La règle de D'Alembert

Exercices spécifiquement consacrés à la règle de D'Alembert. Certaines séries nécessiteront de savoir comment réagir en présence de la forme indéterminée 1^∞ (pour commencer, il faut savoir *remarquer* cette forme indéterminée).

Remarque sur le corrigé. Contrairement à ce que fait la machine dans certains corrigés, ne cherchez pas à systématiquement simplifier tous les calculs de constantes à une puissance élevée. Tant qu'il est possible d'en déduire la position de la limite par rapport à 1... Par exemple, laissez $\frac{1}{2^{100}}$ au lieu de le calculer péniblement, si de toute façon c'est en facteur d'un terme qui tend vers 0 ou l'infini.

Plus généralement : la machine fait souvent des calculs alambiqués au lieu de repérer des simplifications naturelles (du type : $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$). Lisez avec recul le corrigé, et cherchez là où des calculs pourraient être considérablement allégés.

Exercice 1. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}n!}{(2\,n)!}$. → page 8

Exercice 2. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 8

Exercice 3. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{13^n(n!)n^n}$. → page 8

Exercice 4. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$. → page 9

Exercice 5. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 9

Exercice 6. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$. → page 10

Exercice 7. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!^{17}}$. → page 10

Exercice 8. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 10

Exercice 9. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!}$. → page 11

Exercice 10. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{3^n(n!)n^n}$. → page 11

Exercice 11. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{7^n(n!)n^n}$. → page 12

Exercice 12. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 12

Exercice 13. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$. → page 12

Exercice 14. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{14^n(n!)n^n}$. → page 13

Exercice 15. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^3}{(2\,n)!^{12}}$. → page 13

Exercice 16. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^5}{(2\,n)!^3}$. → page 14

Exercice 17. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 14

Exercice 18. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^2}{(2\,n)!}$. → page 14

Exercice 19. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^{23}}{(2\,n)!}$. → page 15

Exercice 20. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{3^n(n!)n^n}$. → page 15

Exercice 21. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{85^n(n!)n^n}$. → page 15

Exercice 22. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 16

Exercice 23. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!^6}$. → page 16

Exercice 24. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{12\,n} n!^2}{(2\,n)!}$. → page 17

Exercice 25. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^{18}}{(2\,n)!^2}$. → page 17

Exercice 26. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!^2}$. → page 17

Exercice 27. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2\,n)!}$. → page 18

Exercice 28. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4n} n!}{(2n)!^3}$. → page 18

Exercice 29. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n} n!^7}{(2n)!}$. → page 19

Exercice 30. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4n}}{(2n)!^{16}}$. → page 19

Exercice 31. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2n}}{(2n)!^5}$. → page 19

Exercice 32. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n}}{(2n)!^3}$. → page 20

Exercice 33. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n} n!^3}{(2n)!^3}$. → page 20

Exercice 34. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n (n!) n^n}$. → page 21

Exercice 35. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n)!^2}$. → page 21

Exercice 36. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n}}{(2n)!}$. → page 21

Exercice 37. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{3^n (n!) n^n}$. → page 22

Exercice 38. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n (n!) n^n}$. → page 22

Exercice 39. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n (n!) n^n}$. → page 23

Exercice 40. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{5^n (n!) n^n}$. → page 23

Exercice 41. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{14^n (n!) n^n}$. → page 23

Exercice 42. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{5n} n!^4}{(2n)!}$. → page 24

Exercice 43. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n} n!}{(2n)!^4}$. → page 24

Exercice 44. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 25

Exercice 45. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!}$. → page 25

Exercice 46. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{5^n(n!)n^n}$. → page 25

Exercice 47. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 26

Exercice 48. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{7^n(n!)n^n}$. → page 26

Exercice 49. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{3^n(n!)n^n}$. → page 27

Exercice 50. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!^{16}}$. → page 27

Exercice 51. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}n!^4}{(2\,n)!^6}$. → page 27

Exercice 52. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 28

Exercice 53. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{9^n(n!)n^n}$. → page 28

Exercice 54. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 29

Exercice 55. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^2}{(2\,n)!^2}$. → page 29

Exercice 56. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}n!}{(2\,n)!^2}$. → page 29

Exercice 57. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^{27}}{(2\,n)!^4}$. → page 30

Exercice 58. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{4^n(n!)n^n}$. → page 30

