Réduction d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur (guidé)

On montre comment la connaissance d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme permet de déduire des décompositions en somme directe de sous-espaces stables, et de réduire l'endomorphisme. Procédez par analyse et synthèse. Si vous coincez, regardez du côté du document *Méthodes* (section 5.1).

Commentaire sur la résolution de la première question. Je propose un corrigé de la première question avec et sans le lemme des noyaux, puisqu'il n'est pas au programme de toutes les filières de classes préparatoires.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 36

$$f^3 + f = -2\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 39

$$f^3 - 4f^2 + 5f = 6\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{3\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 3\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 42

$$f^3 + 4f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \operatorname{im}(f) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\operatorname{im}(f)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 45

$$f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 49

$$f^3 - 25\,f^2 + 24\,f = 600\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{25\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 25\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 52

$$f^3 - f^2 + 3\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 55

$$f^3 - f^2 + 4\,f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 59

$$f^3 - 2\,f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{0, 1\}$.

On suppose dans les questions suivantes que réciproquement, 0 et 1 sont bien valeurs propres de f, et que f N'EST PAS diagonalisable.

3. Montrer qu'on a :
$$\dim\left(\ker(f)\right) = 1, \quad \dim\left(\ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right)\right) = 1, \quad \text{et :} \quad \dim\left(\mathrm{im}(f)\right) = 2.$$
4. Montrer que si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f) \setminus \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$, et si l'on pose $\vec{y} = \left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{y}, \vec{x})$ est une base de $\mathrm{im}(f)$. *Observez qu'on a :* $\mathrm{im}(f) = \ker\left(\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^2\right)$.
5. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie :

→ page 62

$$f^3 + 7\,f^2 + 8\,f = -12\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-6\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -6\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie :

→ page 65

$$f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie :

→ page 69

$$f^3 = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 72

$$f^3 - 3\,f^2 + 2\,f = 6\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{3\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 3\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 75

$$f^3 + f^2 - 4\,f = 24\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{3\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 3\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 79

$$f^3 - 12\,f^2 + 2\,f - 24\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{12\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 12\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 82

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 86

$$f^3 + 10\,f^2 + 36\,f = -55\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-5\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -5\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 89

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 92

$$f^3 + f^2 + 11\,f + 11\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 11\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 11\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 11\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 96

$$f^3 = -14\,f. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 98

$$f^3 + 123\,f^2 + 123\,f + 122\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-122\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -122\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -122 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 102

$$f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{3\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 3\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 106

$$f^3 - 39\,f^2 + f = 39\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{39\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 39\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 109

$$f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 112

$$f^3 + 26\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 115

$$f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 118

$$f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 27. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 121

$$f^3 - f^2 + 3\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 124

$$f^3 - 4\,f^2 + 8\,f - 32\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{4\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 4\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 29. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 127

$$f^3 + f^2 + 3\,f = -3\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 30. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 130

$$f^3 - 4\,f^2 + 5\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{1, 2\}$.

On suppose dans les questions suivantes que réciproquement, 1 et 2 sont bien valeurs propres de f, et que f n'est pas diagonalisable.

3. Montrer qu'on a :

$$\dim\left(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)\right) = 1, \quad \dim\left(\ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right)\right) = 1, \quad \text{et :} \quad \dim\Big(\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)\Big) = 2.$$

4. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) \setminus \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$, et si l'on pose $\vec{y} = \left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{y}, \vec{x})$ est une base de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. *Observez qu'on a :* $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \ker\Big(\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^2\Big)$.
5. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 134

$$f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 137

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.

3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 33. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 140

$$f^3 + 4\,f^2 + f = -30\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-5\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -5\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 34. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 143

$$f^3 - 7\,f^2 + 25\,f = 175\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{7\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 7\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 35. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 147

$$f^3 - f^2 + 3\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 36. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 150

$$f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 37. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 153

$$f^3 = -f. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\mathrm{im}(f)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 156

$$f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 159

$$f^3 - f^2 - f = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{1, -1\}$.

On suppose dans les questions suivantes que réciproquement, 1 et -1 sont bien valeurs propres de f, et que f n'est pas diagonalisable.

3. Montrer qu'on a :
$$\dim\left(\ker(f + \mathrm{Id}_E)\right) = 1, \quad \dim\left(\ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right)\right) = 1, \quad \text{et :} \quad \dim\Big(\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)\Big) = 2.$$
4. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) \setminus \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$, et si l'on pose $\vec{y} = \left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{y}, \vec{x})$ est une base de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. *Observez qu'on a :* $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \ker\Big(\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^2\Big)$.
5. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 163

$$f^3 + f^2 + 2\,f = -2\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 41. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 166

$$f^3 - 14\,f^2 - 14\,f - 15\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{15\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 15\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 42. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 170

$$f^3 + 5\,f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-5\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -5\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 43. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 173

$$f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 44. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 177

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 45. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 180

$$f^3 + 16\, f^2 + f = -16\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-16\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -16\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 46. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 183

$$f^3 - 2\, f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{0, 1\}$.

On suppose dans les questions suivantes que réciproquement, 0 et 1 sont bien valeurs propres de f, et que f N'est PAS diagonalisable.

