = \frac{165\,x^2 - 33\,x + 1}{(27\,x-1)(5\,x-1)(x-1)}.$$

   Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{5\,x-1} + \frac{c}{27\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{3}{572}\cdot 27^n + \frac{25}{88}\cdot 5^n - \frac{133}{104}.$$

Exercice 96. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, et : → page 204

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 - X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = \frac{x^2 - 3\,x - 2}{(x+1)^2 (x-1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\,(-1)^n\,(n+1) + 2\,(-1)^n + 1.$$

Exercice 97. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 0$, et : → page 206

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 11u_{n+2} - 166u_{n+1} + 280u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 11X^2 - 166X - 280$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$S(x) = -\frac{188\,x^2 - 9\,x - 1}{(20\,x+1)(7\,x-1)(2\,x-1)}.$$

Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{2\,x-1} + \frac{b}{7\,x-1} + \frac{c}{20\,x+1}.$$

5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{76}{135} \cdot 7^n + \frac{83}{55} \cdot 2^n + \frac{16}{297} (-20)^n .$$

Exercice 98. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = -4$, et : → page 207
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 7u_{n+2} + 11u_{n+1} - 5u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 7X^2 - 11X - 5$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 4\, r^n,$$
et en déduire que R est strictement positif.
3. Montrer que pour tout x au voisinage de 0, on a :
$$S(x) = -\frac{14\, x^2 - 8\, x + 1}{(5\, x - 1)(x - 1)^2}.$$
Même si le numérateur est présenté sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour le dénominateur, en vue de la décomposition en éléments simples.
4. Expliciter $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{a}{5\, x - 1} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}.$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{16} \cdot 5^n - \frac{7}{4}\, n + \frac{17}{16}.$$

Exercice 99. On cherche à expliciter les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = -3$, $v_0 = -1$, et : → page 209
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 36u_n - 96v_n + 1, \\ v_{n+1} &= 12u_n - 32v_n - 4. \end{cases} \tag{$*$}$$

1. On note R_u et R_v les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et S_u, S_v leurs sommes respectives. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 3 \cdot 133^n, \quad |v_n| \leqslant 3 \cdot 133^n,$$
et en déduire que R_u et R_v sont strictement positifs.
2. On pose: $R = \min(1, R_u, R_v) > 0$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :
$$\begin{cases} (-36\, x + 1)\, S_u(x) + 96x S_v(x) &= -\frac{x}{x-1} - 3, \\ -12x S_u(x) + (32\, x + 1)\, S_v(x) &= \frac{4\, x}{x-1} - 1. \end{cases}$$
3. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S_u(x) = \frac{416\, x^2 + 4\, x - 3}{(4\, x - 1)(x - 1)}, \quad S_v(x) = \frac{156\, x^2 - 3\, x - 1}{(4\, x - 1)(x - 1)}.$$
Même si les numérateurs sont présentés sous forme factorisée par Python, il n'est pas nécessaire pour vous de le faire. En revanche, c'est essentiel pour les dénominateurs, en vue de la décomposition en éléments simples.

4. Expliciter $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S_u(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{4\,x-1}, \quad S_v(x) = d + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{4\,x-1}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = 32 \cdot 4^n - 139, \quad v_n = \frac{32}{3} \cdot 4^n - \frac{152}{3}.$$

Exercice 100. On cherche à expliciter la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 5$, et : → page 210

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - (n+1)u_{n+1} - 2u_n = 0. \tag{$*$}$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - 1$ admet au moins une racine r dans $[1, +\infty[$. Il n'est pas utile pour la suite de l'expliciter.
2. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et S sa somme. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 5\, r^n,$$

et en déduire que R est strictement positif.

3. Montrer que S vérifie :

$$S'' - S' - 2S = 0.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \frac{5}{3}\, e^{(2\,x)} - \frac{5}{3}\, e^{(-x)}.$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5 \cdot 2^n}{3\, n!} - \frac{5\; (-1)^n}{3\, n!}.$$

Corrigé 1. ← page 1

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -3$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 3 \leqslant 3$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 3$ (on rappelle qu'on a $29^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 3 \cdot 29^n$ et $|v_n| \leqslant 3 \cdot 29^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 2|v_n| + 4 \leqslant 9 \cdot 29^n + 6 \cdot 29^n + 4 \\ &= 3\left(5 \cdot 29^n + \frac{4}{3}\right) \\ &\leqslant 3\left(5 \cdot 29^n + 4 \cdot 29^n\right) \\ &\leqslant 3 \cdot 29^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 3|v_n| + 22 \leqslant 12 \cdot 29^n + 9 \cdot 29^n + 22 \\ &= 3\left(7 \cdot 29^n + \frac{22}{3}\right) \\ &\leqslant 3\left(7 \cdot 29^n + 22 \cdot 29^n\right) \\ &\leqslant 3 \cdot 29^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 29^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (29\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{29}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{29} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -3\,xS_u(x) - 2\,xS_v(x) - 4\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 3$. On a donc montré :

$$(3\,x+1)\,S_u(x) + 2xS_v(x) = \frac{4\,x}{x-1} - 3.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 2\,xL_2 - (-3\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (3\,x+1)\,L_2 + 4xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-x^2+1\right)S_u(x) = -7\,x - \frac{32\,x^2}{x-1} - \frac{4\,x}{x-1} + 3,$$

et :

$$\left(-x^2+1\right)S_v(x) = -9\,x - \frac{50\,x^2}{x-1} - \frac{22\,x}{x-1} + 1.$$

Il reste à diviser par $-x^2+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -\frac{12}{x+1} - \frac{27}{x-1} - \frac{18}{x^2-2\,x+1},$$
et :
$$S_v(x) = \frac{12}{x+1} + \frac{47}{x-1} + \frac{36}{x^2-2\,x+1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -12\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + 27\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 18\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} \\ &= -12\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + 27\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 18\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-12\,(-1)^n - 18\,n + 9\right)x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(12\,(-1)^n + 36\,n - 11\right)x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -12\,(-1)^n - 18\,n + 9, \quad v_n = 12\,(-1)^n + 36\,n - 11.$$

Corrigé 2. ← page 1

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -3$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 3 \leqslant 3$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 3$ (on rappelle qu'on a $215^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 3 \cdot 215^n$ et $|v_n| \leqslant 3 \cdot 215^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 58|u_n| + 16|v_n| + 1 &\leqslant 174 \cdot 215^n + 48 \cdot 215^n + 1 \\ &= 3\left(74 \cdot 215^n + \frac{1}{3}\right) \\ &\leqslant 3\,(74 \cdot 215^n + 215^n) \\ &\leqslant 3 \cdot 215^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}|v_{n+1}| \leqslant 168|u_n| + 46|v_n| + 1 &\leqslant 504 \cdot 215^n + 138 \cdot 215^n + 1\\ &= 3\left(214 \cdot 215^n + \frac{1}{3}\right)\\ &\leqslant 3\left(214 \cdot 215^n + 215^n\right)\\ &\leqslant 3 \cdot 215^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 215^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (215\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{215}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{215} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 58\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 16\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 58\,xS_u(x) - 16\,xS_v(x) + \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 3$. On a donc montré :

$$(-58\,x + 1)\,S_u(x) + 16xS_v(x) = -\frac{x}{x-1} - 3.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 16\,xL_2 - (46\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-58\,x+1)\,L_2 + 168xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(20\,x^2 - 12\,x + 1\right) S_u(x) = 122\,x + \frac{62\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 3,$$

et :

$$\left(20\,x^2 - 12\,x + 1\right) S_v(x) = -446\,x - \frac{226\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} - 1.$$

Il reste à diviser par $20\,x^2 - 12\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{7}{x-1} - \frac{8}{2\,x-1} + \frac{18}{10\,x-1},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{25}{x-1} - \frac{28}{2\,x-1} + \frac{54}{10\,x-1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = 2\,x$ et $t = 10\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{10}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= 7\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 8\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n - 18\sum_{n=0}^{+\infty} (10\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-18 \cdot 10^n + 8 \cdot 2^n + 7)\, x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-54 \cdot 10^n + 28 \cdot 2^n + 25)\, x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -18 \cdot 10^n + 8 \cdot 2^n + 7, \quad v_n = -54 \cdot 10^n + 28 \cdot 2^n + 25.$$

Corrigé 3. ← page 2

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -4$ et $v_0 = -2$, si bien que : $|u_0| = 4 \leqslant 4$, et : $|u_0| = 2 \leqslant 4$ (on rappelle qu'on a $4^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4 \cdot 4^n$ et $|v_n| \leqslant 4 \cdot 4^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + |v_n| + 1 &\leqslant 8 \cdot 4^n + 4 \cdot 4^n + 1 \\ &= 4\left(3 \cdot 4^n + \frac{1}{4}\right) \\ &\leqslant 4\,(3 \cdot 4^n + 4^n) \\ &\leqslant 4 \cdot 4^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + |v_n| &\leqslant 8 \cdot 4^n + 4 \cdot 4^n \\ &= 4\,(3 \cdot 4^n) \\ &\leqslant 4 \cdot 4^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} 4^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (4\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{4}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{4} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 2\,xS_u(x) + xS_v(x) + \frac{x}{1-x},$$
mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 4$. On a donc montré :
$$(-2\,x+1)\,S_u(x) - xS_v(x) = -\frac{x}{x-1} - 4.$$
On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -xL_2 - (x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-2\,x+1)\,L_2 - 2xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-(-x+1)\,S_u(x) = 6\,x + \frac{x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 4,$$
et :
$$(-x+1)\,S_v(x) = 12\,x + \frac{2\,x^2}{x-1} - 2.$$
Il reste à diviser par $-x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = 7 + \frac{13}{x-1} + \frac{2}{x^2-2\,x+1},$$
et :
$$S_v(x) = 7 - \frac{14}{x-1} - \frac{2}{x^2-2\,x+1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \qquad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= 7 - 13\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= 7 - 13\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= -4 + \sum_{n=1}^{+\infty}(2\,n-11)\,x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = -2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-2\,n + 12)\,x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = 2\,n - 11, \quad v_n = -2\,n + 12.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 4. ← page 2

1. L'application $x \mapsto x^3 - 3\,x^2 - 6\,x - 8$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-16 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 3\,r^2 - 6\,r - 8 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = -11$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 11$, $|u_1| = 1 \leqslant 11\,r$ et $|u_2| = 11 \leqslant 11\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 11\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 11\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 11\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 3\,|u_{n+2}| + 6\,|u_{n+1}| + 8\,|u_n| \\ &\leqslant 33\,r^{n+2} + 66\,r^{n+1} + 88\,r^n \\ &= 11\,r^n \left(3\,r^2 + 6\,r + 8\right) \\ &= 11\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 3\,r^2 + 6\,r + 8$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+3} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+3} - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-1 + x - 11\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-8\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x + 1\right) S(x) + \left(2\,x^2 + 2\,x + 1\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-8\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{5}{9\,(2\,x-1)} - \frac{5}{9\,(4\,x+1)} + \frac{1}{9\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = 2\,x$, $t = -4\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{4}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{5}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(2\,x)^n - \frac{5}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-4\,x)^n + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{5}{9}\cdot 2^n + \frac{1}{9}\,(-1)^n - \frac{5}{9}\,(-4)^n\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{5}{9}\cdot 2^n + \frac{1}{9}\,(-1)^n - \frac{5}{9}\,(-4)^n.$$

Corrigé 5. ← page 3

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $19^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 19^n$ et $|v_n| \leqslant 19^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 4|v_n| + 11 &\leqslant 4\cdot 19^n + 4\cdot 19^n + 11 \\ &= 8\cdot 19^n + 11 \\ &\leqslant 8\cdot 19^n + 11\cdot 19^n \\ &\leqslant 19^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 6|v_n| &\leqslant 6\cdot 19^n + 6\cdot 19^n \\ &= 12\cdot 19^n \\ &\leqslant 19^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 19^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0}(19\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{19}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{19} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 11 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 4\, x S_u(x) - 4\, x S_v(x) + 11 \frac{x}{1-x},$$
mais on a aussi : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 1$. On a donc montré :
$$(-4\,x + 1)\, S_u(x) + 4x S_v(x) = -\frac{11\,x}{x-1} - 1.$$
On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 4\,x L_2 - (6\,x + 1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (-4\,x + 1)\, L_2 + 6x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\,(2\,x + 1)\, S_u(x) = 2\,x + \frac{66\,x^2}{x-1} + \frac{11\,x}{x-1} + 1,$$
et :
$$(2\,x + 1)\, S_v(x) = -2\,x - \frac{66\,x^2}{x-1} - 1.$$
Il reste à diviser par $2\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.
4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -34 - \frac{77}{3\,(x-1)} + \frac{22}{3\,(2\,x+1)},$$
et :
$$S_v(x) = -34 - \frac{22}{x-1} + \frac{11}{2\,x+1}.$$
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$ et $t = -2\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -34 + \frac{77}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{22}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-2\,x)^n \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{22}{3}\,(-2)^n + \frac{77}{3} \right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(11\,(-2)^n + 22\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \frac{22}{3}\,(-2)^n + \frac{77}{3}, \quad v_n = 11\,(-2)^n + 22.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 6. ← page 4

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -13$ et $v_0 = 2$, si bien que : $|u_0| = 13 \leqslant 13$, et : $|u_0| = 2 \leqslant 13$ (on rappelle qu'on a $8^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 13 \cdot 8^n$ et $|v_n| \leqslant 13 \cdot 8^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 2|v_n| + 1 &\leqslant 39 \cdot 8^n + 26 \cdot 8^n + 1 \\ &= 13\left(5 \cdot 8^n + \frac{1}{13}\right) \\ &\leqslant 13\,(5 \cdot 8^n + 8^n) \\ &\leqslant 13 \cdot 8^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 3|v_n| + 1 &\leqslant 52 \cdot 8^n + 39 \cdot 8^n + 1 \\ &= 13\left(7 \cdot 8^n + \frac{1}{13}\right) \\ &\leqslant 13\,(7 \cdot 8^n + 8^n) \\ &\leqslant 13 \cdot 8^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 8^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (8\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{8}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{8} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = -3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -3\,x S_u(x) + 2\,x S_v(x) + \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 13$. On a donc montré :

$$(3\,x + 1)\,S_u(x) - 2x S_v(x) = -\frac{x}{x-1} - 13.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -2\,x L_2 - (-3\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (3\,x+1)\,L_2 - 4xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\left(-x^2+1\right) S_u(x) = -43\,x - \frac{5\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 13,$$
et :
$$\left(-x^2+1\right) S_v(x) = 58\,x + \frac{7\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 2.$$
Il reste à diviser par $-x^2+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -\frac{59}{2\,(x+1)} - \frac{37}{2\,(x-1)} - \frac{2}{x^2-2\,x+1},$$
et :
$$S_v(x) = -\frac{59}{2\,(x+1)} - \frac{71}{2\,(x-1)} - \frac{4}{x^2-2\,x+1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{59}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + \frac{37}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} \\ &= -\frac{59}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + \frac{37}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{59}{2}\,(-1)^n - 2\,n + \frac{33}{2}\right)x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{59}{2}\,(-1)^n - 4\,n + \frac{63}{2}\right)x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{59}{2}\,(-1)^n - 2\,n + \frac{33}{2}, \quad v_n = -\frac{59}{2}\,(-1)^n - 4\,n + \frac{63}{2}.$$

Corrigé 7. ← page 4

1. L'application $x \mapsto x^2 - x - \frac{1}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - r - \frac{1}{2} = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ et $|u_1| = 1 \leqslant 2\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{2u_{n+1}}{n+2} + \frac{-u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\ &\leqslant \frac{2u_{n+1}}{n+2} + \frac{u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 2\,r^{n+1} + r^n \\ &= 2\,r^n\left(r + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\,r^{n+2}, \end{aligned}$$

   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = r + \frac{1}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

   On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) - 2S'(x) + S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - 2(n+1) u_{n+1} + u_n \right) x^n = 0, \end{aligned}$$

   d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 2\,x + 1 = 0$, dont on vérifie facilement que son unique racine est 1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = (ax + b)e^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit

d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 2$, et : $S'(0) = u_1 = 1$, ce qui nous donne immédiatement $b = 2$ (car on a aussi : $S(0) = b$), puis $a = -1$ (en utilisant le fait qu'après calcul, on ait : $S'(0) = a + b$). En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -(x-2)e^x$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{n-2}{n!}\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{n-2}{n!}.$$

Corrigé 8. ← page 5

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $12^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 12^n$ et $|v_n| \leqslant 12^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 3|v_n| + 1 &\leqslant 3 \cdot 12^n + 3 \cdot 12^n + 1 \\ &= 6 \cdot 12^n + 1 \\ &\leqslant 6 \cdot 12^n + 12^n \\ &\leqslant 12^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 6|v_n| &\leqslant 6 \cdot 12^n + 6 \cdot 12^n \\ &= 12 \cdot 12^n \\ &\leqslant 12^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 12^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (12\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{12}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{12} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = -3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -3\,xS_u(x) - 3\,xS_v(x) - \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 1$. On a donc montré :

$$(3\,x+1)\,S_u(x) + 3xS_v(x) = \frac{x}{x-1} + 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 3\,xL_2 - (-6\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (3\,x+1)\,L_2 + 6xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-(-3\,x+1)\,S_u(x) = 3\,x + \frac{6\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 1,$$
et :
$$(-3\,x+1)\,S_v(x) = 3\,x + \frac{6\,x^2}{x-1} - 1.$$
Il reste à diviser par $-3\,x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = 3 + \frac{5}{2\,(x-1)} - \frac{1}{2\,(3\,x-1)},$$
et :
$$S_v(x) = 3 - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{3\,x-1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$ et $t = 3\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= 3 - \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (3\,x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot 3^n - \frac{5}{2}\right)x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-3^n + 3)\,x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad u_n = \frac{1}{2}\cdot 3^n - \frac{5}{2},\quad v_n = -3^n + 3.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 9. ← page 5

1. L'application $x \mapsto x^2 - 2x - 6$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-7 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^2 - 2r - 6 = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \sqrt{7}+1$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -8$ et $u_1 = -2$, si bien que : $|u_0| = 8 \leqslant 8$ et $|u_1| = 2 \leqslant 8r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 8r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 8r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{-4u_{n+1}}{n+2} + \frac{12u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{4u_{n+1}}{n+2} + \frac{12u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 16r^{n+1} + 48r^n \\ &= 8r^n(2r+6) \\ &= 8r^{n+2},\end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 2r+6$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R,R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n,\quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$
On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$:
$$\begin{aligned}S''(x) + 4S'(x) - 12S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n - 12\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 4(n+1)u_{n+1} - 12u_n\right)x^n = 0,\end{aligned}$$
d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2+4\,x-12=0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -6 et 2. On en déduit qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x\in]-R,R[$, $S(x)=be^{(2\,x)}+ae^{(-6\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0)=u_0=-8$, et : $S'(0)=u_1=-2$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0)=a+b$ et $S'(0)=-6\,a+2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -8 \\ -\ 6a & + & 2b & = & -2 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2\leftarrow L_2-2L_1$ et $L_2\leftarrow L_2+6L_1$ donnent respectivement $a=-\frac{7}{4}$ et $b=-\frac{25}{4}$. En conclusion, pour tout $x\in]-R,R[$ on a : $S(x)=-\frac{25}{4}\,e^{(2\,x)}-\frac{7}{4}\,e^{(-6\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x\in]-R,R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-6\,x)^n}{n!}-\frac{25}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{25\cdot 2^n}{4\,n!}-\frac{7\,(-6)^n}{4\,n!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x\in]-R,R[$, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=-\frac{25\cdot 2^n}{4\,n!}-\frac{7\,(-6)^n}{4\,n!}.$$

Corrigé 10. ← page 6

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n=0$, puisque par hypothèse on a $u_0=0$ et $v_0=-3$, si bien que : $|u_0|=0\leqslant 3$, et : $|u_0|=3\leqslant 3$ (on rappelle qu'on a $46^0=1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n|\leqslant 3\cdot 46^n$ et $|v_n|\leqslant 3\cdot 46^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}|\leqslant 6|u_n|+4|v_n|+36 &\leqslant 18\cdot 46^n+12\cdot 46^n+36 \\ &= 3\,(10\cdot 46^n+12) \\ &\leqslant 3\,(10\cdot 46^n+36\cdot 46^n) \\ &\leqslant 3\cdot 46^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}|\leqslant 6|u_n|+4|v_n|+1 &\leqslant 18\cdot 46^n+12\cdot 46^n+1 \\ &= 3\left(10\cdot 46^n+\frac{1}{3}\right) \\ &\leqslant 3\,(10\cdot 46^n+46^n) \\ &\leqslant 3\cdot 46^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 46^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (46\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{46}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{46} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 36 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 6\,x S_u(x) + 4\,x S_v(x) + 36 \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :

$$(-6\,x+1)\, S_u(x) - 4x S_v(x) = -\frac{36\,x}{x-1}.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -4\,x L_2 - (4\,x+1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (-6\,x+1)\, L_2 - 6x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\,(-2\,x+1)\, S_u(x) = 12\,x + \frac{148\,x^2}{x-1} + \frac{36\,x}{x-1},$$

et :

$$(-2\,x+1)\, S_v(x) = 18\,x + \frac{222\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 3.$$

Il reste à diviser par $-2\,x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = 80 + \frac{184}{x-1} - \frac{104}{2\,x-1},$$

et :

$$S_v(x) = 80 - \frac{221}{x-1} + \frac{104}{2\,x-1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$ et $t = 2\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= 80 - 184 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 104 \sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (104 \cdot 2^n - 184)\, x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = -3 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-104 \cdot 2^n + 221)\, x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = 104 \cdot 2^n - 184, \quad v_n = -104 \cdot 2^n + 221.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 11. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x^2 - 2\,x - \frac{3}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{5}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - 2\,r - \frac{3}{2} = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{10} + 1$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $u_1 = 19$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 19$ et $|u_1| = 19 \leqslant 19\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 19\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 19\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{4u_{n+1}}{n+2} + \frac{-3u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\ &\leqslant \frac{4u_{n+1}}{n+2} + \frac{3u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 38\,r^{n+1} + \frac{57}{2}\,r^n \\ &= 19\,r^n \left(2\,r + \frac{3}{2}\right) \\ &= 19\,r^{n+2}, \end{aligned}$$