Exercice 59. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 30

Exercice 60. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{3\,n} n!^{8}}{(2\,n)!}$. → page 31

Exercice 61. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{5^n (n!) n^n}$. → page 31

Exercice 62. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n} n!^{25}}{(2\,n)!^{2}}$. → page 32

Exercice 63. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{10\,n}}{(2\,n)!}$. → page 32

Exercice 64. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n (n!) n^n}$. → page 32

Exercice 65. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n}}{(2\,n)!^{20}}$. → page 33

Exercice 66. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!^{2}}$. → page 33

Exercice 67. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n (n!) n^n}$. → page 34

Exercice 68. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{20\,n} n!}{(2\,n)!^{11}}$. → page 34

Exercice 69. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n (n!) n^n}$. → page 34

Exercice 70. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{7^n (n!) n^n}$. → page 35

Exercice 71. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{4^n (n!) n^n}$. → page 35

Exercice 72. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n} n!^{2}}{(2\,n)!^{7}}$. → page 36

Exercice 73. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$. → page 36

Exercice 74. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n (n!) n^n}$. → page 36

Exercice 75. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n} n!^{4}}{(2\,n)!}$. → page 37

Exercice 76. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!^2}$. → page 37

Exercice 77. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{3^n(n!)n^n}$. → page 38

Exercice 78. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4\,n}n!^7}{(2\,n)!}$. → page 38

Exercice 79. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{6^n(n!)n^n}$. → page 38

Exercice 80. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4\,n}n!^5}{(2\,n)!}$. → page 39

Exercice 81. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{3\,n}n!}{(2\,n)!}$. → page 39

Exercice 82. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}n!^2}{(2\,n)!^2}$. → page 40

Exercice 83. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^3}{(2\,n)!^{25}}$. → page 40

Exercice 84. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4\,n}n!^2}{(2\,n)!}$. → page 40

Exercice 85. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!}$. → page 41

Exercice 86. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!}$. → page 41

Exercice 87. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{10\,n}n!^2}{(2\,n)!}$. → page 42

Exercice 88. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n(n!)n^n}$. → page 42

Exercice 89. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!^{52}}$. → page 43

Exercice 90. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$. → page 43

Exercice 91. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^7}{(2\,n)!^{16}}$. → page 43

Exercice 92. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!^2}$. → page 44

Exercice 93. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!^3}$. → page 44

Exercice 94. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{7^n (n!) n^n}$. → page 44

Exercice 95. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$. → page 45

Exercice 96. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!}$. → page 45

Exercice 97. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$. → page 46

Exercice 98. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!^2}$. → page 46

Exercice 99. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{2^n (n!) n^n}$. → page 46

Exercice 100. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!}$. → page 47

Corrigé 1. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^{2\,n} n!}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{n^{2\,n}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{2\,(2\,n+1) n^{2\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{2\,n+2} n^{-2\,n-1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2\,n} = e^{2\,n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\,n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n} n!}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 2. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1} (n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1} (2\,n+1) n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 3. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{13^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 13^n 13^{-n-1} (n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{13}\,(n+1)^{-n-1} (2\,n+1) n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{13}\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{13}\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{13^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 4. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{(n+1)!^2}{n!^2}\cdot\frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{n+2}}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{n+1}}{4\,n^n}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 5. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 6. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{n^{2\,n}} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+1)n^{2\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{2\,n+2}n^{-2\,n-2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\,n} = e^{2\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}\,e^2.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 7. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!}{(2\,n)!^{17}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^{17}}{(2\,n+2)!^{17}}\\ &= \frac{(n+1)^{n-15}}{131072\,(2\,n+1)^{17}n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{17179869184}\,(n+1)^{n+1}n^{-n-33}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!^{17}}$ converge.

Corrigé 8. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de ← page 1

$+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 9. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^n}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^n}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{n+1}n^{-n-2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!}$ converge.

Corrigé 10. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 3^n 3^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{2}{3}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{3}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4}{3}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 11. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{(2\,n)!}{7^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=7^n 7^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\&=\frac{2}{7}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4}{7}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4}{7}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2\,n)!}{7^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 12. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\&=(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 13. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de ← page 2

$+\infty$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}$$
$$= \frac{(n+1)^{n+2}}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{n+1}}{4\,n^n}.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 14. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{14^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 14^n 14^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$
$$= \frac{1}{7}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{7}\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{7}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{14^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 15. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n!^3}{(2\,n)!^{12}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \cdot \frac{(n+1)!^3}{n!^3} \cdot \frac{(2\,n)!^{12}}{(2\,n+2)!^{12}}$$
$$= \frac{1}{4096\,(2\,n+1)^{12}(n+1)^9} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16777216\,n^{21}}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^3}{(2\,n)!^{12}}$ converge.