   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 2\,r + \frac{3}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$
On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned} S''(x) - 4S'(x) + 3S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)u_{n+2} - 4(n+1)u_{n+1} + 3u_n\right) x^n = 0, \end{aligned}$$
d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 4\,x + 3 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 1 et 3. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = be^{(3\,x)} + ae^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -1$, et : $S'(0) = u_1 = 19$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = a + 3\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :
$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & -1 \\ a & + & 3b & = & 19 \end{array}\right.$$
Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donnent respectivement $a = -11$ et $b = 10$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = 10\,e^{(3\,x)} - 11\,e^x$, d'où le résultat.
5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :
$$\begin{aligned} S(x) &= -11\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + 10\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{10\cdot 3^n}{n!} - \frac{11}{n!}\right) x^n. \end{aligned}$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{10\cdot 3^n}{n!} - \frac{11}{n!}.$$

Corrigé 12. ← page 7

1. L'application $x \mapsto x^2 - 39\,x - \frac{1121}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1197}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - 39\,r - \frac{1121}{2} = 0$. D'où le résultat. On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{3763} + \frac{39}{2}$.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n=0$ et $n=1$, puisque par hypothèse on a $u_0=1$ et $u_1=2$, si bien que : $|u_0|=1\leqslant 2$ et $|u_1|=2\leqslant 2\,r$ (rappelons que nous avons $r\geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n|\leqslant 2\,r^n$ et $|u_{n+1}|\leqslant 2\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{78u_{n+1}}{n+2}+\frac{-1121u_n}{(n+2)(n+1)}\right|\\ &\leqslant \frac{78u_{n+1}}{n+2}+\frac{1121u_n}{(n+2)(n+1)}\\ &\leqslant 78\,r^{n+1}+1121\,r^n\\ &= 2\,r^n\left(39\,r+\frac{1121}{2}\right)\\ &= 2\,r^{n+2},\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2=39\,r+\frac{1121}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n=\sum\limits_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R\geqslant\frac{1}{r}>0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R>0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x\in]-R,R[$:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n,\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$

On en déduit, pour tout $x\in]-R,R[$:

$$\begin{aligned}S''(x)-78S'(x)+1121S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n-78\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n+1121\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2}-78(n+1)u_{n+1}+1121u_n\right)x^n=0,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2-78\,x+1121=0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 19 et 59. On en déduit qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x\in]-R,R[$, $S(x)=be^{(59\,x)}+ae^{(19\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0)=u_0=1$, et : $S'(0)=u_1=2$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0)=a+b$ et $S'(0)=19\,a+59\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a &+& b &=& 1\\ 19a &+& 59b &=& 2\end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 59L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 19L_1$ donnent respectivement $a = \frac{57}{40}$ et $b = -\frac{17}{40}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -\frac{17}{40}\, e^{(59\,x)} + \frac{57}{40}\, e^{(19\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{57}{40}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(19\,x)^n}{n!} - \frac{17}{40}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(59\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{17\cdot 59^n}{40\,n!} + \frac{57\cdot 19^n}{40\,n!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{17\cdot 59^n}{40\,n!} + \frac{57\cdot 19^n}{40\,n!}.$$

Corrigé 13. ← page 7

1. L'application $x \mapsto x^3 - x^2 - x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-2 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - r^2 - r - 1 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -5$, $u_1 = -3$ et $u_2 = -2$, si bien que : $|u_0| = 5 \leqslant 5$, $|u_1| = 3 \leqslant 5\,r$ et $|u_2| = 2 \leqslant 5\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 5\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 5\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 5\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant |u_{n+2}| + |u_{n+1}| + |u_n| \\ &\leqslant 5\,r^{n+2} + 5\,r^{n+1} + 5\,r^n \\ &= 5\,r^n\left(r^2 + r + 1\right) \\ &= 5\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = r^2 + r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-5 - 3\,x - 2\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-x^3 - x^2 + x + 1\right) S(x) + (8\,x + 5) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-x^3 - x^2 + x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{13}{4\,(x-1)} - \frac{13}{4\,(x+1)} + \frac{3}{2\,(x^2 + 2\,x + 1)}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{13}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{13}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^{n-1} \\ &= -\frac{13}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{13}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n + \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\,(-1)^n\,(n+1) - \frac{13}{4}\,(-1)^n - \frac{13}{4} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{2}\,(-1)^n\,(n+1) - \frac{13}{4}\,(-1)^n - \frac{13}{4}.$$

Corrigé 14. ← page 8

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = -5$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 5$, et : $|u_0| = 5 \leqslant 5$ (on rappelle qu'on a $10^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 5 \cdot 10^n$ et $|v_n| \leqslant 5 \cdot 10^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 4|v_n| + 3 &\leqslant 15 \cdot 10^n + 20 \cdot 10^n + 3 \\ &= 5\left(7 \cdot 10^n + \frac{3}{5}\right) \\ &\leqslant 5\,(7 \cdot 10^n + 3 \cdot 10^n) \\ &\leqslant 5 \cdot 10^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}|v_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 3|v_n| + 1 &\leqslant 10 \cdot 10^n + 15 \cdot 10^n + 1 \\ &= 5\left(5 \cdot 10^n + \frac{1}{5}\right) \\ &\leqslant 5\,(5 \cdot 10^n + 10^n) \\ &\leqslant 5 \cdot 10^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 10^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (10\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{10}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{10} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 3\,x S_u(x) - 4\,x S_v(x) + 3\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :

$$(-3\,x + 1)\, S_u(x) + 4x S_v(x) = -\frac{3\,x}{x-1}.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 4\,x L_2 - (3\,x + 1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (-3\,x + 1)\, L_2 + 2x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-x^2 + 1\right) S_u(x) = -20\,x + \frac{13\,x^2}{x-1} + \frac{3\,x}{x-1},$$

et :

$$\left(-x^2 + 1\right) S_v(x) = 15\,x - \frac{9\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} - 5.$$

Il reste à diviser par $-x^2 + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{15}{2\,(x+1)} + \frac{1}{2\,(x-1)} + \frac{8}{x^2 - 2\,x + 1},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{15}{2\,(x+1)} + \frac{3}{2\,(x-1)} + \frac{4}{x^2 - 2\,x + 1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{15}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= -\frac{15}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{15}{2}\,(-1)^n + 8\,n + \frac{15}{2} \right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{15}{2}\,(-1)^n + 4\,n + \frac{5}{2} \right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{15}{2}\,(-1)^n + 8\,n + \frac{15}{2}, \quad v_n = -\frac{15}{2}\,(-1)^n + 4\,n + \frac{5}{2}.$$

Corrigé 15. ← page 8

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = -4$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 4$, et : $|u_0| = 4 \leqslant 4$ (on rappelle qu'on a $6^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4 \cdot 6^n$ et $|v_n| \leqslant 4 \cdot 6^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 2|v_n| + 2 &\leqslant 8 \cdot 6^n + 8 \cdot 6^n + 2 \\ &= 4\left(4 \cdot 6^n + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqslant 4\,(4 \cdot 6^n + 2 \cdot 6^n) \\ &\leqslant 4 \cdot 6^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant |u_n| + |v_n| + 1 &\leqslant 4 \cdot 6^n + 4 \cdot 6^n + 1 \\ &= 4\left(2 \cdot 6^n + \frac{1}{4}\right) \\ &\leqslant 4\,(2 \cdot 6^n + 6^n) \\ &\leqslant 4 \cdot 6^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont

supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 6^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (6\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{6}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{6} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -2\,xS_u(x) - 2\,xS_v(x) - 2\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 1$. On a donc montré :

$$(2\,x+1)\,S_u(x) + 2xS_v(x) = \frac{2\,x}{x-1} - 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 2\,xL_2 - (-x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (2\,x+1)\,L_2 + xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\,(x+1)\,S_u(x) = -9\,x - \frac{2\,x}{x-1} + 1,$$

et :

$$(x+1)\,S_v(x) = -9\,x - \frac{x}{x-1} - 4.$$

Il reste à diviser par $x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = 9 + \frac{1}{x-1} - \frac{9}{x+1},$$

et :

$$S_v(x) = 9 - \frac{1}{2\,(x-1)} + \frac{9}{2\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= 9 - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 9 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-9\,(-1)^n - 1\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = -4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{2}\,(-1)^n + \frac{1}{2}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = -9\,(-1)^n - 1, \quad v_n = \frac{9}{2}\,(-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 16. ← page 9

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}\,x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{1}{2}\,r - 1 = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ et $|u_1| = 0 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left|\frac{u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\,r^{n+1} + r^n \\ &= r^n\left(\frac{1}{2}\,r + 1\right) \\ &= r^{n+2}, \end{aligned}$$

   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{1}{2}\,r + 1$. D'où le résultat au rang $n + 3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) - S'(x) - 2S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - (n+1) u_{n+1} - 2u_n \right) x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - x - 2 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -1 et 2. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = b e^{(2x)} + a e^{(-x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 1$, et : $S'(0) = u_1 = 0$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = -a + 2b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + 2b = 0 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donnent respectivement $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{1}{3} e^{(2x)} + \frac{2}{3} e^{(-x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{3\, n!} + \frac{2\,(-1)^n}{3\, n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n}{3\, n!} + \frac{2\,(-1)^n}{3\, n!}.$$

Corrigé 17. ← page 9

1. L'application $x \mapsto x^3 - 3x^2 - 4$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-6 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 3r^2 - 4 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = -2$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 2$, $|u_1| = 0 \leqslant 2\,r$ et $|u_2| = 2 \leqslant 2\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 2\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 3\,|u_{n+2}| + 4\,|u_n| \\ &\leqslant 6\,r^{n+2} + 8\,r^n \\ &= 2\,r^n\left(3\,r^2 + 4\right) \\ &= 2\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 3\,r^2 + 4$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-1 - 2\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-4\,x^3 + 3\,x + 1\right) S(x) + \left(2\,x^2 + 3\,x + 1\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-4\,x^3 + 3\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{2}{3\,(x-1)} - \frac{1}{3\,(2\,x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$ et $t = -2\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en

éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-2\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\,(-2)^n - \frac{2}{3}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{3}\,(-2)^n - \frac{2}{3}.$$

Corrigé 18. ← page 10

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $4^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4^n$ et $|v_n| \leqslant 4^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant |u_n| + |v_n| + 1 &\leqslant 4^n + 4^n + 1 \\ &= 2\cdot 4^n + 1 \\ &\leqslant 2\cdot 4^n + 4^n \\ &\leqslant 4^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 2|v_n| &\leqslant 2\cdot 4^n + 2\cdot 4^n \\ &= 4\cdot 4^n \\ &\leqslant 4^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 4^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(4\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{4}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{4} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.
2. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -xS_u(x) + xS_v(x) - \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 1$. On a donc montré :

$$(x+1)\,S_u(x) - xS_v(x) = \frac{x}{x-1} + 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -xL_2-(-2\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (x+1)\,L_2-2xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\,(-x+1)\,S_u(x) = x + \frac{2\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 1,$$
et :
$$(-x+1)\,S_v(x) = -x - \frac{2\,x^2}{x-1} + 1.$$
Il reste à diviser par $-x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = 3 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x^2-2\,x+1},$$
et :
$$S_v(x) = 3 + \frac{4}{x-1} + \frac{2}{x^2-2\,x+1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= 3 - 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= 3 - 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-2)\,x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2\,n-2)\,x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = n-2, \quad v_n = 2\,n-2.$$
Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 19. ← page 10

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $62^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 62^n$ et $|v_n| \leqslant 62^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}|u_{n+1}| \leqslant 16|u_n| + 45|v_n| + 1 &\leqslant 16 \cdot 62^n + 45 \cdot 62^n + 1\\ &= 61 \cdot 62^n + 1\\ &\leqslant 61 \cdot 62^n + 62^n\\ &\leqslant 62^{n+1},\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}|v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 17|v_n| + 1 &\leqslant 6 \cdot 62^n + 17 \cdot 62^n + 1\\ &= 23 \cdot 62^n + 1\\ &\leqslant 23 \cdot 62^n + 62^n\\ &\leqslant 62^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n + 1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 62^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(62\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{62}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{62} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -16\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 45\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -16\,xS_u(x) + 45\,xS_v(x) + \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 1$. On a donc montré :

$$(16\,x + 1)\,S_u(x) - 45xS_v(x) = -\frac{x}{x-1} + 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -45\,xL_2 - (-17\,x + 1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (16\,x + 1)\,L_2 - 6xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-2\,x^2 - x + 1\right) S_u(x) = 62\,x + \frac{28\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} - 1,$$

et :

$$\left(-2\,x^2 - x + 1\right) S_v(x) = -22\,x - \frac{10\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 1.$$

Il reste à diviser par $-2\,x^2 - x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{29}{2\,(x-1)} + \frac{10}{2\,x-1} + \frac{51}{2\,(x+1)},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{11}{2\,(x-1)} + \frac{4}{2\,x-1} + \frac{17}{2\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = 2\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{29}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 10\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n + \frac{51}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-10 \cdot 2^n + \frac{51}{2}\,(-1)^n - \frac{29}{2}\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-4 \cdot 2^n + \frac{17}{2}\,(-1)^n - \frac{11}{2}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -10 \cdot 2^n + \frac{51}{2}\,(-1)^n - \frac{29}{2}, \quad v_n = -4 \cdot 2^n + \frac{17}{2}\,(-1)^n - \frac{11}{2}.$$

Corrigé 20. ← page 11

1. L'application $x \mapsto x^2 - 11\,x - \frac{135}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{155}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - 11\,r - \frac{135}{2} = 0$. D'où le résultat. On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{391} + \frac{11}{2}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $u_1 = -1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$ et $|u_1| = 1 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse

de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left|\frac{-22u_{n+1}}{n+2} + \frac{135u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{22u_{n+1}}{n+2} + \frac{135u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 11\,r^{n+1} + \frac{135}{2}\,r^n \\ &= r^n\left(11\,r + \frac{135}{2}\right) \\ &= r^{n+2}, \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 11\,r + \frac{135}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) + 22S'(x) - 135S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n + 22 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 135 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} + 22(n+1) u_{n+1} - 135 u_n\right) x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 22\,x - 135 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -27 et 5. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = be^{(5\,x)} + ae^{(-27\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 0$, et : $S'(0) = u_1 = -1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a+b$ et $S'(0) = -27\,a+5\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 0 \\ -\;27a & + & 5b & = & -1 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + 27L_1$ donnent respectivement $a = \frac{1}{32}$ et $b = -\frac{1}{32}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -\frac{1}{32}\,e^{(5\,x)} + \frac{1}{32}\,e^{(-27\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{32} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-27\,x)^n}{n!} - \frac{1}{32} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{5^n}{32\,n!} + \frac{(-27)^n}{32\,n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{5^n}{32\,n!} + \frac{(-27)^n}{32\,n!}.$$

Corrigé 21. ← page 11

1. L'application $x \mapsto x^2 - x - \frac{1}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - r - \frac{1}{2} = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -2$ et $u_1 = 0$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ et $|u_1| = 0 \leqslant 2\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{2u_{n+1}}{n+2} + \frac{-u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\ &\leqslant \frac{2u_{n+1}}{n+2} + \frac{u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 2\,r^{n+1} + r^n \\ &= 2\,r^n \left(r + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2\,r^{n+2}, \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = r + \frac{1}{2}$. D'où le résultat au rang $n + 3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) - 2S'(x) + S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)u_{n+2} - 2(n+1)u_{n+1} + u_n\right) x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 2\,x + 1 = 0$, dont on vérifie facilement que son unique racine est 1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = (ax + b)e^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -2$, et : $S'(0) = u_1 = 0$, ce qui nous donne immédiatement $b = -2$ (car on a aussi : $S(0) = b$), puis $a = 2$ (en utilisant le fait qu'après calcul, on ait : $S'(0) = a + b$). En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = 2\,(x-1)e^x$, d'où le résultat.
5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2\,(n-1)}{n!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2\,(n-1)}{n!}.$$

Corrigé 22. ← page 12

1. L'application $x \mapsto x^3 - 66\,x^2 - x - 66$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-132 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 66\,r^2 - r - 66 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -2$, $u_1 = 0$ et $u_2 = -4$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 4$, $|u_1| = 0 \leqslant 4\,r$ et $|u_2| = 4 \leqslant 4\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 4\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 4\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 66\,|u_{n+2}| + |u_{n+1}| + 66\,|u_n| \\ &\leqslant 264\,r^{n+2} + 4\,r^{n+1} + 264\,r^n \\ &= 4\,r^n\left(66\,r^2 + r + 66\right) \\ &= 4\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 66\,r^2 + r + 66$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} + 66 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+3} - 66 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-2 - 4\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-66\,x^3 - x^2 + 66\,x + 1\right) S(x) + \left(2\,x^2 + 132\,x + 2\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-66\,x^3 - x^2 + 66\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{68}{67\,(x-1)} - \frac{2}{4355\,(66\,x+1)} - \frac{64}{65\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = -66\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{66}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{68}{67} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{4355} \sum_{n=0}^{+\infty} (-66\,x)^n - \frac{64}{65} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{64}{65}\,(-1)^n - \frac{2}{4355}\,(-66)^n - \frac{68}{67}\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{64}{65}\,(-1)^n - \frac{2}{4355}\,(-66)^n - \frac{68}{67}.$$

Corrigé 23. ← page 12

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $31^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 31^n$ et $|v_n| \leqslant 31^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 6|v_n| + 21 &\leqslant 4 \cdot 31^n + 6 \cdot 31^n + 21 \\ &= 10 \cdot 31^n + 21 \\ &\leqslant 10 \cdot 31^n + 21 \cdot 31^n \\ &\leqslant 31^{n+1}, \end{aligned}$$
et de même :
$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 5|v_n| &\leqslant 3 \cdot 31^n + 5 \cdot 31^n \\ &= 8 \cdot 31^n \\ &\leqslant 31^{n+1}, \end{aligned}$$
d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 31^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (31\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{31}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{31} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.
2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -4\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 21\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -4\,xS_u(x) + 6\,xS_v(x) - 21\frac{x}{1-x},$$
mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :
$$(4\,x+1)\,S_u(x) - 6xS_v(x) = \frac{21\,x}{x-1}.$$
On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -6\,xL_2 - (-5\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (4\,x+1)\,L_2 - 3xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\left(-2\,x^2 - x + 1\right) S_u(x) = 6\,x + \frac{105\,x^2}{x-1} - \frac{21\,x}{x-1},$$
et :
$$\left(-2\,x^2 - x + 1\right) S_v(x) = -4\,x - \frac{63\,x^2}{x-1} - 1.$$
Il reste à diviser par $-2\,x^2 - x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = \frac{42}{x-1} - \frac{19}{2\,x-1} + \frac{23}{x+1},$$
et :
$$S_v(x) = \frac{63}{2\,(x-1)} - \frac{19}{2\,x-1} + \frac{23}{2\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$, $t = 2\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -42\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 19\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n + 23\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(19\cdot 2^n + 23\,(-1)^n - 42\right) x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(19\cdot 2^n + \frac{23}{2}\,(-1)^n - \frac{63}{2}\right) x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 19\cdot 2^n + 23\,(-1)^n - 42, \quad v_n = 19\cdot 2^n + \frac{23}{2}\,(-1)^n - \frac{63}{2}.$$

Corrigé 24. ← page 13

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $8^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 8^n$ et $|v_n| \leqslant 8^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 5|u_n| + 2|v_n| + 1 &\leqslant 5\cdot 8^n + 2\cdot 8^n + 1 \\ &= 7\cdot 8^n + 1 \\ &\leqslant 7\cdot 8^n + 8^n \\ &\leqslant 8^{n+1}, \end{aligned}$$
et de même :
$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + |v_n| + 1 &\leqslant 4\cdot 8^n + 8^n + 1 \\ &= 5\cdot 8^n + 1 \\ &\leqslant 5\cdot 8^n + 8^n \\ &\leqslant 8^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 8^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(8\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{8}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{8} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 5\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 5\,xS_u(x) - 2\,xS_v(x) + \frac{x}{1-x},$$
mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :
$$(-5\,x+1)\,S_u(x) + 2xS_v(x) = -\frac{x}{x-1}.$$
On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 2\,xL_2-(x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-5\,x+1)\,L_2+4xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\left(3\,x^2-4\,x+1\right)S_u(x) = 2\,x + \frac{3\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1},$$
et :
$$\left(3\,x^2-4\,x+1\right)S_v(x) = -5\,x - \frac{9\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 1.$$
Il reste à diviser par $3\,x^2-4\,x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -\frac{1}{2\,(3\,x-1)} - \frac{3}{2\,(x-1)} - \frac{2}{x^2-2\,x+1},$$
et :
$$S_v(x) = -\frac{1}{2\,(3\,x-1)} - \frac{9}{2\,(x-1)} - \frac{4}{x^2-2\,x+1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = 3\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot 3^n - 2\,n - \frac{1}{2}\right)x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot 3^n - 4\,n + \frac{1}{2}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}\cdot 3^n - 2\,n - \frac{1}{2}, \quad v_n = \frac{1}{2}\cdot 3^n - 4\,n + \frac{1}{2}.$$

Corrigé 25. ← page 14

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = 11$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 11$, et : $|u_0| = 11 \leqslant 11$ (on rappelle qu'on a $38^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 11 \cdot 38^n$ et $|v_n| \leqslant 11 \cdot 38^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 23|u_n| + 12|v_n| + 1 &\leqslant 253 \cdot 38^n + 132 \cdot 38^n + 1 \\ &= 11\left(35 \cdot 38^n + \frac{1}{11}\right) \\ &\leqslant 11\,(35 \cdot 38^n + 38^n) \\ &\leqslant 11 \cdot 38^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 24|u_n| + 13|v_n| + 1 &\leqslant 264 \cdot 38^n + 143 \cdot 38^n + 1 \\ &= 11\left(37 \cdot 38^n + \frac{1}{11}\right) \\ &\leqslant 11\,(37 \cdot 38^n + 38^n) \\ &\leqslant 11 \cdot 38^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 38^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0}(38\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{38}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{38} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 23\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 12\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 23\,xS_u(x) - 12\,xS_v(x) + \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 1$. On a donc montré :

$$(-23\,x+1)\,S_u(x) + 12xS_v(x) = -\frac{x}{x-1} - 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 12\,xL_2 - (13\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-23\,x+1)\,L_2 + 24xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-11\,x^2 - 10\,x + 1\right)S_u(x) = 145\,x + \frac{25\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 1,$$

et :

$$\left(-11\,x^2 - 10\,x + 1\right)S_v(x) = -277\,x - \frac{47\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 11.$$

Il reste à diviser par $-11\,x^2 - 10\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{13}{10\,(x-1)} + \frac{127}{10\,(11\,x-1)} + \frac{13}{x+1},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{23}{10\,(x-1)} + \frac{127}{10\,(11\,x-1)} + \frac{26}{x+1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t=x$, $t=11\,x$ et $t=-x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{11}$ pour bien avoir $|t|<1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{13}{10}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{127}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}(11\,x)^n + 13\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{127}{10}\cdot 11^n + 13\,(-1)^n - \frac{13}{10}\right)x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{127}{10}\cdot 11^n + 26\,(-1)^n - \frac{23}{10}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{127}{10} \cdot 11^n + 13\,(-1)^n - \frac{13}{10}, \quad v_n = -\frac{127}{10} \cdot 11^n + 26\,(-1)^n - \frac{23}{10}.$$

Corrigé 26. ← page 14

1. L'application $x \mapsto x^2 - 2x - \frac{3}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{5}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - 2r - \frac{3}{2} = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{10} + 1$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 11$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 11$ et $|u_1| = 11 \leqslant 11\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 11\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 11\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left| \frac{4u_{n+1}}{n+2} + \frac{-3u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\
&\leqslant \frac{4u_{n+1}}{n+2} + \frac{3u_n}{(n+2)(n+1)} \\
&\leqslant 22\,r^{n+1} + \frac{33}{2}\,r^n \\
&= 11\,r^n \left(2\,r + \frac{3}{2}\right) \\
&= 11\,r^{n+2},
\end{aligned}$$
   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 2\,r + \frac{3}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$
   On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned}
S''(x) - 4S'(x) + 3S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - 4(n+1) u_{n+1} + 3u_n\right) x^n = 0,
\end{aligned}$$
   d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 4\,x + 3 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 3 et 1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(3\,x)} + be^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 2$, et : $S'(0) = u_1 = 11$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = 3\,a + b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 2 \\ 3a & + & b & = & 11 \end{array}\right.$$
Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ donnent respectivement $a = \frac{9}{2}$ et $b = -\frac{5}{2}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{9}{2}\, e^{(3\,x)} - \frac{5}{2}\, e^x$, d'où le résultat.
5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{9}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3\,x)^n}{n!} - \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{9 \cdot 3^n}{2\,n!} - \frac{5}{2\,n!} \right) x^n. \end{aligned}$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{9 \cdot 3^n}{2\,n!} - \frac{5}{2\,n!}.$$

Corrigé 27. ← page 15

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{3}{2}\,x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{3}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{3}{2}\,r - 1 = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = 2$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 0$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ et $|u_1| = 0 \leqslant 2\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{3u_{n+1}}{n+2} + \frac{-2u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\ &\leqslant \frac{3u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 3\,r^{n+1} + 2\,r^n \\ &= 2\,r^n \left(\frac{3}{2} r + 1 \right) \\ &= 2\,r^{n+2}, \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{3}{2}\,r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n{+}1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n{-}1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n{+}2)(n{+}1) u_{n+2} x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) - 3S'(x) + 2S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)u_{n+2} - 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n\right) x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 3\,x + 2 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 2 et 1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(2\,x)} + be^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 2$, et : $S'(0) = u_1 = 0$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = 2\,a + b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 2 \\ 2a & + & b & = & 0 \end{array} \right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donnent respectivement $a = -2$ et $b = 4$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -2\,e^{(2\,x)} + 4\,e^x$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^n}{n!} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2 \cdot 2^n}{n!} + \frac{4}{n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{2 \cdot 2^n}{n!} + \frac{4}{n!}.$$

Corrigé 28. ← page 15

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{5}{2}\,x - 3$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{9}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{5}{2}\,r - 3 = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{4}\sqrt{73} + \frac{5}{4}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 3$ et $u_1 = 14$, si bien que : $|u_0| = 3 \leqslant 14$ et $|u_1| = 14 \leqslant 14\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 14\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 14\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left|\frac{5u_{n+1}}{n+2} + \frac{-6u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{5u_{n+1}}{n+2} + \frac{6u_n}{(n+2)(n+1)} \\
&\leqslant 35\,r^{n+1} + 42\,r^n \\
&= 14\,r^n\left(\frac{5}{2}\,r + 3\right) \\
&= 14\,r^{n+2},
\end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{5}{2}\,r + 3$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n{+}1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n{-}1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n{+}2)(n{+}1) u_{n+2} x^n.$$
On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned}
S''(x) - 5S'(x) + 6S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - 5(n+1) u_{n+1} + 6u_n\right) x^n = 0,
\end{aligned}$$
d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 5\,x + 6 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 3 et 2. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel

que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(3\,x)} + be^{(2\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 3$, et : $S'(0) = u_1 = 14$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = 3\,a + 2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 3 \\ 3a & + & 2b & = & 14 \end{array} \right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ donnent respectivement $a = 8$ et $b = -5$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = 8\,e^{(3\,x)} - 5\,e^{(2\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3\,x)^n}{n!} - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{8 \cdot 3^n}{n!} - \frac{5 \cdot 2^n}{n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{8 \cdot 3^n}{n!} - \frac{5 \cdot 2^n}{n!}.$$

Corrigé 29. ← page 16

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $18^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 18^n$ et $|v_n| \leqslant 18^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant |u_n| + 4|v_n| + 13 &\leqslant 18^n + 4 \cdot 18^n + 13 \\ &= 5 \cdot 18^n + 13 \\ &\leqslant 5 \cdot 18^n + 13 \cdot 18^n \\ &\leqslant 18^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 5|v_n| + 3 &\leqslant 2 \cdot 18^n + 5 \cdot 18^n + 3 \\ &= 7 \cdot 18^n + 3 \\ &\leqslant 7 \cdot 18^n + 3 \cdot 18^n \\ &\leqslant 18^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n + 1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 18^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (18\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{18}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{18} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 13 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = x S_u(x) - 4\, x S_v(x) - 13 \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 1$. On a donc montré :

$$(-x+1)\, S_u(x) + 4x S_v(x) = \frac{13\, x}{x-1} - 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 4\, x L_2 - (5\, x + 1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (-x+1)\, L_2 + 2x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(3\, x^2 + 4\, x + 1\right) S_u(x) = 9\, x - \frac{77\, x^2}{x-1} - \frac{13\, x}{x-1} + 1,$$

et :

$$\left(3\, x^2 + 4\, x + 1\right) S_v(x) = -3\, x + \frac{29\, x^2}{x-1} - \frac{3\, x}{x-1} + 1.$$

Il reste à diviser par $3\, x^2 + 4\, x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{45}{4\,(x-1)} - \frac{7}{4\,(3\, x + 1)} + \frac{12}{x+1},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{13}{4\,(x-1)} - \frac{7}{4\,(3\, x + 1)} + \frac{6}{x+1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = -3\, x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{45}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{7}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-3\, x)^n + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(12\ (-1)^n - \frac{7}{4}\ (-3)^n - \frac{45}{4}\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(6\ (-1)^n - \frac{7}{4}\ (-3)^n - \frac{13}{4}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 12\,(-1)^n - \frac{7}{4}\,(-3)^n - \frac{45}{4}, \quad v_n = 6\,(-1)^n - \frac{7}{4}\,(-3)^n - \frac{13}{4}.$$

Corrigé 30. ← page 16

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 0 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $12^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 12^n$ et $|v_n| \leqslant 12^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}|u_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 5|v_n| + 3 &\leqslant 4 \cdot 12^n + 5 \cdot 12^n + 3\\ &= 9 \cdot 12^n + 3\\ &\leqslant 9 \cdot 12^n + 3 \cdot 12^n\\ &\leqslant 12^{n+1},\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}|v_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 5|v_n| + 2 &\leqslant 4 \cdot 12^n + 5 \cdot 12^n + 2\\ &= 9 \cdot 12^n + 2\\ &\leqslant 9 \cdot 12^n + 2 \cdot 12^n\\ &\leqslant 12^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 12^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (12\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{12}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{12} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 4\,x S_u(x) + 5\,x S_v(x) + 3 \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 1$. On a donc montré :

$$(-4\,x + 1)\, S_u(x) - 5x S_v(x) = -\frac{3\,x}{x-1} + 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -5\,x L_2 - (5\,x + 1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (-4\,x + 1)\, L_2 - 4x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\,(x+1)\, S_u(x) = -5\,x + \frac{25\,x^2}{x-1} + \frac{3\,x}{x-1} - 1,$$

et :

$$(x+1)\,S_v(x) = -4\,x + \frac{20\,x^2}{x-1} - \frac{2\,x}{x-1}.$$

Il reste à diviser par $x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -20 - \frac{14}{x-1} + \frac{7}{x+1},$$

et :

$$S_v(x) = -20 + \frac{9}{x-1} - \frac{7}{x+1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -20 + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(7\,(-1)^n + 14\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-7\,(-1)^n - 9\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = 7\,(-1)^n + 14, \quad v_n = -7\,(-1)^n - 9.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 31. ← page 17

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 12$ et $v_0 = -4$, si bien que : $|u_0| = 12 \leqslant 12$, et : $|u_0| = 4 \leqslant 12$ (on rappelle qu'on a $61^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 12 \cdot 61^n$ et $|v_n| \leqslant 12 \cdot 61^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}|u_{n+1}| \leqslant 38|u_n| + 18|v_n| + 5 &\leqslant 456 \cdot 61^n + 216 \cdot 61^n + 5 \\ &= 12\left(56 \cdot 61^n + \frac{5}{12}\right) \\ &\leqslant 12\,(56 \cdot 61^n + 5 \cdot 61^n) \\ &\leqslant 12 \cdot 61^{n+1},\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}|v_{n+1}| \leqslant 36|u_n| + 16|v_n| + 1 &\leqslant 432 \cdot 61^n + 192 \cdot 61^n + 1 \\ &= 12\left(52 \cdot 61^n + \frac{1}{12}\right) \\ &\leqslant 12\,(52 \cdot 61^n + 61^n) \\ &\leqslant 12 \cdot 61^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 61^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (61\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{61}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{61} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -38\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 18\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 5\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -38\,xS_u(x) - 18\,xS_v(x) + 5\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 12$. On a donc montré :

$$(38\,x+1)\,S_u(x) + 18xS_v(x) = -\frac{5\,x}{x-1} + 12.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 18\,xL_2 - (-16\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (38\,x+1)\,L_2 + 36xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(40\,x^2 + 22\,x + 1\right) S_u(x) = 120\,x - \frac{98\,x^2}{x-1} + \frac{5\,x}{x-1} - 12,$$

et :

$$\left(40\,x^2 + 22\,x + 1\right) S_v(x) = 280\,x - \frac{218\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 4.$$

Il reste à diviser par $40\,x^2 + 22\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = \frac{31}{21\,(x-1)} + \frac{409}{21\,(20\,x+1)} - \frac{6}{2\,x+1},$$
et :
$$S_v(x) = -\frac{73}{21\,(x-1)} - \frac{409}{21\,(20\,x+1)} + \frac{12}{2\,x+1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$, $t = -20\,x$ et $t = -2\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{20}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{31}{21}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{409}{21}\sum_{n=0}^{+\infty}(-20\,x)^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty}(-2\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-6\,(-2)^n + \frac{409}{21}\,(-20)^n - \frac{31}{21}\right)x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(12\,(-2)^n - \frac{409}{21}\,(-20)^n + \frac{73}{21}\right)x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -6\,(-2)^n + \frac{409}{21}\,(-20)^n - \frac{31}{21}, \quad v_n = 12\,(-2)^n - \frac{409}{21}\,(-20)^n + \frac{73}{21}.$$

Corrigé 32. ← page 17

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = 2$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 2$, et : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ (on rappelle qu'on a $18^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2 \cdot 18^n$ et $|v_n| \leqslant 2 \cdot 18^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 3|v_n| + 13 \leqslant 4 \cdot 18^n + 6 \cdot 18^n + 13 \\ &= 2\left(5 \cdot 18^n + \frac{13}{2}\right) \\ &\leqslant 2\,(5 \cdot 18^n + 13 \cdot 18^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 18^{n+1}, \end{aligned}$$
et de même :
$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 7|v_n| + 1 \leqslant 12 \cdot 18^n + 14 \cdot 18^n + 1 \\ &= 2\left(13 \cdot 18^n + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqslant 2\,(13 \cdot 18^n + 18^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 18^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 18^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (18\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{18}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{18} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 13 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -2\,x S_u(x) + 3\,x S_v(x) + 13 \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 1$. On a donc montré :

$$(2\,x+1)\, S_u(x) - 3x S_v(x) = -\frac{13\,x}{x-1} - 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -3\,x L_2 - (-7\,x+1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (2\,x+1)\, L_2 - 6x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(4\,x^2 - 5\,x + 1\right) S_u(x) = -13\,x - \frac{88\,x^2}{x-1} + \frac{13\,x}{x-1} + 1,$$

et :

$$\left(4\,x^2 - 5\,x + 1\right) S_v(x) = 10\,x + \frac{76\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} + 2.$$

Il reste à diviser par $4\,x^2 - 5\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{1}{4\,x-1} + \frac{25}{x-1} + \frac{25}{x^2 - 2\,x + 1},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{2}{4\,x-1} + \frac{21}{x-1} + \frac{25}{x^2 - 2\,x + 1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = 4\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{4}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (4\,x)^n - 25\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 25\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (4\,x)^n - 25\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 25\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-4^n + 25\,n)\,x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2\cdot 4^n + 25\,n + 4)\,x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -4^n + 25\,n, \quad v_n = -2\cdot 4^n + 25\,n + 4.$$

Corrigé 33. ← page 18

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = -2$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 2$, et : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ (on rappelle qu'on a $529^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\cdot 529^n$ et $|v_n| \leqslant 2\cdot 529^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 78|u_n| + 11|v_n| &\leqslant 156\cdot 529^n + 22\cdot 529^n \\ &= 2\,(89\cdot 529^n) \\ &\leqslant 2\cdot 529^{n+1}, \end{aligned}$$

   et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 462|u_n| + 65|v_n| + 2 &\leqslant 924\cdot 529^n + 130\cdot 529^n + 2 \\ &= 2\,(527\cdot 529^n + 1) \\ &\leqslant 2\,(527\cdot 529^n + 2\cdot 529^n) \\ &\leqslant 2\cdot 529^{n+1}, \end{aligned}$$

   d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 529^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(529\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{529}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{529} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -78\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 11\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} = -78\,xS_u(x) + 11\,xS_v(x),$$

mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 1$. On a donc montré :

$$(78\,x+1)\,S_u(x) - 11xS_v(x) = -1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -11\,xL_2 - (-65\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (78\,x+1)\,L_2 - 462xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(12\,x^2+13\,x+1\right)S_u(x) = -43\,x + \frac{22\,x^2}{x-1} + 1,$$

et :

$$\left(12\,x^2+13\,x+1\right)S_v(x) = 306\,x - \frac{156\,x^2}{x-1} - \frac{2\,x}{x-1} - 2.$$

Il reste à diviser par $12\,x^2+13\,x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{11}{13\,(x-1)} - \frac{63}{13\,(12\,x+1)} + \frac{3}{x+1},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{79}{13\,(x-1)} - \frac{378}{13\,(12\,x+1)} + \frac{21}{x+1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = -12\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{12}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= \frac{11}{13}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{63}{13}\sum_{n=0}^{+\infty} (-12\,x)^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(3\,(-1)^n - \frac{63}{13}\,(-12)^n + \frac{11}{13}\right)x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(21\,(-1)^n - \frac{378}{13}\,(-12)^n + \frac{79}{13}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3\,(-1)^n - \frac{63}{13}\,(-12)^n + \frac{11}{13}, \quad v_n = 21\,(-1)^n - \frac{378}{13}\,(-12)^n + \frac{79}{13}.$$

Corrigé 34. ← page 19

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -4$ et $v_0 = -3$, si bien que : $|u_0| = 4 \leqslant 4$, et : $|u_0| = 3 \leqslant 4$ (on rappelle qu'on a $11^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4 \cdot 11^n$ et $|v_n| \leqslant 4 \cdot 11^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}|u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 3|v_n| + 5 &\leqslant 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n + 5 \\ &= 4\left(6 \cdot 11^n + \frac{5}{4}\right) \\ &\leqslant 4\,(6 \cdot 11^n + 5 \cdot 11^n) \\ &\leqslant 4 \cdot 11^{n+1},\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}|v_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 2|v_n| + 5 &\leqslant 8 \cdot 11^n + 8 \cdot 11^n + 5 \\ &= 4\left(4 \cdot 11^n + \frac{5}{4}\right) \\ &\leqslant 4\,(4 \cdot 11^n + 5 \cdot 11^n) \\ &\leqslant 4 \cdot 11^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 11^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (11\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{11}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{11} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 5\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -3\,xS_u(x) + 3\,xS_v(x) + 5\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 4$. On a donc montré :

$$(3\,x+1)\,S_u(x) - 3xS_v(x) = -\frac{5\,x}{x-1} - 4.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -3\,xL_2 - (-2\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (3\,x+1)\,L_2 - 2xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\,(x+1)\,S_u(x) = x - \frac{25\,x^2}{x-1} + \frac{5\,x}{x-1} + 4,$$

et :

$$(x+1)\,S_v(x) = -x + \frac{25\,x^2}{x-1} + \frac{5\,x}{x-1} - 3.$$

Il reste à diviser par $x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = 24 + \frac{10}{x-1} - \frac{18}{x+1},$$
et :
$$S_v(x) = 24 + \frac{15}{x-1} - \frac{12}{x+1}.$$
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= 24 - 10\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 18\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= -4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-18\,(-1)^n - 10\right)x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = -3 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-12\,(-1)^n - 15\right)x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = -18\,(-1)^n - 10, \quad v_n = -12\,(-1)^n - 15.$$
Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 35. ← page 19

1. L'application $x \mapsto x^2 - x - \frac{1}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - r - \frac{1}{2} = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $u_1 = 1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ et $|u_1| = 1 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{-2u_{n+1}}{n+2} + \frac{-u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{2u_{n+1}}{n+2} + \frac{u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant r^{n+1} + \frac{1}{2}r^n \\ &= r^n\left(r + \frac{1}{2}\right) \\ &= r^{n+2},\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = r + \frac{1}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned}S''(x) + 2S'(x) + S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 2(n+1)u_{n+1} + u_n\right)x^n = 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 2x + 1 = 0$, dont on vérifie facilement que son unique racine est -1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = (ax + b)e^{(-x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -1$, et : $S'(0) = u_1 = 1$, ce qui nous donne immédiatement $b = -1$ (car on a aussi : $S(0) = b$), puis $a = 0$ (en utilisant le fait qu'après calcul, on ait : $S'(0) = a - b$). En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -e^{(-x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$S(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{(-1)^n}{n!}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Corrigé 36. ← page 20

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $126^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 126^n$ et $|v_n| \leqslant 126^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 30|u_n| + 31|v_n| + 8 &\leqslant 30 \cdot 126^n + 31 \cdot 126^n + 8 \\ &= 61 \cdot 126^n + 8 \\ &\leqslant 61 \cdot 126^n + 8 \cdot 126^n \\ &\leqslant 126^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 62|u_n| + 63|v_n| + 1 &\leqslant 62 \cdot 126^n + 63 \cdot 126^n + 1 \\ &= 125 \cdot 126^n + 1 \\ &\leqslant 125 \cdot 126^n + 126^n \\ &\leqslant 126^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 126^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (126\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{126}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{126} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = -30 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 31 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -30\,x S_u(x) - 31\,x S_v(x) + 8 \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 1$. On a donc montré :

$$(30\,x + 1)\, S_u(x) + 31 x S_v(x) = -\frac{8\,x}{x-1} - 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 31\,xL_2 - (-63\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (30\,x+1)\,L_2 + 62xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\left(32\,x^2 - 33\,x + 1\right) S_u(x) = -94\,x - \frac{535\,x^2}{x-1} + \frac{8\,x}{x-1} + 1,$$
et :
$$\left(32\,x^2 - 33\,x + 1\right) S_v(x) = -92\,x - \frac{526\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 1.$$
Il reste à diviser par $32\,x^2 - 33\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -\frac{53}{31\,(32\,x-1)} + \frac{611}{31\,(x-1)} + \frac{17}{x^2 - 2\,x + 1},$$
et :
$$S_v(x) = \frac{106}{31\,(32\,x-1)} - \frac{602}{31\,(x-1)} - \frac{17}{x^2 - 2\,x + 1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}.$$
En prenant $t = 32\,x$ et $t = x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{32}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= \frac{53}{31} \sum_{n=0}^{+\infty} (32\,x)^n - \frac{611}{31} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 17 \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= \frac{53}{31} \sum_{n=0}^{+\infty} (32\,x)^n - \frac{611}{31} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 17 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{53}{31} \cdot 32^n + 17\,n - \frac{84}{31}\right) x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{106}{31} \cdot 32^n - 17\,n + \frac{75}{31}\right) x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{53}{31} \cdot 32^n + 17\,n - \frac{84}{31}, \quad v_n = -\frac{106}{31} \cdot 32^n - 17\,n + \frac{75}{31}.$$

Corrigé 37. ← page 20

1. L'application $x \mapsto x^3 - 23\,x^2 - 79\,x - 57$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-158 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 23\,r^2 - 79\,r - 57 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0{,}1{,}2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 4$, $u_1 = 0$ et $u_2 = -9$, si bien que : $|u_0| = 4 \leqslant 9$, $|u_1| = 0 \leqslant 9\,r$ et $|u_2| = 9 \leqslant 9\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 9\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 9\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 9\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 23\,|u_{n+2}| + 79\,|u_{n+1}| + 57\,|u_n| \\ &\leqslant 207\,r^{n+2} + 711\,r^{n+1} + 513\,r^n \\ &= 9\,r^n \left(23\,r^2 + 79\,r + 57\right) \\ &= 9\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 23\,r^2 + 79\,r + 57$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} + 23 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+3} + 79 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+3} + 57 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(4 - 9\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(57\,x^3 + 79\,x^2 + 23\,x + 1\right) S(x) + \left(-307\,x^2 - 92\,x - 4\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $57\,x^3 + 79\,x^2 + 23\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{1}{96\,(19\,x + 1)} - \frac{67}{32\,(3\,x + 1)} + \frac{73}{12\,(x + 1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = -3\,x$, $t = -19\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{19}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{96}\sum_{n=0}^{+\infty}(-19\,x)^n - \frac{67}{32}\sum_{n=0}^{+\infty}(-3\,x)^n + \frac{73}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{73}{12}\,(-1)^n - \frac{67}{32}\,(-3)^n + \frac{1}{96}\,(-19)^n\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{73}{12}\,(-1)^n - \frac{67}{32}\,(-3)^n + \frac{1}{96}\,(-19)^n\,.$$

Corrigé 38. ← page 21

1. L'application $x \mapsto x^3 - 14\,x^2 - 39\,x - 54$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-106 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^3 - 14\,r^2 - 39\,r - 54 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0{,}1{,}2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = -4$ et $u_2 = -5$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 5$, $|u_1| = 4 \leqslant 5\,r$ et $|u_2| = 5 \leqslant 5\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 5\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 5\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 5\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 14\,|u_{n+2}| + 39\,|u_{n+1}| + 54\,|u_n| \\ &\leqslant 70\,r^{n+2} + 195\,r^{n+1} + 270\,r^n \\ &= 5\,r^n\left(14\,r^2 + 39\,r + 54\right) \\ &= 5\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 14\,r^2 + 39\,r + 54$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 14\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 39\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} + 54\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \Big(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\Big) = S(x) - \Big(1 - 4\,x - 5\,x^2\Big).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\Big(54\,x^3 + 39\,x^2 - 14\,x + 1\Big)\,S(x) + \Big(-90\,x^2 + 18\,x - 1\Big) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $54\,x^3 + 39\,x^2 - 14\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{6}{7\,(6\,x-1)} - \frac{3}{10\,(9\,x-1)} + \frac{109}{70\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = 9\,x$, $t = 6\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{9}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{6}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}(6\,x)^n + \frac{3}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}(9\,x)^n + \frac{109}{70}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{10}\cdot 9^n - \frac{6}{7}\cdot 6^n + \frac{109}{70}\,(-1)^n\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{10}\cdot 9^n - \frac{6}{7}\cdot 6^n + \frac{109}{70}\,(-1)^n.$$

Corrigé 39. ← page 21

1. L'application $x \mapsto x^3 - 32\,x^2 - 29\,x - 62$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-122 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 32\,r^2 - 29\,r - 62 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0{,}1{,}2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et $u_2 = 5$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 5$, $|u_1| = 1 \leqslant 5\,r$ et $|u_2| = 5 \leqslant 5\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 5\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 5\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 5\,r^{n+2}$.