Corrigé 16. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!^5}{(2\,n)!^3}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^5}{n!^5} \cdot \frac{(2\,n)!^3}{(2\,n+2)!^3} \\ &= \frac{(n+1)^{n+3}}{8\,(2\,n+1)^3 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{64}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{64}\,e.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^5}{(2\,n)!^3}$ converge.

Corrigé 17. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1} (n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1) n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 18. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n!^2}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{n+1}{2\,(2\,n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{4}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!^2}{(2\,n)!}$ converge.

Corrigé 19. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{n!^{23}}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=1\cdot\frac{(n+1)!^{23}}{n!^{23}}\cdot\frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\&=\frac{(n+1)^{22}}{2\,(2\,n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4}\,n^{21}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!^{23}}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 20. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=3^n3^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\&=\frac{2}{3}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4}{3}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4}{3}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 21. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{(2\,n)!}{85^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=85^n85^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\&=\frac{2}{85}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4}{85}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{85}\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(2\,n)!}{85^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 22. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1} (n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1) n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 23. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^n n!}{(2\,n)!^6}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^6}{(2\,n+2)!^6} \\ &= \frac{(n+1)^{n-4}}{64\,(2\,n+1)^6 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4096}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-11}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!^6}$ converge.

Corrigé 24. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{12\,n} n!^2}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{12\,n+12}}{n^{12\,n}} \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{12\,n+13}}{2\,(2\,n+1)n^{12\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{12\,n+12}}{4\,n^{12\,n}}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^{12\,n}}{n^{12\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{12\,n}}{n^{12\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{12\,n} = e^{12\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{12\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{12+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{12}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{12\,n} n!^2}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 25. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!^{18}}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^{18}}{n!^{18}} \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2}\\ &= \frac{(n+1)^{n+17}}{4\,(2\,n+1)^2 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16}\,(n+1)^{n+1} n^{-n+14}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^{18}}{(2\,n)!^2}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 26. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage ← page 2

de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2}\\ &= \frac{(n+1)^n}{4\,(2\,n+1)^2 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16}\,(n+1)^{n+1}n^{-n-3}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n n!}{(2\,n)!^2}$ converge.

Corrigé 27. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1\cdot 1\cdot\frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n^2}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2\,n)!}$ converge.

Corrigé 28. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^{4\,n}n!}{(2\,n)!^3}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{4\,n+4}}{n^{4\,n}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(2\,n)!^3}{(2\,n+2)!^3}\\ &= \frac{(n+1)^{4\,n+2}}{8\,(2\,n+1)^3 n^{4\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{64}\,(n+1)^{4\,n+4}n^{-4\,n-5}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4\,n} = e^{4\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{4\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{4+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^4.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4\,n} n!}{(2\,n)!^3}$ converge.

Corrigé 29. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!^7}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^7}{n!^7} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+7}}{2\,(2\,n+1) n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{n+1} n^{-n+5}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^7}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 30. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{4\,n}}{(2\,n)!^{16}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{4\,n+4}}{n^{4\,n}} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!^{16}}{(2\,n+2)!^{16}} \\ &= \frac{(n+1)^{4\,n-12}}{65536\,(2\,n+1)^{16} n^{4\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4294967296}\,(n+1)^{4\,n+4} n^{-4\,n-32}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4\,n} = e^{4\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{4\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{4+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^4.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4\,n}}{(2\,n)!^{16}}$ converge.

Corrigé 31. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!^5}$. Pour tout n au voisinage ← page 3

de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{n^{2\,n}} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!^5}{(2\,n+2)!^5}\\ &= \frac{(n+1)^{2\,n-3}}{32\,(2\,n+1)^5 n^{2\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1024}\,(n+1)^{2\,n+2} n^{-2\,n-10}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\,n} = e^{2\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!^5}$ converge.

Corrigé 32. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^n}{(2\,n)!^3}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!^3}{(2\,n+2)!^3}\\ &= \frac{(n+1)^{n-2}}{8\,(2\,n+1)^3 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{64}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-6}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!^3}$ converge.

Corrigé 33. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^n n!^3}{(2\,n)!^3}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^3}{n!^3} \cdot \frac{(2\,n)!^3}{(2\,n+2)!^3}\\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{8\,(2\,n+1)^3 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{64}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-3}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n n!^3}{(2\,n)!^3}$ converge.

Corrigé 34. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 35. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{1}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2}\\ &= \frac{1}{4\,(2\,n+1)^2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16\,n^4}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{(2\,n)!^2}$ converge.

Corrigé 36. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^n}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de ← page 3

$+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^n}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{n+1}n^{-n-2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!}$ converge.

Corrigé 37. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 3^n 3^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{3}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{3}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{3}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 38. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 39. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 40. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{5^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 5^n 5^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{2}{5}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{5}\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{5}\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{5^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 41. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{14^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage ← page 3

de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 14^n 14^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{7}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{7}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{7}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(2\,n)!}{14^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 42. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^{5\,n}n!^4}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{5\,n+5}}{n^{5\,n}} \cdot \frac{(n+1)!^4}{n!^4} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{5\,n+8}}{2\,(2\,n+1)n^{5\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{5\,n+5}n^{-5\,n+2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{5\,n}}{n^{5\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{5\,n}}{n^{5\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{5\,n} = e^{5\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{5\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{5+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^5.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^{5\,n}n!^4}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 43. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^n n!}{(2\,n)!^4}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^4}{(2\,n+2)!^4}\\ &= \frac{(n+1)^{n-2}}{16\,(2\,n+1)^4 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{256}\,(n+1)^{n+1}n^{-n-7}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!^4}$ converge.

Corrigé 44. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 45. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n!}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{1}{2\,(2\,n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!}$ converge.

Corrigé 46. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{5^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage ← page 4

de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 5^n 5^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{5}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{5}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{5}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{5^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 47. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 48. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{7^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 7^n 7^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{7}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{7}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{7}\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{7^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 49. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 3^n 3^{-n-1} (n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{3}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1) n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{3}\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{3}\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 50. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n!}{(2\,n)!^{16}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^{16}}{(2\,n+2)!^{16}} \\ &= \frac{1}{65536\,(2\,n+1)^{16}(n+1)^{15}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4294967296\, n^{31}}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!^{16}}$ converge.

Corrigé 51. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{2\,n} n!^4}{(2\,n)!^6}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{n^{2\,n}} \cdot \frac{(n+1)!^4}{n!^4} \cdot \frac{(2\,n)!^6}{(2\,n+2)!^6} \\ &= \frac{(n+1)^{2\,n}}{64\,(2\,n+1)^6 n^{2\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4096}\,(n+1)^{2\,n+2} n^{-2\,n-8}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\,n} = e^{2\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n} n!^4}{(2\,n)!^6}$ converge.

Corrigé 52. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 53. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{9^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 9^n 9^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{9}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{9}\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{9}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{9^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 54. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 55. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n!^2}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2}\\ &= \frac{1}{4\,(2\,n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16\,n^2}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^2}{(2\,n)!^2}$ converge.

Corrigé 56. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{2\,n} n!}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{n^{2\,n}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2}\\ &= \frac{(n+1)^{2\,n+1}}{4\,(2\,n+1)^2 n^{2\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16}\,(n+1)^{2\,n+2}n^{-2\,n-3}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\,n} = e^{2\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2n} n!}{(2n)!^2}$ converge.

Corrigé 57. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n!^{27}}{(2n)!^4}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!^{27}}{n!^{27}} \cdot \frac{(2n)!^4}{(2n+2)!^4} \\ &= \frac{(n+1)^{23}}{16\,(2n+1)^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{256}\,n^{19}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^{27}}{(2n)!^4}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 58. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2n)!}{4^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 4^n 4^{-n-1} (n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2}\,(n+1)^{-n-1}(2n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{4^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 59. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1} (n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 60. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^{3\,n} n!^8}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{3\,n+3}}{n^{3\,n}} \cdot \frac{(n+1)!^8}{n!^8} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{3\,n+10}}{2\,(2\,n+1) n^{3\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{3\,n+3} n^{-3\,n+6}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{3\,n}}{n^{3\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{3\,n}}{n^{3\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3\,n} = e^{3\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{3\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{3+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^3.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{3\,n} n!^8}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 61. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{5^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 5^n 5^{-n-1} (n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{2}{5}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1) n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{5}\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{5}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{5^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 62. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!^{25}}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^{25}}{n!^{25}} \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2}\\ &= \frac{(n+1)^{n+24}}{4\,(2\,n+1)^2 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16}\,(n+1)^{n+1} n^{-n+21}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^{25}}{(2\,n)!^2}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 63. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{10\,n}}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{10\,n+10}}{n^{10\,n}} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{10\,n+9}}{2\,(2\,n+1)n^{10\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{10\,n+10} n^{-10\,n-2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^{10\,n}}{n^{10\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{10\,n}}{n^{10\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10\,n} = e^{10\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{10\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{10+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{10}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{10\,n}}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 64. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage ← page 5