On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}|u_{n+3}| &\leqslant 32\,|u_{n+2}| + 29\,|u_{n+1}| + 62\,|u_n| \\ &\leqslant 160\,r^{n+2} + 145\,r^{n+1} + 310\,r^n \\ &= 5\,r^n\left(32\,r^2 + 29\,r + 62\right) \\ &= 5\,r^{n+3}\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 32\,r^2 + 29\,r + 62$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 32\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 29\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} + 62\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-1 - x + 5\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(62\,x^3 + 29\,x^2 - 32\,x + 1\right) S(x) + \left(-8\,x^2 - 31\,x + 1\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $62\,x^3 + 29\,x^2 - 32\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{22}{29\,(2\,x-1)} - \frac{1}{116\,(31\,x-1)} - \frac{1}{4\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = 2\,x$, $t = -x$ et $t = 31\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{31}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}S(x) &= -\frac{22}{29}\sum_{n=0}^{+\infty}(2\,x)^n + \frac{1}{116}\sum_{n=0}^{+\infty}(31\,x)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{116}\cdot 31^n - \frac{22}{29}\cdot 2^n - \frac{1}{4}\,(-1)^n\right)x^n.\end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{116} \cdot 31^n - \frac{22}{29} \cdot 2^n - \frac{1}{4}\,(-1)^n\,.$$

Corrigé 40. ← page 22

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{3}{2}\,x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{3}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{3}{2}\,r - 1 = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = 2$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $u_1 = -6$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 6$ et $|u_1| = 6 \leqslant 6\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 6\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 6\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left|\frac{3u_{n+1}}{n+2} + \frac{-2u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{3u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 9\,r^{n+1} + 6\,r^n \\ &= 6\,r^n\left(\frac{3}{2}\,r + 1\right) \\ &= 6\,r^{n+2}, \end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{3}{2}\,r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R,R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$
On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$:
$$\begin{aligned} S''(x) - 3S'(x) + 2S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)u_{n+2} - 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n\right) x^n = 0, \end{aligned}$$
d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 3\,x + 2 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 1 et 2. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = be^{(2\,x)} + ae^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 0$, et : $S'(0) = u_1 = -6$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = a + 2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :
$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ a & + & 2b & = & -6 \end{array}\right.$$
Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donnent respectivement $a = 6$ et $b = -6$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -6\,e^{(2\,x)} + 6\,e^x$, d'où le résultat.
5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :
$$\begin{aligned} S(x) &= 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{6 \cdot 2^n}{n!} + \frac{6}{n!}\right) x^n. \end{aligned}$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{6 \cdot 2^n}{n!} + \frac{6}{n!}.$$

Corrigé 41. ← page 22

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$ et $v_0 = -4$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 4$, et : $|u_0| = 4 \leqslant 4$ (on rappelle qu'on a $16^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4 \cdot 16^n$ et $|v_n| \leqslant 4 \cdot 16^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 3|v_n| + 3 &\leqslant 12 \cdot 16^n + 12 \cdot 16^n + 3 \\ &= 4\left(6 \cdot 16^n + \frac{3}{4}\right) \\ &\leqslant 4\,(6 \cdot 16^n + 3 \cdot 16^n) \\ &\leqslant 4 \cdot 16^{n+1}, \end{aligned}$$
et de même :
$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 6|v_n| + 4 &\leqslant 24 \cdot 16^n + 24 \cdot 16^n + 4 \\ &= 4\,(12 \cdot 16^n + 1) \\ &\leqslant 4\,(12 \cdot 16^n + 4 \cdot 16^n) \\ &\leqslant 4 \cdot 16^{n+1}, \end{aligned}$$
d'où le résultat au rang $n + 1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont

supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 16^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (16\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{16}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{16} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -3\,xS_u(x) + 3\,xS_v(x) + 3\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 2$. On a donc montré :

$$(3\,x+1)\,S_u(x) - 3xS_v(x) = -\frac{3\,x}{x-1} + 2.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -3\,xL_2 - (-6\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (3\,x+1)\,L_2 - 6xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-(-3\,x+1)\,S_u(x) = 24\,x - \frac{30\,x^2}{x-1} + \frac{3\,x}{x-1} - 2,$$

et :

$$(-3\,x+1)\,S_v(x) = -24\,x + \frac{30\,x^2}{x-1} + \frac{4\,x}{x-1} - 4.$$

Il reste à diviser par $-3\,x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -2 - \frac{27}{2\,(x-1)} + \frac{19}{2\,(3\,x-1)},$$

et :

$$S_v(x) = -2 - \frac{17}{x-1} + \frac{19}{3\,x-1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$ et $t = 3\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -2 + \frac{27}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{19}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (3\,x)^n \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{19}{2}\cdot 3^n + \frac{27}{2}\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = -4 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-19\cdot 3^n + 17)\,x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n = -\frac{19}{2}\cdot 3^n + \frac{27}{2}, \quad v_n = -19\cdot 3^n + 17.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 42. ← page 23

1. L'application $x \mapsto x^3 - 4\,x^2 - 5\,x - 2$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-10 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 4\,r^2 - 5\,r - 2 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$, $u_1 = -2$ et $u_2 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 2$, $|u_1| = 2 \leqslant 2\,r$ et $|u_2| = 0 \leqslant 2\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 2\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 4\,|u_{n+2}| + 5\,|u_{n+1}| + 2\,|u_n| \\ &\leqslant 8\,r^{n+2} + 10\,r^{n+1} + 4\,r^n \\ &= 2\,r^n\left(4\,r^2 + 5\,r + 2\right) \\ &= 2\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 4\,r^2 + 5\,r + 2$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 5\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - (-1 - 2\,x)\,.$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-2\,x^3 + 5\,x^2 - 4\,x + 1\right) S(x) + \left(-3\,x^2 - 2\,x + 1\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-2\,x^3 + 5\,x^2 - 4\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = -\frac{3}{2\,x-1} - \frac{4}{x^2 - 2\,x + 1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = 2\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(3\cdot 2^n - 4\,n - 4\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3\cdot 2^n - 4\,n - 4.$$

Corrigé 43. ← page 23

1. L'application $x \mapsto x^2 - 6\,x - \frac{11}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{21}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - 6\,r - \frac{11}{2} = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{58} + 3$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -10$ et $u_1 = -1$, si bien que : $|u_0| = 10 \leqslant 10$ et $|u_1| = 1 \leqslant 10\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 10\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 10\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{12u_{n+1}}{n+2} + \frac{-11u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\ &\leqslant \frac{12u_{n+1}}{n+2} + \frac{11u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 60\,r^{n+1} + 55\,r^n \\ &= 10\,r^n \left(6\,r + \frac{11}{2}\right) \\ &= 10\,r^{n+2}, \end{aligned}$$

   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 6\,r + \frac{11}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

   On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) - 12S'(x) + 11S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - 12 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n + 11 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - 12(n+1) u_{n+1} + 11 u_n\right) x^n = 0, \end{aligned}$$

   d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 12\,x + 11 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 11 et 1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(11\,x)} + be^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -10$, et : $S'(0) = u_1 = -1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = 11\,a + b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -10 \\ 11a & + & b & = & -1 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 11L_1$ donnent respectivement $a = \frac{9}{10}$ et $b = -\frac{109}{10}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{9}{10}\,e^{(11\,x)} - \frac{109}{10}\,e^x$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(11\,x)^n}{n!} - \frac{109}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{9\cdot 11^n}{10\,n!} - \frac{109}{10\,n!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{9\cdot 11^n}{10\,n!} - \frac{109}{10\,n!}.$$

Corrigé 44. ← page 24

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -2$ et $v_0 = 6$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 6$, et : $|u_0| = 6 \leqslant 6$ (on rappelle qu'on a $6^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 6 \cdot 6^n$ et $|v_n| \leqslant 6 \cdot 6^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant |u_n| + 2|v_n| + 3 &\leqslant 6\cdot 6^n + 12\cdot 6^n + 3 \\ &= 6\left(3\cdot 6^n + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqslant 6\,(3\cdot 6^n + 3\cdot 6^n) \\ &\leqslant 6\cdot 6^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant |u_n| + 2|v_n| + 1 &\leqslant 6\cdot 6^n + 12\cdot 6^n + 1 \\ &= 6\left(3\cdot 6^n + \frac{1}{6}\right) \\ &\leqslant 6\,(3\cdot 6^n + 6^n) \\ &\leqslant 6\cdot 6^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 6^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(6\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{6}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{6} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = x S_u(x) - 2\, x S_v(x) - 3 \frac{x}{1-x},$$
mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 2$. On a donc montré :
$$(-x+1)\, S_u(x) + 2x S_v(x) = \frac{3\,x}{x-1} - 2.$$
On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 2\,xL_2 - (2\,x+1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (-x+1)\, L_2 + xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\,(x+1)\, S_u(x) = 16\,x - \frac{4\,x^2}{x-1} - \frac{3\,x}{x-1} + 2,$$
et :
$$(x+1)\, S_v(x) = -8\,x + \frac{2\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 6.$$
Il reste à diviser par $x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.
4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -12 + \frac{7}{2\,(x-1)} + \frac{27}{2\,(x+1)},$$
et :
$$S_v(x) = -12 + \frac{3}{2\,(x-1)} + \frac{27}{2\,(x+1)}.$$
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -12 - \frac{7}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{27}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= -2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{27}{2}\, (-1)^n - \frac{7}{2} \right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = 6 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{27}{2}\,(-1)^n - \frac{3}{2}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \frac{27}{2}\,(-1)^n - \frac{7}{2}, \quad v_n = \frac{27}{2}\,(-1)^n - \frac{3}{2}.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 45. ← page 24

1. L'application $x \mapsto x^2 - x - \frac{1}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - r - \frac{1}{2} = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 3$ et $u_1 = -1$, si bien que : $|u_0| = 3 \leqslant 3$ et $|u_1| = 1 \leqslant 3\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 3\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 3\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{-2u_{n+1}}{n+2} + \frac{-u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\ &\leqslant \frac{2u_{n+1}}{n+2} + \frac{u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 3\,r^{n+1} + \frac{3}{2}\,r^n \\ &= 3\,r^n \left(r + \frac{1}{2}\right) \\ &= 3\,r^{n+2}, \end{aligned}$$

   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = r + \frac{1}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$S''(x) + 2S'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 2(n+1)u_{n+1} + u_n\right)x^n = 0,$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 2\,x + 1 = 0$, dont on vérifie facilement que son unique racine est -1. On en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = (ax+b)e^{(-x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 3$, et : $S'(0) = u_1 = -1$, ce qui nous donne immédiatement $b = 3$ (car on a aussi : $S(0) = b$), puis $a = 2$ (en utilisant le fait qu'après calcul, on ait : $S'(0) = a - b$). En conclusion, pour tout $x \in]-R,R[$ on a : $S(x) = (2\,x+3)e^{(-x)}$, d'où le résultat.
5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R,R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$S(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{(n-1)!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,(-x)^n}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{(-1)^n\,(2\,n-3)}{n!}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{(-1)^n\,(2\,n-3)}{n!}.$$

Corrigé 46. ← page 25

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -12$ et $v_0 = -22$, si bien que : $|u_0| = 12 \leqslant 22$, et : $|u_0| = 22 \leqslant 22$ (on rappelle qu'on a $12^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 22 \cdot 12^n$ et $|v_n| \leqslant 22 \cdot 12^n$. D'après $(*)$, on a :

$$|u_{n+1}| \leqslant 8|u_n| + 3|v_n| + 1 \leqslant 176 \cdot 12^n + 66 \cdot 12^n + 1$$
$$= 22\left(11 \cdot 12^n + \frac{1}{22}\right)$$
$$\leqslant 22\,(11 \cdot 12^n + 12^n)$$
$$\leqslant 22 \cdot 12^{n+1},$$

et de même :

$$|v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + |v_n| \leqslant 132 \cdot 12^n + 22 \cdot 12^n$$
$$= 22\,(7 \cdot 12^n)$$
$$\leqslant 22 \cdot 12^{n+1},$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 12^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (12\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{12}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{12} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 8\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 8\,xS_u(x) - 3\,xS_v(x) + \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 12$. On a donc montré :

$$(-8\,x+1)\,S_u(x) + 3xS_v(x) = -\frac{x}{x-1} - 12.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 3\,xL_2 - (x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-8\,x+1)\,L_2 + 6xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(10\,x^2 - 7\,x + 1\right) S_u(x) = -54\,x + \frac{x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 12,$$

et :

$$\left(10\,x^2 - 7\,x + 1\right) S_v(x) = 104\,x - \frac{6\,x^2}{x-1} - 22.$$

Il reste à diviser par $10\,x^2 - 7\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{1}{2\,(x-1)} + \frac{11}{2\,x-1} + \frac{3}{2\,(5\,x-1)},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{3}{2\,(x-1)} + \frac{22}{2\,x-1} + \frac{3}{2\,(5\,x-1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = 2\,x$ et $t = 5\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{5}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 11\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (5\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{2}\cdot 5^n - 11\cdot 2^n + \frac{1}{2}\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{2} \cdot 5^n - 22 \cdot 2^n + \frac{3}{2}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{3}{2} \cdot 5^n - 11 \cdot 2^n + \frac{1}{2}, \quad v_n = -\frac{3}{2} \cdot 5^n - 22 \cdot 2^n + \frac{3}{2}.$$

Corrigé 47. ← page 25

1. L'application $x \mapsto x^3 - 3\,x^2 - x - 3$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-6 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 3\,r^2 - r - 3 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$, $u_1 = -12$ et $u_2 = -4$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 12$, $|u_1| = 12 \leqslant 12\,r$ et $|u_2| = 4 \leqslant 12\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 12\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 12\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 12\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 3\,|u_{n+2}| + |u_{n+1}| + 3\,|u_n| \\ &\leqslant 36\,r^{n+2} + 12\,r^{n+1} + 36\,r^n \\ &= 12\,r^n \left(3\,r^2 + r + 3\right) \\ &= 12\,r^{n+3} \end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 3\,r^2 + r + 3$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+3} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$
Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-12\,x - 4\,x^2\right).$$
On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :
$$\left(3\,x^3 - x^2 - 3\,x + 1\right) S(x) + \left(-32\,x^2 + 12\,x\right) = 0,$$
d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $3\,x^3 - x^2 - 3\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{5}{x-1} + \frac{1}{2\,(3\,x-1)} + \frac{11}{2\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = 3\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -5\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n + \frac{11}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot 3^n + \frac{11}{2}\,(-1)^n - 5\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{2}\cdot 3^n + \frac{11}{2}\,(-1)^n - 5.$$

Corrigé 48. ← page 26

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $5^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 5^n$ et $|v_n| \leqslant 5^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + |v_n| + 1 &\leqslant 3\cdot 5^n + 5^n + 1 \\ &= 4\cdot 5^n + 1 \\ &\leqslant 4\cdot 5^n + 5^n \\ &\leqslant 5^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 2|u_n| &\leqslant 2\cdot 5^n \\ &= 2\cdot 5^n \\ &\leqslant 5^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 5^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(5\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{5}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{5} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 3\,xS_u(x) - xS_v(x) - \frac{x}{1-x},$$
mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :
$$(-3\,x + 1)\,S_u(x) + xS_v(x) = \frac{x}{x-1}.$$
On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow xL_2 - (1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-3\,x+1)\,L_2 + 2xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\left(2\,x^2 - 3\,x + 1\right)S_u(x) = x - \frac{x}{x-1},$$
et :
$$\left(2\,x^2 - 3\,x + 1\right)S_v(x) = -3\,x + \frac{2\,x^2}{x-1} + 1.$$
Il reste à diviser par $2\,x^2 - 3\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.
4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = \frac{3}{2\,x-1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 2\,x + 1},$$
et :
$$S_v(x) = \frac{3}{2\,x-1} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x^2 - 2\,x + 1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ et $t = 2\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= -3\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-3\cdot 2^n + n + 3)\,x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-3 \cdot 2^n + 2\,n + 4)\, x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3 \cdot 2^n + n + 3, \quad v_n = -3 \cdot 2^n + 2\,n + 4.$$

Corrigé 49. ← page 27

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$ et $v_0 = -2$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$, et : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ (on rappelle qu'on a $9^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2 \cdot 9^n$ et $|v_n| \leqslant 2 \cdot 9^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 2|v_n| + 2 &\leqslant 6 \cdot 9^n + 4 \cdot 9^n + 2 \\ &= 2\,(5 \cdot 9^n + 1) \\ &\leqslant 2\,(5 \cdot 9^n + 2 \cdot 9^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 9^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 3|v_n| + 2 &\leqslant 8 \cdot 9^n + 6 \cdot 9^n + 2 \\ &= 2\,(7 \cdot 9^n + 1) \\ &\leqslant 2\,(7 \cdot 9^n + 2 \cdot 9^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 9^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n + 1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 9^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (9\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{9}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{9} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = -3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -3\,x S_u(x) - 2\,x S_v(x) - 2 \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 2$. On a donc montré :

$$(3\,x + 1)\, S_u(x) + 2x S_v(x) = \frac{2\,x}{x-1} + 2.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 2\,xL_2 - (-3\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (3\,x+1)\,L_2 + 4xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\left(-x^2+1\right) S_u(x) = 2\,x + \frac{10\,x^2}{x-1} - \frac{2\,x}{x-1} - 2,$$
et :
$$\left(-x^2+1\right) S_v(x) = 2\,x + \frac{14\,x^2}{x-1} + \frac{2\,x}{x-1} - 2.$$
Il reste à diviser par $-x^2+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = \frac{5}{x+1} + \frac{7}{x-1} + \frac{4}{x^2-2\,x+1},$$
et :
$$S_v(x) = -\frac{5}{x+1} - \frac{11}{x-1} - \frac{8}{x^2-2\,x+1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= 5\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n - 7\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= 5\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n - 7\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(5\,(-1)^n + 4\,n - 3\right) x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-5\,(-1)^n - 8\,n + 3\right) x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5\,(-1)^n + 4\,n - 3, \quad v_n = -5\,(-1)^n - 8\,n + 3.$$

Corrigé 50. ← page 27

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $v_0 = -2$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 2$, et : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ (on rappelle qu'on a $315^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2 \cdot 315^n$ et $|v_n| \leqslant 2 \cdot 315^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}|u_{n+1}| \leqslant 79|u_n| + 234|v_n| + 2 \leqslant 158 \cdot 315^n + 468 \cdot 315^n + 2 \\ &= 2\,(313 \cdot 315^n + 1) \\ &\leqslant 2\,(313 \cdot 315^n + 2 \cdot 315^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 315^{n+1},\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}|v_{n+1}| \leqslant 39|u_n| + 116|v_n| + 1 \leqslant 78 \cdot 315^n + 232 \cdot 315^n + 1 \\ &= 2\left(155 \cdot 315^n + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqslant 2\,(155 \cdot 315^n + 315^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 315^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 315^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (315\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{315}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{315} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 79\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 234\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 79\,xS_u(x) - 234\,xS_v(x) + 2\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 1$. On a donc montré :

$$(-79\,x + 1)\,S_u(x) + 234xS_v(x) = -\frac{2\,x}{x-1} + 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 234\,xL_2 - (116\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-79\,x+1)\,L_2 + 39xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-38\,x^2 + 37\,x + 1\right) S_u(x) = -584\,x + \frac{466\,x^2}{x-1} + \frac{2\,x}{x-1} - 1,$$

et :

$$\left(-38\,x^2 + 37\,x + 1\right) S_v(x) = 197\,x - \frac{157\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} - 2.$$

Il reste à diviser par $-38\,x^2 + 37\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -\frac{536}{39\,(38\,x+1)} - \frac{107}{39\,(x-1)} + \frac{12}{x^2-2\,x+1},$$
et :
$$S_v(x) = -\frac{268}{39\,(38\,x+1)} - \frac{34}{39\,(x-1)} + \frac{4}{x^2-2\,x+1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1,1[,\quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n,\quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ et $t = -38\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{38}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{536}{39}\sum_{n=0}^{+\infty}(-38\,x)^n + \frac{107}{39}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 12\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= -\frac{536}{39}\sum_{n=0}^{+\infty}(-38\,x)^n + \frac{107}{39}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 12\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1) x^{n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{536}{39}\,(-38)^n + 12\,n + \frac{575}{39}\right)x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{268}{39}\,(-38)^n + 4\,n + \frac{190}{39}\right)x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = -\frac{536}{39}\,(-38)^n + 12\,n + \frac{575}{39},\quad v_n = -\frac{268}{39}\,(-38)^n + 4\,n + \frac{190}{39}.$$