de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 65. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^n}{(2\,n)!^{20}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!^{20}}{(2\,n+2)!^{20}} \\ &= \frac{(n+1)^{n-19}}{1048576\,(2\,n+1)^{20}n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1099511627776}\,(n+1)^{n+1}n^{-n-40}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!^{20}}$ converge.

Corrigé 66. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n!}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2} \\ &= \frac{1}{4\,(2\,n+1)^2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16\,n^3}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(2\,n)!^2}$ converge.

Corrigé 67. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\&=(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 68. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{n^{20\,n}n!}{(2\,n)!^{11}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\frac{(n+1)^{20\,n+20}}{n^{20\,n}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(2\,n)!^{11}}{(2\,n+2)!^{11}}\\&=\frac{(n+1)^{20\,n+10}}{2048\,(2\,n+1)^{11}n^{20\,n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4194304}\,(n+1)^{20\,n+20}n^{-20\,n-21}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de $\frac{(n+1)^{20\,n}}{n^{20\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{20\,n}}{n^{20\,n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{20\,n}=e^{20\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{20\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{20+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{20}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{20\,n}n!}{(2\,n)!^{11}}$ converge.

Corrigé 69. Pour alléger les notations, posons : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\&=(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 70. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{7^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 7^n 7^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{2}{7}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{7}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{7}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2\,n)!}{7^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 71. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{4^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 4^n 4^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{2}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{4^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 72. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!^7}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!^7}{(2\,n+2)!^7}\\ &= \frac{(n+1)^{n-4}}{128\,(2\,n+1)^7 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16384}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-12}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!^7}$ converge.

Corrigé 73. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{n^{2\,n}} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+1) n^{2\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{2\,n+2} n^{-2\,n-2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\,n} = e^{2\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}\,e^2.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 74. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage ← page 5

de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 75. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!^4}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^4}{n!^4} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+4}}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{n+1}n^{-n+2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^4}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 76. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n!}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2} \\ &= \frac{1}{4\,(2\,n+1)^2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16\,n^3}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!^2}$ converge.

Corrigé 77. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 3^n 3^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{2}{3}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{3}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{3}\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{3^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 78. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^{4\,n} n!^7}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{4\,n+4}}{n^{4\,n}} \cdot \frac{(n+1)!^7}{n!^7} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{4\,n+10}}{2\,(2\,n+1)n^{4\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{4\,n+4}n^{-4\,n+5}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4\,n} = e^{4\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{4\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{4+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^4.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4\,n} n!^7}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 79. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{6^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 6^n 6^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{3}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(2\,n)!}{6^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 80. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^{4\,n} n!^5}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{4\,n+4}}{n^{4\,n}} \cdot \frac{(n+1)!^5}{n!^5} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{4\,n+8}}{2\,(2\,n+1)n^{4\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{4\,n+4} n^{-4\,n+3}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4\,n} = e^{4\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{4\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{4+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^4.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^{4\,n} n!^5}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 81. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^{3\,n} n!}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{3\,n+3}}{n^{3\,n}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{3\,n+3}}{2\,(2\,n+1)n^{3\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{3\,n+3} n^{-3\,n-1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{3\,n}}{n^{3\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{3\,n}}{n^{3\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3\,n} = e^{3\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{3\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{3+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^3.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{3\,n} n!}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 82. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n^{2\,n} n!^2}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{n^{2\,n}} \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2} \\ &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{4\,(2\,n+1)^2 n^{2\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16}\,(n+1)^{2\,n+2} n^{-2\,n-2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\,n} = e^{2\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{16}\,e^2.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n} n!^2}{(2\,n)!^2}$ converge.