Corrigé 51. ← page 28

1. L'application $x \mapsto x^3 - 2\,x^2 - 5\,x - 6$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-12 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^3 - 2\,r^2 - 5\,r - 6 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -4$, $u_1 = 0$ et $u_2 = -1$, si bien que: $|u_0| = 4 \leqslant 4$, $|u_1| = 0 \leqslant 4\,r$ et $|u_2| = 1 \leqslant 4\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 4\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 4\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence:
$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 2\,|u_{n+2}| + 5\,|u_{n+1}| + 6\,|u_n| \\ &\leqslant 8\,r^{n+2} + 20\,r^{n+1} + 24\,r^n \\ &= 4\,r^n \left(2\,r^2 + 5\,r + 6\right) \\ &= 4\,r^{n+3} \end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a: $r^3 = 2\,r^2 + 5\,r + 6$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi: $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+3} - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+3} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$
Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-4 - x^2\right).$$
On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors:
$$\left(-6\,x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 1\right) S(x) + \left(-19\,x^2 + 8\,x + 4\right) = 0,$$
d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-6\,x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).
4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0:
$$S(x) = \frac{13}{15\,(2\,x - 1)} + \frac{7}{10\,(3\,x + 1)} - \frac{23}{6\,(x + 1)}.$$
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = 2\,x$, $t = -3\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition

en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{13}{15}\sum_{n=0}^{+\infty}(2\,x)^n + \frac{7}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}(-3\,x)^n - \frac{23}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{13}{15}\cdot 2^n - \frac{23}{6}\,(-1)^n + \frac{7}{10}\,(-3)^n\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{13}{15}\cdot 2^n - \frac{23}{6}\,(-1)^n + \frac{7}{10}\,(-3)^n\,.$$

Corrigé 52. ← page 28

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n=0$, puisque par hypothèse on a $u_0=0$ et $v_0=0$, si bien que : $|u_0|=0\leqslant 1$, et : $|u_0|=0\leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $15^0=1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n|\leqslant 15^n$ et $|v_n|\leqslant 15^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 4|v_n| + 5 &\leqslant 6\cdot 15^n + 4\cdot 15^n + 5 \\ &= 10\cdot 15^n + 5 \\ &\leqslant 10\cdot 15^n + 5\cdot 15^n \\ &\leqslant 15^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 2 &\leqslant 2\cdot 15^n + 2 \\ &= 2\cdot 15^n + 2 \\ &\leqslant 2\cdot 15^n + 2\cdot 15^n \\ &\leqslant 15^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 15^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(15\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{15}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{15} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x\in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 6\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 6\,xS_u(x) + 4\,xS_v(x) - 5\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :

$$(-6\,x+1)\,S_u(x) - 4xS_v(x) = \frac{5\,x}{x-1}.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -4\,x L_2 - (1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-6\,x+1)\,L_2 - 2xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(8\,x^2 - 6\,x + 1\right) S_u(x) = -\frac{8\,x^2}{x-1} - \frac{5\,x}{x-1},$$

et :

$$\left(8\,x^2 - 6\,x + 1\right) S_v(x) = -\frac{22\,x^2}{x-1} + \frac{2\,x}{x-1}.$$

Il reste à diviser par $8\,x^2 - 6\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{13}{3\,(x-1)} - \frac{9}{2\,x-1} + \frac{14}{3\,(4\,x-1)},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{20}{3\,(x-1)} + \frac{9}{2\,x-1} - \frac{7}{3\,(4\,x-1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = 2\,x$ et $t = 4\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{4}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{13}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 9\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n - \frac{14}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} (4\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{14}{3}\cdot 4^n + 9\cdot 2^n - \frac{13}{3}\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{3}\cdot 4^n - 9\cdot 2^n + \frac{20}{3}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{14}{3}\cdot 4^n + 9\cdot 2^n - \frac{13}{3}, \quad v_n = \frac{7}{3}\cdot 4^n - 9\cdot 2^n + \frac{20}{3}.$$

Corrigé 53. ← page 29

1. L'application $x \mapsto x^2 - 25\,x - 168$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-192 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^2 - 25\,r - 168 = 0$. D'où le résultat. On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{1297} + \frac{25}{2}$.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ et $|u_1| = 1 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{50u_{n+1}}{n+2} + \frac{336u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{50u_{n+1}}{n+2} + \frac{336u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 25\,r^{n+1} + 168\,r^n \\ &= r^n\,(25\,r + 168) \\ &= r^{n+2},\end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 25\,r + 168$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$
On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned}S''(x) - 50S'(x) - 336S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n - 50\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n - 336\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)u_{n+2} - 50(n+1)u_{n+1} - 336u_n\right) x^n = 0,\end{aligned}$$
d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 50\,x - 336 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -6 et 56. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = be^{(56\,x)} + ae^{(-6\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 1$, et : $S'(0) = u_1 = -1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a+b$ et $S'(0) = -6\,a + 56\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 1 \\ -\ 6a & + & 56b & = & -1 \end{array}\right.$$
Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 56L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + 6L_1$ donnent respectivement $a = \frac{57}{62}$ et $b = \frac{5}{62}$.
En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{5}{62}\,e^{(56\,x)} + \frac{57}{62}\,e^{(-6\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{57}{62} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-6\,x)^n}{n!} + \frac{5}{62} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(56\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5 \cdot 56^n}{62\,n!} + \frac{57\,(-6)^n}{62\,n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5 \cdot 56^n}{62\,n!} + \frac{57\,(-6)^n}{62\,n!}.$$

Corrigé 54. ← page 29

1. L'application $x \mapsto x^3 - x^2 - 4\,x - 4$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-8 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - r^2 - 4\,r - 4 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 8$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$, si bien que : $|u_0| = 8 \leqslant 8$, $|u_1| = 0 \leqslant 8\,r$ et $|u_2| = 0 \leqslant 8\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 8\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 8\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 8\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant |u_{n+2}| + 4\,|u_{n+1}| + 4\,|u_n| \\ &\leqslant 8\,r^{n+2} + 32\,r^{n+1} + 32\,r^n \\ &= 8\,r^n \left(r^2 + 4\,r + 4 \right) \\ &= 8\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = r^2 + 4\,r + 4$. D'où le résultat au rang $n + 3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+3} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+3} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 \right) = S(x) - (8)\,.$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-4\,x^3-4\,x^2+x+1\right)S(x)+\left(32\,x^2-8\,x-8\right)=0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-4\,x^3-4\,x^2+x+1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x)=-\frac{4}{3\,(2\,x-1)}-\frac{4}{2\,x+1}+\frac{32}{3\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t\in]-1{,}1[,\qquad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n.$$

En prenant $t=2\,x$, $t=-2\,x$ et $t=-x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x|<\frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t|<1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(2\,x)^n-4\sum_{n=0}^{+\infty}(-2\,x)^n+\frac{32}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\cdot 2^n+\frac{32}{3}\,(-1)^n-4\,(-2)^n\right)x^n.\end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x\in]-R,R[,\ S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{4}{3}\cdot 2^n+\frac{32}{3}\,(-1)^n-4\,(-2)^n\,.$$

Corrigé 55. ← page 30

1. L'application $x\mapsto x^3-3\,x^2-25\,x-21$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-48<0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x\to+\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r\in[1,+\infty[$ tel que : $r^3-3\,r^2-25\,r-21=0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n\in\{0{,}1{,}2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0=2$, $u_1=6$ et $u_2=1$, si bien que : $|u_0|=2\leqslant 6$, $|u_1|=6\leqslant 6\,r$ et $|u_2|=1\leqslant 6\,r^2$ (rappelons que nous avons $r\geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n|\leqslant 6\,r^n$, $|u_{n+1}|\leqslant 6\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}|\leqslant 6\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}|u_{n+3}|&\leqslant 3\,|u_{n+2}|+25\,|u_{n+1}|+21\,|u_n|\\&\leqslant 18\,r^{n+2}+150\,r^{n+1}+126\,r^n\\&=6\,r^n\left(3\,r^2+25\,r+21\right)\\&=6\,r^{n+3}\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 3\,r^2 + 25\,r + 21$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - 25\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} + 21\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(2 + 6\,x + x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(21\,x^3 - 25\,x^2 + 3\,x + 1\right) S(x) + \left(31\,x^2 - 12\,x - 2\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $21\,x^3 - 25\,x^2 + 3\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = -\frac{17}{16\,(x-1)} - \frac{23}{20\,(3\,x-1)} - \frac{17}{80\,(7\,x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = 3\,x$ et $t = -7\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{7}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{17}{16}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{23}{20}\sum_{n=0}^{+\infty} (3\,x)^n - \frac{17}{80}\sum_{n=0}^{+\infty} (-7\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{23}{20}\cdot 3^n - \frac{17}{80}\,(-7)^n + \frac{17}{16}\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{23}{20}\cdot 3^n - \frac{17}{80}\,(-7)^n + \frac{17}{16}.$$

Corrigé 56. ← page 31

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{3}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{3}{2}r - 1 = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = 2$.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 4$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 4$ et $|u_1| = 4 \leqslant 4r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 4r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{-3u_{n+1}}{n+2} + \frac{-2u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{3u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 6\,r^{n+1} + 4\,r^n \\ &= 4\,r^n\left(\frac{3}{2}r + 1\right) \\ &= 4\,r^{n+2},\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{3}{2}r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned}S''(x) + 3S'(x) + 2S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n\right)x^n = 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 3x + 2 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -1 et -2. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(-x)} + be^{(-2x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous

suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 0$, et : $S'(0) = u_1 = 4$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a+b$ et $S'(0) = -a-2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ -\ a & - & 2b & = & 4 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donnent respectivement $a = 4$ et $b = -4$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = 4\,e^{(-x)} - 4\,e^{(-2\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4\,(-1)^n}{n!} - \frac{4\,(-2)^n}{n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4\,(-1)^n}{n!} - \frac{4\,(-2)^n}{n!}.$$

Corrigé 57. ← page 31

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 2$ (on rappelle qu'on a $20^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2 \cdot 20^n$ et $|v_n| \leqslant 2 \cdot 20^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 5|u_n| + 12|v_n| + 1 &\leqslant 10 \cdot 20^n + 24 \cdot 20^n + 1 \\ &= 2\left(17 \cdot 20^n + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqslant 2\,(17 \cdot 20^n + 20^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 20^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 13|v_n| + 1 &\leqslant 12 \cdot 20^n + 26 \cdot 20^n + 1 \\ &= 2\left(19 \cdot 20^n + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqslant 2\,(19 \cdot 20^n + 20^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 20^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 20^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (20\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{20}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{20} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -5\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 12\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -5\,xS_u(x) - 12\,xS_v(x) - \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 2$. On a donc montré :

$$(5\,x+1)\,S_u(x) + 12xS_v(x) = \frac{x}{x-1} + 2.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 12\,xL_2 - (-13\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (5\,x+1)\,L_2 + 6xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(7\,x^2 - 8\,x + 1\right)S_u(x) = 38\,x + \frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 2,$$

et :

$$\left(7\,x^2 - 8\,x + 1\right)S_v(x) = 17\,x + \frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} + 1.$$

Il reste à diviser par $7\,x^2 - 8\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{37}{6\,(x-1)} + \frac{25}{6\,(7\,x-1)},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{19}{6\,(x-1)} - \frac{25}{6\,(7\,x-1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$ et $t = 7\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{7}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= \frac{37}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{25}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} (7\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{25}{6}\cdot 7^n + \frac{37}{6}\right)x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{25}{6}\cdot 7^n - \frac{19}{6}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{25}{6}\cdot 7^n + \frac{37}{6}, \quad v_n = \frac{25}{6}\cdot 7^n - \frac{19}{6}.$$

Corrigé 58. ← page 32

1. L'application $x \mapsto x^3 - 5\,x^2 - 7\,x - 3$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-14 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^3 - 5\,r^2 - 7\,r - 3 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $u_2 = -1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$, $|u_1| = 1 \leqslant r$ et $|u_2| = 1 \leqslant r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 5\,|u_{n+2}| + 7\,|u_{n+1}| + 3\,|u_n| \\ &\leqslant 5\,r^{n+2} + 7\,r^{n+1} + 3\,r^n \\ &= r^n\left(5\,r^2 + 7\,r + 3\right) \\ &= r^{n+3} \end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 5\,r^2 + 7\,r + 3$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 7\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$
Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-x - x^2\right).$$
On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :
$$\left(-3\,x^3 + 7\,x^2 - 5\,x + 1\right) S(x) + \left(-4\,x^2 + x\right) = 0,$$
d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-3\,x^3 + 7\,x^2 - 5\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S(x) = -\frac{1}{4\,(3\,x-1)} - \frac{5}{4\,(x-1)} - \frac{3}{2\,(x^2-2\,x+1)}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ et $t = 3\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n + \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n + \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1) x^{n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\cdot 3^n - \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}\right)x^n. \end{aligned}$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4}\cdot 3^n - \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}.$$

Corrigé 59. ← page 32

1. L'application $x \mapsto x^2 - x - \frac{3}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{3}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - r - \frac{3}{2} = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{7} + \frac{1}{2}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $u_1 = 1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ et $|u_1| = 1 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse

de récurrence :

$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left|\frac{-2u_{n+1}}{n+2} + \frac{3u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{2u_{n+1}}{n+2} + \frac{3u_n}{(n+2)(n+1)} \\
&\leqslant r^{n+1} + \frac{3}{2}r^n \\
&= r^n\left(r + \frac{3}{2}\right) \\
&= r^{n+2},
\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = r + \frac{3}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n{+}1)u_{n+1}x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n{-}1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n{+}2)(n{+}1)u_{n+2}x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned}
S''(x) + 2S'(x) - 3S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 2(n+1)u_{n+1} - 3u_n\right)x^n = 0,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 2\,x - 3 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 1 et -3. On en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = be^{(-3\,x)} + ae^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -1$, et : $S'(0) = u_1 = 1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a+b$ et $S'(0) = a - 3\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -1 \\ a & - & 3b & = & 1 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donnent respectivement $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.
En conclusion, pour tout $x \in]-R,R[$ on a : $S(x) = -\frac{1}{2}\,e^{(-3\,x)} - \frac{1}{2}\,e^x$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{(-3)^n}{2\,n!} - \frac{1}{2\,n!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{(-3)^n}{2\,n!} - \frac{1}{2\,n!}.$$

Corrigé 60. ← page 32

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $13^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 13^n$ et $|v_n| \leqslant 13^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant |u_n| + |v_n| + 10 &\leqslant 13^n + 13^n + 10 \\ &= 2 \cdot 13^n + 10 \\ &\leqslant 2 \cdot 13^n + 10 \cdot 13^n \\ &\leqslant 13^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 2|v_n| + 9 &\leqslant 2 \cdot 13^n + 2 \cdot 13^n + 9 \\ &= 4 \cdot 13^n + 9 \\ &\leqslant 4 \cdot 13^n + 9 \cdot 13^n \\ &\leqslant 13^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 13^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(13\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{13}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{13} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 10\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = xS_u(x) - xS_v(x) + 10\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :

$$(-x+1)\,S_u(x) + xS_v(x) = -\frac{10\,x}{x-1}.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow xL_2 - (2\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-x+1)\,L_2 + 2xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\,(x+1)\,S_u(x) = -x + \frac{11\,x^2}{x-1} + \frac{10\,x}{x-1},$$
et :
$$(x+1)\,S_v(x) = x - \frac{11\,x^2}{x-1} - \frac{9\,x}{x-1} - 1.$$
Il reste à diviser par $x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.
4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -10 - \frac{21}{2\,(x-1)} - \frac{1}{2\,(x+1)},$$
et :
$$S_v(x) = -10 - \frac{10}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -10 + \frac{21}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\,(-1)^n + \frac{21}{2}\right) x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\,(-1)^n + 10\right) x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S_u(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = -\frac{1}{2}\,(-1)^n + \frac{21}{2}, \quad v_n = -\,(-1)^n + 10.$$
Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 61. ← page 33

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{13}{2}x - 132$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{275}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{13}{2}r - 132 = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{4}\sqrt{2281} + \frac{13}{4}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $u_1 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ et $|u_1| = 0 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{-13u_{n+1}}{n+2} + \frac{264u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{13u_{n+1}}{n+2} + \frac{264u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant \frac{13}{2}r^{n+1} + 132\,r^n \\ &= r^n\left(\frac{13}{2}r + 132\right) \\ &= r^{n+2},\end{aligned}$$
   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{13}{2}r + 132$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$
   On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned}S''(x) + 13S'(x) - 264S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 13\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n - 264\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 13(n+1)u_{n+1} - 264u_n\right)x^n = 0,\end{aligned}$$
   d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 13x - 264 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 11 et -24. On en déduit qu'il existe

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(11\,x)} + be^{(-24\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -1$, et : $S'(0) = u_1 = 0$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = 11\,a - 24\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -1 \\ 11a & - & 24b & = & 0 \end{array} \right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 24L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 11L_1$ donnent respectivement $a = -\frac{24}{35}$ et $b = -\frac{11}{35}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -\frac{24}{35}\,e^{(11\,x)} - \frac{11}{35}\,e^{(-24\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{24}{35} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(11\,x)^n}{n!} - \frac{11}{35} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-24\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{24 \cdot 11^n}{35\,n!} - \frac{11\,(-24)^n}{35\,n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{24 \cdot 11^n}{35\,n!} - \frac{11\,(-24)^n}{35\,n!}.$$

Corrigé 62. ← page 33

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 9$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 9 \leqslant 9$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 9$ (on rappelle qu'on a $160^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 9 \cdot 160^n$ et $|v_n| \leqslant 9 \cdot 160^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 79|u_n| + 80|v_n| + 1 &\leqslant 711 \cdot 160^n + 720 \cdot 160^n + 1 \\ &= 9 \left(159 \cdot 160^n + \frac{1}{9} \right) \\ &\leqslant 9\,(159 \cdot 160^n + 160^n) \\ &\leqslant 9 \cdot 160^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 40|u_n| + 41|v_n| + 2 &\leqslant 360 \cdot 160^n + 369 \cdot 160^n + 2 \\ &= 9 \left(81 \cdot 160^n + \frac{2}{9} \right) \\ &\leqslant 9\,(81 \cdot 160^n + 2 \cdot 160^n) \\ &\leqslant 9 \cdot 160^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n + 1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} 160^n x^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} (160\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{160}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{160} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -79\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 80\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -79\,xS_u(x) + 80\,xS_v(x) + \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 9$. On a donc montré :

$$(79\,x+1)\,S_u(x) - 80xS_v(x) = -\frac{x}{x-1} + 9.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -80\,xL_2 - (-41\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (79\,x+1)\,L_2 - 40xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-39\,x^2 + 38\,x + 1\right)S_u(x) = 449\,x - \frac{201\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} - 9,$$

et :

$$\left(-39\,x^2 + 38\,x + 1\right)S_v(x) = -439\,x + \frac{198\,x^2}{x-1} + \frac{2\,x}{x-1} - 1.$$

Il reste à diviser par $-39\,x^2 + 38\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{397}{20\,(39\,x+1)} + \frac{117}{20\,(x-1)} - \frac{5}{x^2 - 2\,x + 1},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{397}{40\,(39\,x+1)} + \frac{237}{40\,(x-1)} - \frac{5}{x^2 - 2\,x + 1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}.$$

En prenant $t = -39\,x$ et $t = x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{39}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en

éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}S_u(x) &= \frac{397}{20}\sum_{n=0}^{+\infty}(-39\,x)^n - \frac{117}{20}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\\ &= \frac{397}{20}\sum_{n=0}^{+\infty}(-39\,x)^n - \frac{117}{20}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{397}{20}\,(-39)^n - 5\,n - \frac{217}{20}\right)x^n.\end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{397}{40}\,(-39)^n - 5\,n - \frac{437}{40}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{397}{20}\,(-39)^n - 5\,n - \frac{217}{20},\quad v_n = \frac{397}{40}\,(-39)^n - 5\,n - \frac{437}{40}.$$

Corrigé 63. ← page 34

1. L'application $x \mapsto x^2 - x - \frac{1}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^2 - r - \frac{1}{2} = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $u_1 = -1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ et $|u_1| = 1 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{-2u_{n+1}}{n+2} + \frac{-u_n}{(n+2)(n+1)}\right|\\ &\leqslant \frac{2u_{n+1}}{n+2} + \frac{u_n}{(n+2)(n+1)}\\ &\leqslant r^{n+1} + \frac{1}{2}\,r^n\\ &= r^n\left(r + \frac{1}{2}\right)\\ &= r^{n+2},\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = r + \frac{1}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) + 2S'(x) + S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 2(n+1)u_{n+1} + u_n\right)x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 2\,x + 1 = 0$, dont on vérifie facilement que son unique racine est -1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = (ax + b)e^{(-x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -1$, et : $S'(0) = u_1 = -1$, ce qui nous donne immédiatement $b = -1$ (car on a aussi : $S(0) = b$), puis $a = -2$ (en utilisant le fait qu'après calcul, on ait : $S'(0) = a - b$). En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -(2\,x + 1)e^{(-x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} &= -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,(-x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n\,(2\,n-1)}{n!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n\,(2\,n-1)}{n!}.$$

Corrigé 64. ← page 34

1. L'application $x \mapsto x^3 - 3\,x - 2$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-4 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 3\,r - 2 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et $u_2 = 2$, si bien que :

$|u_0| = 1 \leqslant 5$, $|u_1| = 5 \leqslant 5\,r$ et $|u_2| = 2 \leqslant 5\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 5\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 5\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 5\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 3\,|u_{n+1}| + 2\,|u_n| \\ &\leqslant 15\,r^{n+1} + 10\,r^n \\ &= 5\,r^n\,(3\,r+2) \\ &= 5\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 3\,r + 2$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+3} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \Big(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\Big) = S(x) - \Big(1 - 5\,x + 2\,x^2\Big).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\Big(-2\,x^3 - 3\,x^2 + 1\Big)\,S(x) + \Big(x^2 + 5\,x - 1\Big) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-2\,x^3 - 3\,x^2 + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S(x) = \frac{7}{9\,(2\,x-1)} + \frac{1}{9\,(x+1)} + \frac{5}{3\,(x^2+2\,x+1)}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = 2x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{7}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^{n-1} \\ &= -\frac{7}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + \frac{5}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,(-x)^{n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{3}\,(-1)^n\,(n+1) - \frac{7}{9}\cdot 2^n + \frac{1}{9}\,(-1)^n\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5}{3}\,(-1)^n\,(n+1) - \frac{7}{9}\cdot 2^n + \frac{1}{9}\,(-1)^n\,.$$

Corrigé 65. ← page 35

1. L'application $x \mapsto x^3 - 49\,x^2 - x - 49$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-98 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 49\,r^2 - r - 49 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, $|u_1| = 0 \leqslant r$ et $|u_2| = 0 \leqslant r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 49\,|u_{n+2}| + |u_{n+1}| + 49\,|u_n| \\ &\leqslant 49\,r^{n+2} + r^{n+1} + 49\,r^n \\ &= r^n\left(49\,r^2 + r + 49\right) \\ &= r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 49\,r^2 + r + 49$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + 49\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - 49\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - (1)\,.$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-49\,x^3 - x^2 + 49\,x + 1\right) S(x) + \left(x^2 - 49\,x - 1\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-49\,x^3 - x^2 + 49\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = -\frac{49}{100\,(x-1)} - \frac{1}{2400\,(49\,x+1)} + \frac{49}{96\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = -x$ et $t = -49\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{49}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{49}{100}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2400}\sum_{n=0}^{+\infty} (-49\,x)^n + \frac{49}{96}\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{49}{96}\,(-1)^n - \frac{1}{2400}\,(-49)^n + \frac{49}{100}\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{49}{96}\,(-1)^n - \frac{1}{2400}\,(-49)^n + \frac{49}{100}.$$

Corrigé 66. ← page 36

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}\,x - 3$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{5}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{1}{2}\,r - 3 = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = 2$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ et $|u_1| = 1 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit

$n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{-u_{n+1}}{n+2} + \frac{6u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\ &\leqslant \frac{u_{n+1}}{n+2} + \frac{6u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant \frac{1}{2} r^{n+1} + 3\, r^n \\ &= r^n \left(\frac{1}{2} r + 3 \right) \\ &= r^{n+2}, \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{1}{2} r + 3$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) + S'(x) - 6S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} + (n+1) u_{n+1} - 6u_n \right) x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + x - 6 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -3 et 2. On en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = be^{(2x)} + ae^{(-3x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 1$, et : $S'(0) = u_1 = 1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = -3\,a + 2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 1 \\ -\ 3a & + & 2b & = & 1 \end{array} \right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ donnent respectivement $a = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{4}{5}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{4}{5} e^{(2x)} + \frac{1}{5} e^{(-3x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3\,x)^n}{n!} + \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4 \cdot 2^n}{5\,n!} + \frac{(-3)^n}{5\,n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4 \cdot 2^n}{5\,n!} + \frac{(-3)^n}{5\,n!}.$$

Corrigé 67. ← page 36

1. L'application $x \mapsto x^3 - 12\,x^2 - 17\,x - 30$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-58 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 12\,r^2 - 17\,r - 30 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et $u_2 = -4$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 4$, $|u_1| = 1 \leqslant 4\,r$ et $|u_2| = 4 \leqslant 4\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 4\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 4\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 12\,|u_{n+2}| + 17\,|u_{n+1}| + 30\,|u_n| \\ &\leqslant 48\,r^{n+2} + 68\,r^{n+1} + 120\,r^n \\ &= 4\,r^n \left(12\,r^2 + 17\,r + 30\right) \\ &= 4\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 12\,r^2 + 17\,r + 30$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} - 12 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+3} + 17 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+3} + 30 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-1 - x - 4\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(30\,x^3+17\,x^2-12\,x+1\right)S(x)+\left(9\,x^2-11\,x+1\right)=0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $30\,x^3+17\,x^2-12\,x+1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x)=\frac{15}{28\,(3\,x-1)}-\frac{1}{77\,(10\,x-1)}-\frac{21}{44\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t\in]-1,1[,\qquad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n.$$

En prenant $t=10\,x$, $t=3\,x$ et $t=-x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x|<\frac{1}{10}$ pour bien avoir $|t|<1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}S(x)&=-\frac{15}{28}\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n+\frac{1}{77}\sum_{n=0}^{+\infty}(10\,x)^n-\frac{21}{44}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{77}\cdot 10^n-\frac{15}{28}\cdot 3^n-\frac{21}{44}\,(-1)^n\right)x^n.\end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x\in]-R,R[$, $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{1}{77}\cdot 10^n-\frac{15}{28}\cdot 3^n-\frac{21}{44}\,(-1)^n\,.$$

Corrigé 68. ← page 36

1. L'application $x\mapsto x^2-\frac{37}{2}\,x-60$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{155}{2}<0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x\to+\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r\in[1,+\infty[$ tel que : $r^2-\frac{37}{2}\,r-60=0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r=\frac{1}{4}\sqrt{2329}+\frac{37}{4}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n=0$ et $n=1$, puisque par hypothèse on a $u_0=-1$ et $u_1=-2$, si bien que : $|u_0|=1\leqslant 2$ et $|u_1|=2\leqslant 2\,r$ (rappelons que nous avons $r\geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n|\leqslant 2\,r^n$ et $|u_{n+1}|\leqslant 2\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse

de récurrence :

$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left|\frac{37u_{n+1}}{n+2} + \frac{120u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{37u_{n+1}}{n+2} + \frac{120u_n}{(n+2)(n+1)} \\
&\leqslant 37\, r^{n+1} + 120\, r^n \\
&= 2\, r^n \left(\frac{37}{2}\, r + 60\right) \\
&= 2\, r^{n+2},
\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{37}{2}\, r + 60$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned}
S''(x) - 37 S'(x) - 120 S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - 37 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 120 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - 37(n+1) u_{n+1} - 120 u_n\right) x^n = 0,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 37\,x - 120 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 40 et -3. On en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = a e^{(40\,x)} + b e^{(-3\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -1$, et : $S'(0) = u_1 = -2$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a+b$ et $S'(0) = 40\,a - 3\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -1 \\ 40a & - & 3b & = & -2 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 40L_1$ donnent respectivement $a = -\frac{5}{43}$ et $b = -\frac{38}{43}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R,R[$ on a : $S(x) = -\frac{5}{43}\, e^{(40\,x)} - \frac{38}{43}\, e^{(-3\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{5}{43}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(40\,x)^n}{n!} - \frac{38}{43}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{5\cdot 40^n}{43\,n!} - \frac{38\,(-3)^n}{43\,n!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{5\cdot 40^n}{43\,n!} - \frac{38\,(-3)^n}{43\,n!}.$$

Corrigé 69. ← page 37

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -2$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 2$ (on rappelle qu'on a $24^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\cdot 24^n$ et $|v_n| \leqslant 2\cdot 24^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 5|u_n| + 8|v_n| + 7 &\leqslant 10\cdot 24^n + 16\cdot 24^n + 7 \\ &= 2\left(13\cdot 24^n + \frac{7}{2}\right) \\ &\leqslant 2\left(13\cdot 24^n + 7\cdot 24^n\right) \\ &\leqslant 2\cdot 24^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 7|v_n| + 13 &\leqslant 8\cdot 24^n + 14\cdot 24^n + 13 \\ &= 2\left(11\cdot 24^n + \frac{13}{2}\right) \\ &\leqslant 2\left(11\cdot 24^n + 13\cdot 24^n\right) \\ &\leqslant 2\cdot 24^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 24^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(24\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{24}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{24} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 5\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 7\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 5\,xS_u(x) - 8\,xS_v(x) - 7\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 2$. On a donc montré :

$$(-5\,x+1)\,S_u(x) + 8xS_v(x) = \frac{7\,x}{x-1} - 2.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 8\,xL_2 - (7\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-5\,x+1)\,L_2 + 4xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-3\,x^2+2\,x+1\right)S_u(x) = 22\,x + \frac{55\,x^2}{x-1} - \frac{7\,x}{x-1} + 2,$$

et :

$$\left(-3\,x^2+2\,x+1\right)S_v(x) = -13\,x - \frac{37\,x^2}{x-1} + \frac{13\,x}{x-1} + 1.$$

Il reste à diviser par $-3\,x^2+2\,x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{35}{4\,(3\,x+1)} + \frac{91}{4\,(x-1)} + \frac{12}{x^2-2\,x+1},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{35}{4\,(3\,x+1)} + \frac{55}{4\,(x-1)} + \frac{6}{x^2-2\,x+1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = -3\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}
S_u(x) &= \frac{35}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-3\,x)^n - \frac{91}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + 12\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} \\
&= \frac{35}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-3\,x)^n - \frac{91}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + 12\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{35}{4}\,(-3)^n + 12\,n - \frac{43}{4}\right)x^n.
\end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{35}{4}\,(-3)^n + 6\,n - \frac{31}{4}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{35}{4}\,(-3)^n + 12\,n - \frac{43}{4}, \quad v_n = \frac{35}{4}\,(-3)^n + 6\,n - \frac{31}{4}.$$

Corrigé 70. ← page 38

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}\,x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{1}{2}\,r - 1 = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ et $|u_1| = 1 \leqslant 2\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left|\frac{u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)} \\
&\leqslant r^{n+1} + 2\,r^n \\
&= 2\,r^n\left(\frac{1}{2}\,r + 1\right) \\
&= 2\,r^{n+2},
\end{aligned}$$

   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{1}{2}\,r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

   On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned}
S''(x) - S'(x) - 2S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - (n+1) u_{n+1} - 2u_n\right) x^n = 0,
\end{aligned}$$

   d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - x - 2 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -1 et 2. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = be^{(2\,x)} + ae^{(-x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 2$, et : $S'(0) = u_1 = 1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = -a + 2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a + 2b = 1 \end{cases}$$
Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donnent respectivement $a = 1$ et $b = 1$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = e^{(2\,x)} + e^{(-x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) x^n. \end{aligned}$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Corrigé 71. ← page 38

1. L'application $x \mapsto x^3 - 7\,x^2 - 4\,x - 12$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-22 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 7\,r^2 - 4\,r - 12 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 2$, $|u_1| = 2 \leqslant 2\,r$ et $|u_2| = 1 \leqslant 2\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 2\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 7\,|u_{n+2}| + 4\,|u_{n+1}| + 12\,|u_n| \\ &\leqslant 14\,r^{n+2} + 8\,r^{n+1} + 24\,r^n \\ &= 2\,r^n \left(7\,r^2 + 4\,r + 12\right) \\ &= 2\,r^{n+3} \end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 7\,r^2 + 4\,r + 12$. D'où le résultat au rang $n + 3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 7\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} + 12\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(2\,x + x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(12\,x^3 + 4\,x^2 - 7\,x + 1\right) S(x) + \left(13\,x^2 - 2\,x\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $12\,x^3 + 4\,x^2 - 7\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = -\frac{3}{4\,(2\,x-1)} + \frac{1}{28\,(6\,x-1)} - \frac{5}{7\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = 2\,x$, $t = 6\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{6}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n - \frac{1}{28}\sum_{n=0}^{+\infty} (6\,x)^n - \frac{5}{7}\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{28}\cdot 6^n + \frac{3}{4}\cdot 2^n - \frac{5}{7}\,(-1)^n\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{28}\cdot 6^n + \frac{3}{4}\cdot 2^n - \frac{5}{7}\,(-1)^n.$$

Corrigé 72. ← page 38

1. L'application $x \mapsto x^2 - 19\,x - 40$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-58 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - 19\,r - 40 = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{19}{2}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 3$ et $|u_1| = 3 \leqslant 3\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 3\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 3\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{38u_{n+1}}{n+2} + \frac{80u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{38u_{n+1}}{n+2} + \frac{80u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 57\,r^{n+1} + 120\,r^n \\ &= 3\,r^n\,(19\,r + 40) \\ &= 3\,r^{n+2},\end{aligned}$$
   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 19\,r + 40$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$
   On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned}S''(x) - 38S'(x) - 80S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - 38 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 80 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - 38(n+1) u_{n+1} - 80 u_n\right) x^n = 0,\end{aligned}$$
   d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 38\,x - 80 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 40 et -2. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(40\,x)} + be^{(-2\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 0$, et :

$S'(0) = u_1 = 3$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = 40\,a - 2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 40a - 2b = 3 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 40L_1$ donnent respectivement $a = \frac{1}{14}$ et $b = -\frac{1}{14}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{1}{14}\, e^{(40\,x)} - \frac{1}{14}\, e^{(-2\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{14}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(40\,x)^n}{n!} - \frac{1}{14}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{40^n}{14\,n!} - \frac{(-2)^n}{14\,n!}\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{40^n}{14\,n!} - \frac{(-2)^n}{14\,n!}.$$

Corrigé 73. ← page 39

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = -2$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 2$, et : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ (on rappelle qu'on a $56^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2 \cdot 56^n$ et $|v_n| \leqslant 2 \cdot 56^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 29|u_n| + 26|v_n| + 1 &\leqslant 58 \cdot 56^n + 52 \cdot 56^n + 1 \\ &= 2\left(55 \cdot 56^n + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqslant 2\,(55 \cdot 56^n + 56^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 56^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 13|u_n| + 10|v_n| + 4 &\leqslant 26 \cdot 56^n + 20 \cdot 56^n + 4 \\ &= 2\,(23 \cdot 56^n + 2) \\ &\leqslant 2\,(23 \cdot 56^n + 4 \cdot 56^n) \\ &\leqslant 2 \cdot 56^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n + 1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 56^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (56\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{56}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{56} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 29\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 26\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 29\,xS_u(x) - 26\,xS_v(x) - \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)+1$. On a donc montré :

$$(-29\,x+1)\,S_u(x) + 26xS_v(x) = \frac{x}{x-1} - 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 26\,xL_2 - (10\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-29\,x+1)\,L_2 + 13xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(48\,x^2 - 19\,x + 1\right) S_u(x) = -42\,x + \frac{94\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} + 1,$$

et :

$$\left(48\,x^2 - 19\,x + 1\right) S_v(x) = 45\,x - \frac{103\,x^2}{x-1} + \frac{4\,x}{x-1} - 2.$$

Il reste à diviser par $48\,x^2 - 19\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{31}{10\,(x-1)} + \frac{13}{2\,(3\,x-1)} - \frac{12}{5\,(16\,x-1)},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{33}{10\,(x-1)} + \frac{13}{2\,(3\,x-1)} - \frac{6}{5\,(16\,x-1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = 16\,x$, $t = x$ et $t = 3\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{16}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= \frac{31}{10}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{13}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (3\,x)^n + \frac{12}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} (16\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{12}{5}\cdot 16^n - \frac{13}{2}\cdot 3^n + \frac{31}{10}\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{5}\cdot 16^n - \frac{13}{2}\cdot 3^n + \frac{33}{10}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{12}{5} \cdot 16^n - \frac{13}{2} \cdot 3^n + \frac{31}{10}, \quad v_n = \frac{6}{5} \cdot 16^n - \frac{13}{2} \cdot 3^n + \frac{33}{10}.$$

Corrigé 74. ← page 40

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 17$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 17 \leqslant 17$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 17$ (on rappelle qu'on a $46^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 17 \cdot 46^n$ et $|v_n| \leqslant 17 \cdot 46^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 24|u_n| + 21|v_n| + 1 &\leqslant 408 \cdot 46^n + 357 \cdot 46^n + 1 \\ &= 17\left(45 \cdot 46^n + \frac{1}{17}\right) \\ &\leqslant 17\left(45 \cdot 46^n + 46^n\right) \\ &\leqslant 17 \cdot 46^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 14|u_n| + 11|v_n| &\leqslant 238 \cdot 46^n + 187 \cdot 46^n \\ &= 17\left(25 \cdot 46^n\right) \\ &\leqslant 17 \cdot 46^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 46^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (46\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{46}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{46} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = -24 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 21 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -24\,x S_u(x) - 21\,x S_v(x) - \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 17$. On a donc montré :

$$(24\,x + 1)\,S_u(x) + 21 x S_v(x) = \frac{x}{x-1} + 17.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 21\,x L_2 - (-11\,x + 1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (24\,x + 1)\,L_2 + 14 x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(30\,x^2 + 13\,x + 1\right) S_u(x) = 208\,x + \frac{11\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 17,$$

et :

$$\left(30\,x^2+13\,x+1\right)S_v(x)=262\,x+\frac{14\,x^2}{x-1}+1.$$

Il reste à diviser par $30\,x^2+13\,x+1\neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x)=-\frac{5}{22\,(x-1)}+\frac{597}{11\,(10\,x+1)}-\frac{75}{2\,(3\,x+1)},$$

et :

$$S_v(x)=\frac{7}{22\,(x-1)}-\frac{398}{11\,(10\,x+1)}+\frac{75}{2\,(3\,x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t\in]-1{,}1[,\quad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n.$$

En prenant $t=x$, $t=-3\,x$ et $t=-10\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x|<\frac{1}{10}$ pour bien avoir $|t|<1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}S_u(x)&=\frac{5}{22}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+\frac{597}{11}\sum_{n=0}^{+\infty}(-10\,x)^n-\frac{75}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-3\,x)^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{75}{2}\,(-3)^n+\frac{597}{11}\,(-10)^n+\frac{5}{22}\right)x^n.\end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{75}{2}\,(-3)^n-\frac{398}{11}\,(-10)^n-\frac{7}{22}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x\in]-R,R[$, $S_u(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$, et : $S_v(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_nx^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=-\frac{75}{2}\,(-3)^n+\frac{597}{11}\,(-10)^n+\frac{5}{22},\quad v_n=\frac{75}{2}\,(-3)^n-\frac{398}{11}\,(-10)^n-\frac{7}{22}.$$

Corrigé 75. ← page 40

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n=0$, puisque par hypothèse on a $u_0=-3$ et $v_0=-3$, si bien que : $|u_0|=3\leqslant 3$, et : $|u_0|=3\leqslant 3$ (on rappelle qu'on a $8^0=1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n|\leqslant 3\cdot 8^n$ et $|v_n|\leqslant 3\cdot 8^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}|u_{n+1}|\leqslant 3|u_n|+2|v_n|+2&\leqslant 9\cdot 8^n+6\cdot 8^n+2\\&=3\left(5\cdot 8^n+\frac{2}{3}\right)\\&\leqslant 3\,(5\cdot 8^n+2\cdot 8^n)\\&\leqslant 3\cdot 8^{n+1},\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}|v_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 3|v_n| + 1 &\leqslant 12 \cdot 8^n + 9 \cdot 8^n + 1 \\ &= 3\left(7 \cdot 8^n + \frac{1}{3}\right) \\ &\leqslant 3\left(7 \cdot 8^n + 8^n\right) \\ &\leqslant 3 \cdot 8^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 8^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (8\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{8}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{8} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 3\,x S_u(x) - 2\,x S_v(x) - 2\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 3$. On a donc montré :

$$(-3\,x + 1)\,S_u(x) + 2x S_v(x) = \frac{2\,x}{x-1} - 3.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 2\,x L_2 - (3\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-3\,x+1)\,L_2 + 4x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-x^2 + 1\right) S_u(x) = 3\,x - \frac{8\,x^2}{x-1} - \frac{2\,x}{x-1} + 3,$$

et :

$$\left(-x^2 + 1\right) S_v(x) = -3\,x + \frac{11\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 3.$$

Il reste à diviser par $-x^2 + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{3}{2\,(x+1)} - \frac{7}{2\,(x-1)} - \frac{5}{x^2 - 2\,x + 1},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x-1} - \frac{5}{x^2 - 2\,x + 1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + \frac{7}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + \frac{7}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{2}\,(-1)^n - 5\,n - \frac{3}{2}\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-3\,(-1)^n - 5\,n\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{3}{2}\,(-1)^n - 5\,n - \frac{3}{2}, \quad v_n = -3\,(-1)^n - 5\,n.$$

Corrigé 76. ← page 41

1. L'application $x \mapsto x^3 - 285\,x^2 - 1216\,x - 17340$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-18840 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^3 - 285\,r^2 - 1216\,r - 17340 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = 17$ et $u_2 = -1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 17$, $|u_1| = 17 \leqslant 17\,r$ et $|u_2| = 1 \leqslant 17\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 17\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 17\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 17\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 285\,|u_{n+2}| + 1216\,|u_{n+1}| + 17340\,|u_n| \\ &\leqslant 4845\,r^{n+2} + 20672\,r^{n+1} + 294780\,r^n \\ &= 17\,r^n\left(285\,r^2 + 1216\,r + 17340\right) \\ &= 17\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 285\,r^2 + 1216\,r + 17340$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + 285\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - 1216\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - 17340\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(1 + 17\,x - x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-17340\,x^3 - 1216\,x^2 + 285\,x + 1\right) S(x) + \left(-3628\,x^2 - 302\,x - 1\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-17340\,x^3 - 1216\,x^2 + 285\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = -\frac{1687}{1196\,(10\,x-1)} - \frac{129}{84617\,(289\,x+1)} - \frac{463}{1132\,(6\,x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = 10\,x$, $t = -6\,x$ et $t = -289\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{289}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1687}{1196}\sum_{n=0}^{+\infty}(10\,x)^n - \frac{129}{84617}\sum_{n=0}^{+\infty}(-289\,x)^n - \frac{463}{1132}\sum_{n=0}^{+\infty}(-6\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1687}{1196}\cdot 10^n - \frac{463}{1132}\,(-6)^n - \frac{129}{84617}\,(-289)^n\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1687}{1196}\cdot 10^n - \frac{463}{1132}\,(-6)^n - \frac{129}{84617}\,(-289)^n.$$

Corrigé 77. ← page 41

1. L'application $x \mapsto x^3 - 2\,x^2 - 5\,x - 6$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-12 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 2\,r^2 - 5\,r - 6 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = -4$ et $u_2 = 2$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 4$, $|u_1| = 4 \leqslant 4\,r$ et $|u_2| = 2 \leqslant 4\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 4\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 4\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}|u_{n+3}| &\leqslant 2\,|u_{n+2}| + 5\,|u_{n+1}| + 6\,|u_n| \\ &\leqslant 8\,r^{n+2} + 20\,r^{n+1} + 24\,r^n \\ &= 4\,r^n\left(2\,r^2 + 5\,r + 6\right) \\ &= 4\,r^{n+3}\end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 2\,r^2 + 5\,r + 6$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$
Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(1 - 4\,x + 2\,x^2\right).$$
On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :
$$\left(6\,x^3 - 5\,x^2 - 2\,x + 1\right) S(x) + \left(-5\,x^2 + 6\,x - 1\right) = 0,$$
d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $6\,x^3 - 5\,x^2 - 2\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).
4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S(x) = \frac{2}{5\,(3\,x - 1)} + \frac{7}{5\,(2\,x + 1)}.$$
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = 3\,x$ et $t = -2\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n + \frac{7}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(-2\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\cdot 3^n + \frac{7}{5}\,(-2)^n\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{2}{5}\cdot 3^n + \frac{7}{5}\,(-2)^n\,.$$