Corrigé 83. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n^n n!^3}{(2\,n)!^{25}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^3}{n!^3} \cdot \frac{(2\,n)!^{25}}{(2\,n+2)!^{25}} \\ &= \frac{(n+1)^{n-21}}{33554432\,(2\,n+1)^{25} n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1125899906842624}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-47}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^3}{(2\,n)!^{25}}$ converge.

Corrigé 84. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n^{4\,n} n!^2}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage ← page 6

de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{4\,n+4}}{n^{4\,n}} \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{4\,n+5}}{2\,(2\,n+1)n^{4\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{4\,n+4}}{4\,n^{4\,n}}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{4\,n}}{n^{4\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4\,n} = e^{4\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{4\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{4+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^4.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^{4\,n} n!^2}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 85. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^n n!}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}\,e.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n n!}{(2\,n)!}$ converge.

Corrigé 86. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^n n!}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}\,e.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n n!}{(2\,n)!}$ converge.

Corrigé 87. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^{10\,n} n!^2}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{10\,n+10}}{n^{10\,n}}\cdot\frac{(n+1)!^2}{n!^2}\cdot\frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{10\,n+11}}{2\,(2\,n+1)n^{10\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{10\,n+10}}{4\,n^{10\,n}}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{10\,n}}{n^{10\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{10\,n}}{n^{10\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10\,n} = e^{10\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{10\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{10+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{10}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{10\,n} n!^2}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 88. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n\cdot\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 89. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n!}{(2\,n)!^{52}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^{52}}{(2\,n+2)!^{52}} \\ &= \frac{1}{4503599627370496\,(2\,n+1)^{52}(n+1)^{51}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{20282409603651670423947251286016\,n^{103}}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(2\,n)!^{52}}$ converge.

Corrigé 90. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{2\,n+2}}{n^{2\,n}} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{2\,n+1}}{2\,(2\,n+1)n^{2\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{2\,n+2} n^{-2\,n-2}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}}$. Or :

$$\frac{(n+1)^{2\,n}}{n^{2\,n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\,n} = e^{2\,n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\,n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}\,e^2.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2\,n}}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 91. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n!^7}{(2\,n)!^{16}}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!^7}{n!^7} \cdot \frac{(2\,n)!^{16}}{(2\,n+2)!^{16}} \\ &= \frac{1}{65536\,(2\,n+1)^{16}(n+1)^{9}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4294967296\,n^{25}}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!^7}{(2\,n)!^{16}}$ converge.

Corrigé 92. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2}\\ &= \frac{(n+1)^n}{4\,(2\,n+1)^2 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-3}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!^2}$ converge.

Corrigé 93. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n}{(2\,n)!^3}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!^3}{(2\,n+2)!^3}\\ &= \frac{(n+1)^{n-2}}{8\,(2\,n+1)^3 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{64}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-6}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!^3}$ converge.

Corrigé 94. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{7^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 7^n 7^{-n-1}(n+1)^{-n-1} n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{2}{7}\,(n+1)^{-n-1}(2\,n+1) n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{7}\,(n+1)^{-n-1} n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{7}\, e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2\,n)!}{7^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 95. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+2}}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{n+1}}{4\,n^n}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 96. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n^n n!}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}\, e.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!}{(2\,n)!}$ converge.

Corrigé 97. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!^2}{n!^2} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!}\\ &= \frac{(n+1)^{n+2}}{2\,(2\,n+1)n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{n+1}}{4\,n^n}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

La limite est strictement supérieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n n!^2}{(2\,n)!}$ diverge (grossièrement).

Corrigé 98. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n^n}{(2\,n)!^2}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot 1 \cdot \frac{(2\,n)!^2}{(2\,n+2)!^2}\\ &= \frac{(n+1)^{n-1}}{4\,(2\,n+1)^2 n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16}\,(n+1)^{n+1} n^{-n-4}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2\,n)!^2}$ converge.

Corrigé 99. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$. Pour tout n au voisinage ← page 7

de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 2^n 2^{-n-1}(n+1)^{-n-1}n^n \cdot \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)^{-n-1}(2\,n+1)n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(n+1)^{-n-1}n^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite de ce quotient, nous avons besoin de déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Or :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\,e^{(-1)}.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(2\,n)!}{2^n n^n n!}$ converge.

Corrigé 100. Pour alléger les notations, posons : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{n!}{(2\,n)!}$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2\,n)!}{(2\,n+2)!} \\ &= \frac{1}{2\,(2\,n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

La limite est strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{(2\,n)!}$ converge.