Corrigé 78. ← page 42

1. L'application $x \mapsto x^3 - 7\,x^2 - 16\,x - 12$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-34 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^3 - 7\,r^2 - 16\,r - 12 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, $|u_1| = 0 \leqslant r$ et $|u_2| = 0 \leqslant r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 7\,|u_{n+2}| + 16\,|u_{n+1}| + 12\,|u_n| \\ &\leqslant 7\,r^{n+2} + 16\,r^{n+1} + 12\,r^n \\ &= r^n\left(7\,r^2 + 16\,r + 12\right) \\ &= r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 7\,r^2 + 16\,r + 12$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 7\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 16\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - 12\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - (1)\,.$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-12\,x^3+16\,x^2-7\,x+1\right)S(x)+\left(-16\,x^2+7\,x-1\right)=0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-12\,x^3+16\,x^2-7\,x+1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S(x)=-\frac{4}{3\,x-1}-\frac{3}{4\,x^2-4\,x+1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t\in]-1,1[,\quad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n,\quad \frac{1}{(1-t)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}.$$
En prenant $t=2\,x$ et $t=3\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x|<\frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t|<1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned}S(x)&=4\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n-3\sum_{n=1}^{+\infty}n\,(2\,x)^{n-1}\\&=4\sum_{n=0}^{+\infty}(3\,x)^n-3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,(2\,x)^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-3\cdot 2^n(n+1)+4\cdot 3^n\right)x^n.\end{aligned}$$
Or on a aussi : $\forall x\in]-R,R[,\ S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=-3\cdot 2^n(n+1)+4\cdot 3^n.$$

Corrigé 79. ← page 42

1. L'application $x\mapsto x^2-\frac{3}{2}\,x-1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{3}{2}<0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x\to+\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r\in[1,+\infty[$ tel que : $r^2-\frac{3}{2}\,r-1=0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r=2$.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $u_1 = -4$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 4$ et $|u_1| = 4 \leqslant 4\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 4\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left|\frac{-3u_{n+1}}{n+2} + \frac{-2u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{3u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 6\,r^{n+1} + 4\,r^n \\ &= 4\,r^n\left(\frac{3}{2}r+1\right) \\ &= 4\,r^{n+2}, \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{3}{2}\,r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)u_{n+1}x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) + 3S'(x) + 2S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n\right)x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 3\,x + 2 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -1 et -2. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(-x)} + be^{(-2\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = -1$, et : $S'(0) = u_1 = -4$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = -a - 2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -1 \\ -\ a & - & 2b & = & -4 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donnent respectivement $a = -6$ et $b = 5$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = -6\,e^{(-x)} + 5\,e^{(-2\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= -6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{6\,(-1)^n}{n!} + \frac{5\,(-2)^n}{n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{6\,(-1)^n}{n!} + \frac{5\,(-2)^n}{n!}.$$

Corrigé 80. ← page 43

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $30^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 30^n$ et $|v_n| \leqslant 30^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 13|u_n| + 15|v_n| + 2 &\leqslant 13 \cdot 30^n + 15 \cdot 30^n + 2 \\ &= 28 \cdot 30^n + 2 \\ &\leqslant 28 \cdot 30^n + 2 \cdot 30^n \\ &\leqslant 30^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 12|u_n| + 14|v_n| + 1 &\leqslant 12 \cdot 30^n + 14 \cdot 30^n + 1 \\ &= 26 \cdot 30^n + 1 \\ &\leqslant 26 \cdot 30^n + 30^n \\ &\leqslant 30^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n + 1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 30^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (30\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{30}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{30} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 13 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 13\,x S_u(x) + 15\,x S_v(x) - 2 \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :

$$(-13\,x + 1)\, S_u(x) - 15 x S_v(x) = \frac{2\,x}{x-1}.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -15\,xL_2 - (14\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-13\,x+1)\,L_2 - 12xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-2\,x^2+x+1\right)S_u(x) = -15\,x - \frac{13\,x^2}{x-1} - \frac{2\,x}{x-1},$$

et :

$$\left(-2\,x^2+x+1\right)S_v(x) = -13\,x - \frac{11\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} + 1.$$

Il reste à diviser par $-2\,x^2+x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{6}{2\,x+1} - \frac{11}{x-1} - \frac{5}{x^2-2\,x+1},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{6}{2\,x+1} + \frac{9}{x-1} + \frac{4}{x^2-2\,x+1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = -2\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -6\sum_{n=0}^{+\infty}(-2\,x)^n + 11\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} \\ &= -6\sum_{n=0}^{+\infty}(-2\,x)^n + 11\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-6\,(-2)^n - 5\,n + 6\right)x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(6\,(-2)^n + 4\,n - 5\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -6\,(-2)^n - 5\,n + 6, \quad v_n = 6\,(-2)^n + 4\,n - 5.$$

Corrigé 81. ← page 43

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 0 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $104^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 104^n$ et $|v_n| \leqslant 104^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 31|u_n| + 14|v_n| + 1 &\leqslant 31 \cdot 104^n + 14 \cdot 104^n + 1 \\ &= 45 \cdot 104^n + 1 \\ &\leqslant 45 \cdot 104^n + 104^n \\ &\leqslant 104^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 70|u_n| + 32|v_n| + 2 &\leqslant 70 \cdot 104^n + 32 \cdot 104^n + 2 \\ &= 102 \cdot 104^n + 2 \\ &\leqslant 102 \cdot 104^n + 2 \cdot 104^n \\ &\leqslant 104^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 104^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (104\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{104}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{104} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = -31 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 14 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -31\,x S_u(x) + 14\,x S_v(x) - \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :

$$(31\,x + 1)\,S_u(x) - 14x S_v(x) = \frac{x}{x-1}.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -14\,x L_2 - (-32\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (31\,x+1)\,L_2 - 70x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-12\,x^2 - x + 1\right) S_u(x) = \frac{4\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1},$$

et :

$$\left(-12\,x^2 - x + 1\right) S_v(x) = -\frac{8\,x^2}{x-1} + \frac{2\,x}{x-1}.$$

Il reste à diviser par $-12\,x^2 - x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{1}{4\,(x-1)} + \frac{1}{4\,(3\,x+1)},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{1}{2\,(x-1)} + \frac{1}{2\,(3\,x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$ et $t = -3\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{3}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (-3\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\,(-3)^n - \frac{1}{4}\right) x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\,(-3)^n - \frac{1}{2}\right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4}\,(-3)^n - \frac{1}{4}, \quad v_n = \frac{1}{2}\,(-3)^n - \frac{1}{2}.$$

Corrigé 82. ← page 44

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{15}{2}\,x - 7$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{27}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{15}{2}\,r - 7 = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{4}\sqrt{337} + \frac{15}{4}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$ et $|u_1| = 1 \leqslant 2\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit

$n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left|\frac{-15u_{n+1}}{n+2} + \frac{-14u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{15u_{n+1}}{n+2} + \frac{14u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 15\,r^{n+1} + 14\,r^n \\ &= 2\,r^n\left(\frac{15}{2}r+7\right) \\ &= 2\,r^{n+2}, \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{15}{2}\,r + 7$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) + 15S'(x) + 14S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 15\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + 14\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 15(n+1)u_{n+1} + 14u_n\right)x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 15\,x + 14 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -1 et -14. On en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = ae^{(-x)} + be^{(-14\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 2$, et : $S'(0) = u_1 = 1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a+b$ et $S'(0) = -a-14\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 2 \\ -\ a & - & 14b & = & 1 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 14L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donnent respectivement $a = \frac{29}{13}$ et $b = -\frac{3}{13}$.
En conclusion, pour tout $x \in]-R,R[$ on a : $S(x) = \frac{29}{13}\,e^{(-x)} - \frac{3}{13}\,e^{(-14\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{29}{13}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} - \frac{3}{13}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-14\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{29\,(-1)^n}{13\,n!} - \frac{3\,(-14)^n}{13\,n!}\right)x^n. \end{aligned}$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{29\,(-1)^n}{13\,n!} - \frac{3\,(-14)^n}{13\,n!}.$$

Corrigé 83. ← page 44

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$ et $v_0 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 0 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $5^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 5^n$ et $|v_n| \leqslant 5^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 2|v_n| + 1 &\leqslant 2\cdot 5^n + 2\cdot 5^n + 1 \\ &= 4\cdot 5^n + 1 \\ &\leqslant 4\cdot 5^n + 5^n \\ &\leqslant 5^{n+1}, \end{aligned}$$
et de même :
$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant |u_n| + |v_n| + 2 &\leqslant 5^n + 5^n + 2 \\ &= 2\cdot 5^n + 2 \\ &\leqslant 2\cdot 5^n + 2\cdot 5^n \\ &\leqslant 5^{n+1}, \end{aligned}$$
d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 5^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(5\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{5}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{5} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.
2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -2\,xS_u(x) + 2\,xS_v(x) + \frac{x}{1-x},$$
mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 1$. On a donc montré :
$$(2\,x+1)\,S_u(x) - 2xS_v(x) = -\frac{x}{x-1} - 1.$$
On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -2\,xL_2 - (-x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (2\,x+1)\,L_2 - xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\,(x+1)\,S_u(x) = -x + \frac{3\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 1,$$
et :
$$(x+1)\,S_v(x) = x - \frac{3\,x^2}{x-1} - \frac{2\,x}{x-1}.$$
Il reste à diviser par $x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -2 - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1},$$
et :
$$S_v(x) = -2 - \frac{5}{2\,(x-1)} - \frac{1}{2\,(x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= -2 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\,(-1)^n + 2\right) x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\,(-1)^n + \frac{5}{2}\right) x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = -\,(-1)^n + 2, \quad v_n = -\frac{1}{2}\,(-1)^n + \frac{5}{2}.$$
Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 84. ← page 45

1. L'application $x \mapsto x^2 - 2\,x - \frac{5}{2}$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{7}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - 2\,r - \frac{5}{2} = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{2}\sqrt{14} + 1$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ et $|u_1| = 0 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left|\frac{-4u_{n+1}}{n+2} + \frac{5u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{4u_{n+1}}{n+2} + \frac{5u_n}{(n+2)(n+1)} \\
&\leqslant 2\,r^{n+1} + \frac{5}{2}\,r^n \\
&= r^n\left(2\,r + \frac{5}{2}\right) \\
&= r^{n+2},
\end{aligned}$$
   puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 2\,r + \frac{5}{2}$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
   On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$
   On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned}
S''(x) + 4S'(x) - 5S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 4(n+1)u_{n+1} - 5u_n\right) x^n = 0,
\end{aligned}$$
   d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 4\,x - 5 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -5 et 1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(-5\,x)} + be^x$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit

d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 1$, et : $S'(0) = u_1 = 0$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = -5\,a + b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\begin{cases} \quad a + b = 1 \\ -5a + b = 0 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1$ donnent respectivement $a = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{5}{6}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{1}{6}\, e^{(-5\,x)} + \frac{5}{6}\, e^{x}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-5\,x)^n}{n!} + \frac{5}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-5)^n}{6\,n!} + \frac{5}{6\,n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-5)^n}{6\,n!} + \frac{5}{6\,n!}.$$

Corrigé 85. ← page 45

1. L'application $x \mapsto x^3 - 9\,x^2 - 34\,x - 24$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-66 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 9\,r^2 - 34\,r - 24 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = 35$ et $u_2 = 1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 35$, $|u_1| = 35 \leqslant 35\,r$ et $|u_2| = 1 \leqslant 35\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 35\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 35\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 35\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 9\,|u_{n+2}| + 34\,|u_{n+1}| + 24\,|u_n| \\ &\leqslant 315\,r^{n+2} + 1190\,r^{n+1} + 840\,r^n \\ &= 35\,r^n \left(9\,r^2 + 34\,r + 24\right) \\ &= 35\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 9\,r^2 + 34\,r + 24$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + 9\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - 34\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} + 24\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$
Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(1 + 35\,x + x^2\right).$$
On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :
$$\left(24\,x^3 - 34\,x^2 + 9\,x + 1\right) S(x) + \left(-282\,x^2 - 44\,x - 1\right) = 0,$$
d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $24\,x^3 - 34\,x^2 + 9\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).
4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S(x) = \frac{327}{13\,(x-1)} - \frac{187}{7\,(2\,x-1)} - \frac{51}{91\,(12\,x+1)}.$$
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$, $t = 2\,x$ et $t = -12\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{12}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{327}{13}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{187}{7}\sum_{n=0}^{+\infty} (2\,x)^n - \frac{51}{91}\sum_{n=0}^{+\infty} (-12\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{187}{7}\cdot 2^n - \frac{51}{91}\,(-12)^n - \frac{327}{13}\right) x^n. \end{aligned}$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{187}{7}\cdot 2^n - \frac{51}{91}\,(-12)^n - \frac{327}{13}.$$

Corrigé 86. ← page 46

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = 3$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 3$, et : $|u_0| = 3 \leqslant 3$ (on rappelle qu'on a $39^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 3\cdot 39^n$ et $|v_n| \leqslant 3\cdot 39^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 20|u_n| + 16|v_n| + 3 &\leqslant 60\cdot 39^n + 48\cdot 39^n + 3 \\ &= 3\,(36\cdot 39^n + 1) \\ &\leqslant 3\,(36\cdot 39^n + 3\cdot 39^n) \\ &\leqslant 3\cdot 39^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 14|u_n| + 10|v_n| + 1 &\leqslant 42 \cdot 39^n + 30 \cdot 39^n + 1 \\ &= 3\left(24 \cdot 39^n + \frac{1}{3}\right) \\ &\leqslant 3\,(24 \cdot 39^n + 39^n) \\ &\leqslant 3 \cdot 39^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 39^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (39\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{39}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{39} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = -20\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 16\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -20\,xS_u(x) + 16\,xS_v(x) + 3\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :

$$(20\,x+1)\,S_u(x) - 16xS_v(x) = -\frac{3\,x}{x-1}.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -16\,xL_2 - (-10\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (20\,x+1)\,L_2 - 14xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(24\,x^2 + 10\,x + 1\right) S_u(x) = -48\,x - \frac{46\,x^2}{x-1} + \frac{3\,x}{x-1},$$

et :

$$\left(24\,x^2 + 10\,x + 1\right) S_v(x) = 60\,x + \frac{62\,x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 3.$$

Il reste à diviser par $24\,x^2 + 10\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{43}{35\,(x-1)} - \frac{200}{7\,(6\,x+1)} + \frac{149}{5\,(4\,x+1)},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{9}{5\,(x-1)} - \frac{25}{6\,x+1} + \frac{149}{5\,(4\,x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = -6\,x$ et $t = -4\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{6}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\frac{43}{35}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{200}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}(-6\,x)^n + \frac{149}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(-4\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{149}{5}\,(-4)^n - \frac{200}{7}\,(-6)^n - \frac{43}{35}\right)x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{149}{5}\,(-4)^n - 25\,(-6)^n - \frac{9}{5}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{149}{5}\,(-4)^n - \frac{200}{7}\,(-6)^n - \frac{43}{35}, \quad v_n = \frac{149}{5}\,(-4)^n - 25\,(-6)^n - \frac{9}{5}.$$

Corrigé 87. ← page 47

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $11^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 11^n$ et $|v_n| \leqslant 11^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 3|u_n| + 2|v_n| + 3 &\leqslant 3 \cdot 11^n + 2 \cdot 11^n + 3 \\ &= 5 \cdot 11^n + 3 \\ &\leqslant 5 \cdot 11^n + 3 \cdot 11^n \\ &\leqslant 11^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 4|u_n| + 3|v_n| + 4 &\leqslant 4 \cdot 11^n + 3 \cdot 11^n + 4 \\ &= 7 \cdot 11^n + 4 \\ &\leqslant 7 \cdot 11^n + 4 \cdot 11^n \\ &\leqslant 11^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} 11^n x^n = \sum_{n \geqslant 0}(11\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{11}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{11} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 3\,xS_u(x) + 2\,xS_v(x) + 3\frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x)$. On a donc montré :

$$(-3\,x+1)\,S_u(x) - 2xS_v(x) = -\frac{3\,x}{x-1}.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -2\,xL_2 - (3\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-3\,x+1)\,L_2 - 4xL_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-x^2+1\right)S_u(x) = 2\,x + \frac{x^2}{x-1} + \frac{3\,x}{x-1},$$

et :

$$\left(-x^2+1\right)S_v(x) = 3\,x + \frac{4\,x}{x-1} - 1.$$

Il reste à diviser par $-x^2+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{1}{2\,(x+1)} + \frac{5}{2\,(x-1)} + \frac{2}{x^2-2\,x+1},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x^2-2\,x+1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en

éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n - \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n - \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,(-1)^n + 2\,n - \frac{1}{2}\right)x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\,(-1)^n - 2\,n\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}\,(-1)^n + 2\,n - \frac{1}{2}, \quad v_n = -\,(-1)^n - 2\,n.$$

Corrigé 88. ← page 47

1. L'application $x \mapsto x^3 - x^2 - x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-2 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^3 - r^2 - r - 1 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 4$, $|u_1| = 1 \leqslant 4\,r$ et $|u_2| = 4 \leqslant 4\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 4\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 4\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant |u_{n+2}| + |u_{n+1}| + |u_n| \\ &\leqslant 4\,r^{n+2} + 4\,r^{n+1} + 4\,r^n \\ &= 4\,r^n\left(r^2 + r + 1\right) \\ &= 4\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = r^2 + r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-1 + x + 4\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-x^3 - x^2 + x + 1\right) S(x) + \left(-6\,x^2 + 1\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-x^3 - x^2 + x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = -\frac{5}{4\,(x-1)} - \frac{19}{4\,(x+1)} + \frac{5}{2\,(x^2+2\,x+1)}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{19}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n + \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^{n-1} \\ &= \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{19}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\,(-1)^n\,(n+1) - \frac{19}{4}\,(-1)^n + \frac{5}{4}\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5}{2}\,(-1)^n\,(n+1) - \frac{19}{4}\,(-1)^n + \frac{5}{4}.$$

Corrigé 89. ← page 48

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $15^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 15^n$ et $|v_n| \leqslant 15^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 3|v_n| + 9 &\leqslant 2 \cdot 15^n + 3 \cdot 15^n + 9 \\ &= 5 \cdot 15^n + 9 \\ &\leqslant 5 \cdot 15^n + 9 \cdot 15^n \\ &\leqslant 15^{n+1}, \end{aligned}$$
et de même :
$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 7|v_n| + 2 &\leqslant 6 \cdot 15^n + 7 \cdot 15^n + 2 \\ &= 13 \cdot 15^n + 2 \\ &\leqslant 13 \cdot 15^n + 2 \cdot 15^n \\ &\leqslant 15^{n+1}, \end{aligned}$$
d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 15^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (15\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{15}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{15} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.
2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 2\,x S_u(x) + 3\,x S_v(x) + 9 \frac{x}{1-x},$$
mais on a aussi : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 1$. On a donc montré :
$$(-2\,x + 1)\, S_u(x) - 3x S_v(x) = -\frac{9\,x}{x-1} + 1.$$
On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -3\,x L_2 - (7\,x+1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (-2\,x+1)\, L_2 - 6x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :
$$-\left(4\,x^2 + 5\,x + 1\right) S_u(x) = -10\,x + \frac{57\,x^2}{x-1} + \frac{9\,x}{x-1} - 1,$$
et :
$$\left(4\,x^2 + 5\,x + 1\right) S_v(x) = -8\,x + \frac{50\,x^2}{x-1} + \frac{2\,x}{x-1} + 1.$$
Il reste à diviser par $4\,x^2 + 5\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S_u(x) = -\frac{33}{5\,(x-1)} - \frac{3}{5\,(4\,x+1)} - \frac{5}{x+1},$$
et :
$$S_v(x) = \frac{26}{5\,(x-1)} + \frac{6}{5\,(4\,x+1)} + \frac{5}{x+1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:
$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
En prenant $t = x$, $t = -4\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{4}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S_u(x) &= \frac{33}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(-4\,x)^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-5\,(-1)^n - \frac{3}{5}\,(-4)^n + \frac{33}{5}\right)x^n. \end{aligned}$$
et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :
$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(5\,(-1)^n + \frac{6}{5}\,(-4)^n - \frac{26}{5}\right)x^n.$$
Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -5\,(-1)^n - \frac{3}{5}\,(-4)^n + \frac{33}{5}, \quad v_n = 5\,(-1)^n + \frac{6}{5}\,(-4)^n - \frac{26}{5}.$$

Corrigé 90. ← page 48

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -3$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 3 \leqslant 3$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 3$ (on rappelle qu'on a $98^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 3 \cdot 98^n$ et $|v_n| \leqslant 3 \cdot 98^n$. D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 27|u_n| + 70|v_n| + 1 &\leqslant 81 \cdot 98^n + 210 \cdot 98^n + 1 \\ &= 3\left(97 \cdot 98^n + \frac{1}{3}\right) \\ &\leqslant 3\,(97 \cdot 98^n + 98^n) \\ &\leqslant 3 \cdot 98^{n+1}, \end{aligned}$$
et de même :
$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 14|u_n| + 36|v_n| + 28 &\leqslant 42 \cdot 98^n + 108 \cdot 98^n + 28 \\ &= 3\left(50 \cdot 98^n + \frac{28}{3}\right) \\ &\leqslant 3\,(50 \cdot 98^n + 28 \cdot 98^n) \\ &\leqslant 3 \cdot 98^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 98^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (98\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{98}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{98} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = -27 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 70 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -27\,x S_u(x) - 70\,x S_v(x) - \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 3$. On a donc montré :

$$(27\,x+1)\,S_u(x) + 70x S_v(x) = \frac{x}{x-1} - 3.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R,R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 70\,x L_2 - (-36\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (27\,x+1)\,L_2 + 14x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(8\,x^2 - 9\,x + 1\right) S_u(x) = -178\,x + \frac{1996\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} + 3,$$

et :

$$\left(8\,x^2 - 9\,x + 1\right) S_v(x) = -69\,x + \frac{770\,x^2}{x-1} + \frac{28\,x}{x-1} - 1.$$

Il reste à diviser par $8\,x^2 - 9\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = -\frac{438}{7\,(8\,x-1)} - \frac{1536}{7\,(x-1)} - \frac{285}{x^2 - 2\,x + 1},$$

et :

$$S_v(x) = \frac{219}{7\,(8\,x-1)} + \frac{586}{7\,(x-1)} + \frac{114}{x^2 - 2\,x + 1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = 8\,x$ et $t = x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{8}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}
S_u(x) &= \frac{438}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}(8\,x)^n + \frac{1536}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 285\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\\
&= \frac{438}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}(8\,x)^n + \frac{1536}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 285\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{438}{7}\cdot 8^n - 285\,n - \frac{459}{7}\right)x^n.
\end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{219}{7}\cdot 8^n + 114\,n + \frac{212}{7}\right)x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{438}{7}\cdot 8^n - 285\,n - \frac{459}{7}, \quad v_n = -\frac{219}{7}\cdot 8^n + 114\,n + \frac{212}{7}.$$

Corrigé 91. ← page 49

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{19}{2}\,x - 10$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{37}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{19}{2}\,r - 10 = 0$. D'où le résultat.
   On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{4}\sqrt{521} + \frac{19}{4}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 3$ et $u_1 = -1$, si bien que : $|u_0| = 3 \leqslant 3$ et $|u_1| = 1 \leqslant 3\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 3\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 3\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left|\frac{19u_{n+1}}{n+2} + \frac{20u_n}{(n+2)(n+1)}\right|\\
&\leqslant \frac{19u_{n+1}}{n+2} + \frac{20u_n}{(n+2)(n+1)}\\
&\leqslant \frac{57}{2}\,r^{n+1} + 30\,r^n\\
&= 3\,r^n\left(\frac{19}{2}\,r + 10\right)\\
&= 3\,r^{n+2},
\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{19}{2}\,r + 10$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S''(x) - 19S'(x) - 20S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - 19 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 20 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - 19(n+1) u_{n+1} - 20 u_n\right) x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - 19\,x - 20 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont 20 et -1. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = a e^{(20\,x)} + b e^{(-x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 3$, et : $S'(0) = u_1 = -1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = 20\,a - b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 3 \\ 20a & - & b & = & -1 \end{array} \right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 20 L_1$ donnent respectivement $a = \frac{2}{21}$ et $b = \frac{61}{21}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{2}{21}\, e^{(20\,x)} + \frac{61}{21}\, e^{(-x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2}{21} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(20\,x)^n}{n!} + \frac{61}{21} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2 \cdot 20^n}{21\, n!} + \frac{61\,(-1)^n}{21\, n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2 \cdot 20^n}{21\, n!} + \frac{61\,(-1)^n}{21\, n!}.$$

Corrigé 92. ← page 49

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 1$, et :

$|u_0| = 1 \leqslant 1$ (on rappelle qu'on a $11^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 11^n$ et $|v_n| \leqslant 11^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 2|u_n| + 2|v_n| + 1 &\leqslant 2 \cdot 11^n + 2 \cdot 11^n + 1 \\ &= 4 \cdot 11^n + 1 \\ &\leqslant 4 \cdot 11^n + 11^n \\ &\leqslant 11^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 6|u_n| + 5|v_n| &\leqslant 6 \cdot 11^n + 5 \cdot 11^n \\ &= 11 \cdot 11^n \\ &\leqslant 11^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 11^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (11\,x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{11}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{11} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 2\,x S_u(x) + 2\,x S_v(x) - \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) - 1$. On a donc montré :

$$(-2\,x+1)\,S_u(x) - 2x S_v(x) = \frac{x}{x-1} + 1.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow -2\,x L_2 - (5\,x+1)\,L_1$ et $L_2 \leftarrow (-2\,x+1)\,L_2 - 6x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(2\,x^2 + 3\,x + 1\right) S_u(x) = -3\,x - \frac{5\,x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - 1,$$

et :

$$\left(2\,x^2 + 3\,x + 1\right) S_v(x) = -4\,x - \frac{6\,x^2}{x-1} - 1.$$

Il reste à diviser par $2\,x^2 + 3\,x + 1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2\,x+1} + \frac{4}{x+1},$$

et :

$$S_v(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{4}{2\,x+1} - \frac{6}{x+1}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = -2\,x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{2}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-2\,x)^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (4\,(-1)^n - 2\,(-2)^n - 1)\,x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-6\,(-1)^n + 4\,(-2)^n + 1)\,x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4\,(-1)^n - 2\,(-2)^n - 1, \quad v_n = -6\,(-1)^n + 4\,(-2)^n + 1.$$

Corrigé 93. ← page 50

1. L'application $x \mapsto x^3 - 3\,x^2 - 3\,x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-6 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 3\,r^2 - 3\,r - 1 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $u_2 = -4$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 4$, $|u_1| = 1 \leqslant 4\,r$ et $|u_2| = 4 \leqslant 4\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 4\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 4\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 3\,|u_{n+2}| + 3\,|u_{n+1}| + |u_n| \\ &\leqslant 12\,r^{n+2} + 12\,r^{n+1} + 4\,r^n \\ &= 4\,r^n \left(3\,r^2 + 3\,r + 1\right) \\ &= 4\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 3\,r^2 + 3\,r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-x - 4\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1\right) S(x) + \left(7\,x^2 + x\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = -\frac{7}{x+1} + \frac{13}{x^2 + 2\,x + 1} - \frac{6}{x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1}.$$

Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :

$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\,(n-1)n t^{n-2}.$$

En prenant $t = -x$ (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}
S(x) &= -7\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n + 13\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^{n-1} - 6\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\,(n-1)n\,(-x)^{n-2} \\
&= -7\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n + 13\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,(-x)^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\,(n+2)(n+1)\,(-x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-3\,(-1)^n\,(n+2)(n+1) + 13\,(-1)^n\,(n+1) - 7\,(-1)^n\right) x^n.
\end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3\,(-1)^n\,(n+2)(n+1) + 13\,(-1)^n\,(n+1) - 7\,(-1)^n.$$

Corrigé 94. ← page 51

1. L'application $x \mapsto x^2 - 120\,x - 238$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-357 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - 120\,r - 238 = 0$. D'où le résultat. On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \sqrt{3838} + 60$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 1$ et $|u_1| = 1 \leqslant r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \left|\frac{-240u_{n+1}}{n+2} + \frac{-476u_n}{(n+2)(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{240u_{n+1}}{n+2} + \frac{476u_n}{(n+2)(n+1)} \\ &\leqslant 120\,r^{n+1} + 238\,r^n \\ &= r^n\,(120\,r + 238) \\ &= r^{n+2},\end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = 120\,r + 238$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$
On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned}S''(x) + 240S'(x) + 476S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 240\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n + 476\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)u_{n+2} + 240(n+1)u_{n+1} + 476u_n\right) x^n = 0,\end{aligned}$$
d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 + 240\,x + 476 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -2 et -238. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = ae^{(-2\,x)} + be^{(-238\,x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas,

puisque nous avons là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 0$, et : $S'(0) = u_1 = 1$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a+b$ et $S'(0) = -2\,a-238\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ -\ 2a & - & 238b & = & 1 \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 238L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ donnent respectivement $a = \frac{1}{236}$ et $b = -\frac{1}{236}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{1}{236}\, e^{(-2\,x)} - \frac{1}{236}\, e^{(-238\,x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{236}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2\,x)^n}{n!} - \frac{1}{236}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-238\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-2)^n}{236\,n!} - \frac{(-238)^n}{236\,n!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-2)^n}{236\,n!} - \frac{(-238)^n}{236\,n!}.$$

Corrigé 95. ← page 51

1. L'application $x \mapsto x^3 - 33\,x^2 - 167\,x - 135$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-334 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - 33\,r^2 - 167\,r - 135 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 2$, $|u_1| = 0 \leqslant 2\,r$ et $|u_2| = 2 \leqslant 2\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 2\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 33\,|u_{n+2}| + 167\,|u_{n+1}| + 135\,|u_n| \\ &\leqslant 66\,r^{n+2} + 334\,r^{n+1} + 270\,r^n \\ &= 2\,r^n \left(33\,r^2 + 167\,r + 135\right) \\ &= 2\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 33\,r^2 + 167\,r + 135$. D'où le résultat au rang $n + 3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 33\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 167\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - 135\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$

Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(-1 + 2\,x^2\right).$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\left(-135\,x^3 + 167\,x^2 - 33\,x + 1\right) S(x) + \left(165\,x^2 - 33\,x + 1\right) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-135\,x^3 + 167\,x^2 - 33\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = \frac{133}{104\,(x-1)} - \frac{25}{88\,(5\,x-1)} + \frac{3}{572\,(27\,x-1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$, $t = 27\,x$ et $t = 5\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{27}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{133}{104}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{25}{88}\sum_{n=0}^{+\infty} (5\,x)^n - \frac{3}{572}\sum_{n=0}^{+\infty} (27\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{572}\cdot 27^n + \frac{25}{88}\cdot 5^n - \frac{133}{104}\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{3}{572}\cdot 27^n + \frac{25}{88}\cdot 5^n - \frac{133}{104}.$$

Corrigé 96. ← page 52

1. L'application $x \mapsto x^3 - x^2 - x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-2 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^3 - r^2 - r - 1 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$, si bien que : $|u_0| = 2 \leqslant 2$, $|u_1| = 1 \leqslant 2\,r$ et $|u_2| = 0 \leqslant 2\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 2\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant |u_{n+2}| + |u_{n+1}| + |u_n| \\ &\leqslant 2\,r^{n+2} + 2\,r^{n+1} + 2\,r^n \\ &= 2\,r^n\left(r^2 + r + 1\right) \\ &= 2\,r^{n+3} \end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = r^2 + r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$
Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - (2 + x)\,.$$
On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :
$$\left(-x^3 - x^2 + x + 1\right) S(x) + \left(x^2 - 3\,x - 2\right) = 0,$$
d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-x^3 - x^2 + x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).
4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2 + 2\,x + 1}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.
5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$

En prenant $t = x$ et $t = -x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < 1$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(-x)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-(-1)^n\,(n+1) + 2\,(-1)^n + 1\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -(-1)^n\,(n+1) + 2\,(-1)^n + 1.$$

Corrigé 97. ← page 52

1. L'application $x \mapsto x^3 - 11\,x^2 - 166\,x - 280$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-456 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^3 - 11\,r^2 - 166\,r - 280 = 0$. D'où le résultat.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0,1,2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et $u_2 = 0$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 2$, $|u_1| = 2 \leqslant 2\,r$ et $|u_2| = 0 \leqslant 2\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 2\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 2\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 2\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 11\,|u_{n+2}| + 166\,|u_{n+1}| + 280\,|u_n| \\ &\leqslant 22\,r^{n+2} + 332\,r^{n+1} + 560\,r^n \\ &= 2\,r^n\left(11\,r^2 + 166\,r + 280\right) \\ &= 2\,r^{n+3} \end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 11\,r^2 + 166\,r + 280$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Soit $x \in]-R,R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} + 11\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} - 166\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} + 280\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$
Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - (1 - 2\,x)\,.$$

On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :

$$\Big(280\,x^3 - 166\,x^2 + 11\,x + 1\Big)\,S(x) + \Big(188\,x^2 - 9\,x - 1\Big) = 0,$$

d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $280\,x^3 - 166\,x^2 + 11\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S(x) = -\frac{83}{55\,(2\,x-1)} + \frac{76}{135\,(7\,x-1)} + \frac{16}{297\,(20\,x+1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1{,}1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = 2\,x$, $t = -20\,x$ et $t = 7\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{20}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{83}{55}\sum_{n=0}^{+\infty}(2\,x)^n - \frac{76}{135}\sum_{n=0}^{+\infty}(7\,x)^n + \frac{16}{297}\sum_{n=0}^{+\infty}(-20\,x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{76}{135}\cdot 7^n + \frac{83}{55}\cdot 2^n + \frac{16}{297}\,(-20)^n\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{76}{135}\cdot 7^n + \frac{83}{55}\cdot 2^n + \frac{16}{297}\,(-20)^n\,.$$

Corrigé 98. ← page 53

1. L'application $x \mapsto x^3 - 7\,x^2 - 11\,x - 5$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-22 < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1,+\infty[$ tel que : $r^3 - 7\,r^2 - 11\,r - 5 = 0$. D'où le résultat.

2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence triple (ou forte, si vous ne voyez pas en quoi le principe d'une récurrence double peut se généraliser) sur n. Le résultat est immédiat pour $n \in \{0{,}1{,}2\}$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_2 = -4$, si bien que : $|u_0| = 1 \leqslant 4$, $|u_1| = 1 \leqslant 4\,r$ et $|u_2| = 4 \leqslant 4\,r^2$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 4\,r^n$, $|u_{n+1}| \leqslant 4\,r^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leqslant 4\,r^{n+2}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+3} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+3}| &\leqslant 7\,|u_{n+2}| + 11\,|u_{n+1}| + 5\,|u_n| \\ &\leqslant 28\,r^{n+2} + 44\,r^{n+1} + 20\,r^n \\ &= 4\,r^n\Big(7\,r^2 + 11\,r + 5\Big) \\ &= 4\,r^{n+3} \end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente on a : $r^3 = 7\,r^2 + 11\,r + 5$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie $(*)$ par x^{n+3}, et on somme de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 7\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+3} + 11\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+3} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = 0.$$
Pour calculer les sommes du membre de gauche, on note qu'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = S(x) - \left(1 - x - 4\,x^2\right).$$
On simplifie de même les autres sommes. L'identité ci-dessus devient alors :
$$\left(-5\,x^3 + 11\,x^2 - 7\,x + 1\right) S(x) + \left(-14\,x^2 + 8\,x - 1\right) = 0,$$
d'où le résultat en isolant le terme dépendant de $S(x)$, et en divisant chaque membre de l'égalité par $-5\,x^3 + 11\,x^2 - 7\,x + 1$ (vous aurez à factoriser cette quantité pour reconnaître la fraction rationnelle de l'énoncé).

4. Comme le dénominateur a des racines multiples, la décomposition en éléments simples est plus subtile que dans les cas habituels. Je n'ai pas eu le temps ni la compétence pour rédiger le corrigé de cette question dans ce cas-là : un jour, peut-être. Pour l'heure, je n'ai pas d'autre choix que de vous demander de vous tourner vers le document *Méthodes* « hors-série », section 2.3, où j'explique la manœuvre. On a alors, pour tout x au voisinage de 0 :
$$S(x) = \frac{1}{16\,(5\,x-1)} - \frac{45}{16\,(x-1)} - \frac{7}{4\,(x^2 - 2\,x + 1)}.$$
Autre problème dû à l'absence de temps et de compétence pour coder complètement ce corrigé : les dénominateurs ne sont pas tous factorisés. N'imitez pas bêtement ce qui n'est dû qu'à un défaut de programmation.

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et de ses dérivées successives (qu'on obtient par dérivation terme à terme) :
$$\forall t \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}.$$
En prenant $t = x$ et $t = 5\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{5}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :
$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty} (5\,x)^n + \frac{45}{16}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{7}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= -\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty} (5\,x)^n + \frac{45}{16}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{7}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{16}\cdot 5^n - \frac{7}{4}n + \frac{17}{16}\right) x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{16} \cdot 5^n - \frac{7}{4} n + \frac{17}{16}.$$

Corrigé 99. ← page 53

1. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisque par hypothèse on a $u_0 = -3$ et $v_0 = -1$, si bien que : $|u_0| = 3 \leqslant 3$, et : $|u_0| = 1 \leqslant 3$ (on rappelle qu'on a $133^0 = 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 3 \cdot 133^n$ et $|v_n| \leqslant 3 \cdot 133^n$. D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| \leqslant 36|u_n| + 96|v_n| + 1 \leqslant 108 \cdot 133^n + 288 \cdot 133^n + 1 \\ &= 3\left(132 \cdot 133^n + \frac{1}{3}\right) \\ &\leqslant 3\left(132 \cdot 133^n + 133^n\right) \\ &\leqslant 3 \cdot 133^{n+1}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| \leqslant 12|u_n| + 32|v_n| + 4 \leqslant 36 \cdot 133^n + 96 \cdot 133^n + 4 \\ &= 3\left(44 \cdot 133^n + \frac{4}{3}\right) \\ &\leqslant 3\left(44 \cdot 133^n + 4 \cdot 133^n\right) \\ &\leqslant 3 \cdot 133^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R_u et R_v sont supérieurs ou égaux au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} 133^n x^n = \sum_{n \geqslant 0} (133\, x)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{133}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R_u \geqslant \frac{1}{133} > 0$, et de même pour R_v, d'où le résultat.

2. Soit $x \in]-R, R[$. On multiplie les deux égalités de $(*)$ par x^{n+1}, et on somme de $n = 0$ à $+\infty$. On obtient, pour la première d'entre elles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 36 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1} - 96 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 36\, x S_u(x) - 96\, x S_v(x) + \frac{x}{1-x},$$

mais on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - u_0 = S_u(x) + 3$. On a donc montré :

$$(-36\, x + 1)\, S_u(x) + 96 x S_v(x) = -\frac{x}{x-1} - 3.$$

On obtient de même la seconde égalité du système de l'énoncé, en partant de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1}$.

3. Soit $x \in]-R, R[$. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 96\, x L_2 - (32\, x + 1)\, L_1$ et $L_2 \leftarrow (-36\, x + 1)\, L_2 + 12 x L_1$, dans le système obtenu dans la question précédente. Elles donnent respectivement :

$$-\left(-4\, x + 1\right) S_u(x) = \frac{416\, x^2}{x-1} + \frac{x}{x-1} + 3,$$

et :

$$(-4\,x+1)\,S_v(x) = -\frac{156\,x^2}{x-1} + \frac{4\,x}{x-1} - 1.$$

Il reste à diviser par $-4\,x+1 \neq 0$, et à factoriser cette quantité, pour en déduire le résultat voulu.

4. Comme le dénominateur est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples est extrêmement classique et ne nécessite pas de commentaire particulier. Signalons seulement que pour obtenir les parties entières de ces décompositions en éléments simples (c'est ainsi que l'on nomme les constantes de la décomposition qui ne sont pas divisées par un polynôme non constant : cela n'a rien à voir avec la fonction partie entière que vous connaissez), il suffit de prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans chaque membre de l'égalité : celles de S_u et S_v s'obtiennent facilement en retenant les termes prépondérants aux numérateurs et dénominateurs, tandis que les termes du membre de droite ont une limite nulle, sauf justement la partie entière. En dehors de cela, rien d'inédit. On obtient, en suivant la routine habituelle, pour tout x au voisinage de 0 :

$$S_u(x) = 104 + \frac{139}{x-1} - \frac{32}{4\,x-1},$$

et :

$$S_v(x) = 104 + \frac{152}{3\,(x-1)} - \frac{32}{3\,(4\,x-1)}.$$

5. On rappelle le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En prenant $t = x$ et $t = 4\,x$ respectivement (ce qui nécessite de supposer $|x| < \frac{1}{4}$ pour bien avoir $|t| < 1$), on obtient pour tout x au voisinage de 0, d'après la décomposition en éléments simples obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_u(x) &= 104 - 139 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 32 \sum_{n=0}^{+\infty} (4\,x)^n \\ &= -3 + \sum_{n=1}^{+\infty} (32 \cdot 4^n - 139)\, x^n. \end{aligned}$$

et de même, toujours pour x au voisinage de 0 :

$$S_v(x) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{32}{3} \cdot 4^n - \frac{152}{3} \right) x^n.$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R,R[,\ S_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et : $S_v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = 32 \cdot 4^n - 139, \quad v_n = \frac{32}{3} \cdot 4^n - \frac{152}{3}.$$

Les coefficients constants de S_u et S_v permettent de retrouver les valeurs de u_0 et v_0 déjà données dans l'énoncé.

Corrigé 100. ← page 54

1. L'application $x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}\,x - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale, égale à $-\frac{1}{2} < 0$ en 1, et tend vers l'infini quand $x \to +\infty$ (donc en particulier elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$). Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que : $r^2 - \frac{1}{2}\,r - 1 = 0$. D'où le résultat.
On pourrait même expliciter r : un calcul direct donne $r = \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4}$.
2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence double sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque par hypothèse on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 5$, si bien que : $|u_0| = 0 \leqslant 5$ et $|u_1| = 5 \leqslant 5\,r$ (rappelons que nous avons $r \geqslant 1$). Montrons à présent l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n| \leqslant 5\,r^n$ et $|u_{n+1}| \leqslant 5\,r^{n+1}$. On majore alors la valeur absolue de u_{n+2} en l'isolant dans $(*)$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left| \frac{u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)} \right| \\
&\leqslant \frac{u_{n+1}}{n+2} + \frac{2u_n}{(n+2)(n+1)} \\
&\leqslant \frac{5}{2}\,r^{n+1} + 5\,r^n \\
&= 5\,r^n\left(\frac{1}{2}\,r + 1\right) \\
&= 5\,r^{n+2},
\end{aligned}$$
puisque d'après la question précédente on a : $r^2 = \frac{1}{2}\,r + 1$. D'où le résultat au rang $n+3$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On en déduit, par le théorème de comparaison des séries entières, que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (rx)^n$, qui est clairement de rayon de convergence $\frac{1}{r}$ (c'est une série géométrique, donc on sait qu'elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1). Ainsi : $R \geqslant \frac{1}{r} > 0$, d'où le résultat.
3. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ d'après la question précédente, sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. On a de plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$
On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$\begin{aligned}
S''(x) - S'(x) - 2S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) u_{n+2} - (n+1) u_{n+1} - 2u_n\right) x^n = 0,
\end{aligned}$$
d'où le résultat.
4. D'après la question précédente, S vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, or nous savons expliciter les solutions d'une telle équation. Pour cela, on note que son équation caractéristique est $x^2 - x - 2 = 0$, dont on vérifie facilement que ses deux racines sont -1 et 2. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = be^{(2\,x)} + ae^{(-x)}$. Pour en déduire les valeurs de a et b, il nous suffit d'une condition initiale vérifiée par S et S' (notons que S ne suffit pas, puisque nous avons

là une équation différentielle du second ordre). Or : $S(0) = u_0 = 0$, et : $S'(0) = u_1 = 5$, ce qui nous donne (après avoir noté que $S(0) = a + b$ et $S'(0) = -a + 2\,b$) le système linéaire suivant vérifié par a et b :

$$\begin{cases} \quad a + b = 0 \\ -a + 2b = 5 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donnent respectivement $a = -\frac{5}{3}$ et $b = \frac{5}{3}$. En conclusion, pour tout $x \in]-R, R[$ on a : $S(x) = \frac{5}{3}\,e^{(2\,x)} - \frac{5}{3}\,e^{(-x)}$, d'où le résultat.

5. Grâce à la question précédente, nous pouvons développer S en série entière explicitement. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} + \frac{5}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5\cdot 2^n}{3\,n!} - \frac{5\,(-1)^n}{3\,n!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Or on a aussi : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5\cdot 2^n}{3\,n!} - \frac{5\,(-1)^n}{3\,n!}.$$