3. Montrer qu'on a :

$$\dim(\ker(f)) = 1, \quad \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1, \quad \text{et :} \quad \dim\Big(\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)\Big) = 2.$$

4. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) \setminus \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et si l'on pose $\vec{y} = (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{y}, \vec{x})$ est une base de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. *Observez qu'on a :* $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E)^2\Big)$.
5. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 47. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 186

$$f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\mathrm{im}(f)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 48. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 189

$$f^3 + 26\,f^2 - 23\,f = -108\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-27\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$.

4. On suppose : $f \neq -27\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 49. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 193

$$f^3 + 3\,f^2 + 5\,f = -6\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 50. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 196

$$f^3 + 10\,f = -11\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 51. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 200

$$f^3 - 2\,f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{0, 1\}$.

On suppose dans les questions suivantes que réciproquement, 0 et 1 sont bien valeurs propres de f, et que f N'est PAS diagonalisable.

3. Montrer qu'on a :

$$\dim(\ker(f)) = 1, \quad \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1, \quad \text{et :} \quad \dim\left(\ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)\right) = 2.$$

4. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E) \setminus \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et si l'on pose $\vec{y} = (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{y}, \vec{x})$ est une base de $\ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$. *Observez qu'on a :* $\ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E) = \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)^2\right)$.
5. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 52. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 203

$$f^3 + 2f^2 + 43f + 42\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -42 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 53. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 206

$$f^3 - 5f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{5\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 5\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 210

$$f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{3\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 3\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 55. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 213

$$f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\mathrm{im}(f)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 56. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 215

$$f^3 + 10\,f = -11\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 57. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 219

$$f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \operatorname{im}(f) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\operatorname{im}(f)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 58. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 222

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 59. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 225

$$f^3 - 7\,f^2 - 35\,f = 99\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\,f + 9\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{11\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\,f + 9\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 4\,f + 9\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 11\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 60. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 229

$$f^3 - f^2 + 2\,f = 2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 61. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 232

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 62. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 235

$$f^3 = -3\,f. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 63. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 238

$$f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-3\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -3\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 64. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 241

$$f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 65. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 245

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 66. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 248

$$f^3 - f^2 = -12\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 67. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 251

$$f^3 - 3\,f^2 + 4\,f = 2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 68. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 255

$$f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 69. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 258

$$f^3 = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 70. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 262

$$f^3 - f^2 + 6\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 71. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 265

$$f^3 + 4\,f^2 + 38\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\mathrm{im}(f)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 72. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 268

$$f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 73. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 271

$$f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 74. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 274

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 75. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 277

$$f^3 = -f. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \operatorname{im}(f) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\operatorname{im}(f)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 76. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 280

$$f^3 + 7\,f^2 - 7\,f = -8\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 8\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-8\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -8\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 77. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 284

$$f^3 - 2\,f = 4\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 78. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 287

$$f^3 - 7\,f^2 + 8\,f = 12\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{6\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 6\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 79. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 291

$$f^3 = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 80. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 294

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 81. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 298

$$f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 82. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 301

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 83. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 304

$$f^3 - f^2 + 2\,f = 2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 84. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 307

$$f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 85. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 310

$$f^3 + f^2 + 5\,f = -5\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 86. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 314

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 87. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 317

$$f^3 = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 88. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 320

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 89. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 323

$$f^3 + 2\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{0\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 90. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 326

$$f^3 - 5\,f^2 + 6\,f - 30\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{5\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 5\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 91. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 329

$$f^3 - 2\,f^2 + f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 92. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 333

$$f^3 + 7\,f^2 + f + 7\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-7\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -7\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 93. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 336

$$f^3 - 2\,f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{0, 1\}$.

On suppose dans les questions suivantes que réciproquement, 0 et 1 sont bien valeurs propres de f, et que f n'est pas diagonalisable.

3. Montrer qu'on a :

$$\dim(\ker(f)) = 1, \quad \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1, \quad \text{et :} \quad \dim\Big(\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)\Big) = 2.$$

4. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) \setminus \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et si l'on pose $\vec{y} = (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{y}, \vec{x})$ est une base de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. *Observez qu'on a :* $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E)^2\Big)$.
5. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 94. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 339

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 95. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 343

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = 15\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{3\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$.

4. On suppose : $f \neq 3\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 96. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 346

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 97. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 350

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 98. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 353

$$f^3 + 3718\, f^2 + 2\, f + 7436\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{-3718\}$.

3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq -3718\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} -3718 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 99. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 356

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{1\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq \mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 100. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 359

$$f^3 - 2\,f^2 + f = 2\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais que $\dim(E) = 3$. L'application f est toujours un endomorphisme quelconque de E vérifiant $(*)$. L'objectif des questions suivantes est de réduire f.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est exactement $\{2\}$.
3. Montrer que si $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}\}$, et si l'on pose $\vec{y} = f(\vec{x})$, alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. On suppose : $f \neq 2\mathrm{Id}_E$. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 1. ← page 1

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $4 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+2 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2-X+2 = (X+1)\,Q+4,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{x}\right) + 2\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 4\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X+2 = (X+1)\left(X^2-X+2\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f+2\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{4}f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{4}\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{y}\right) &= \left(f+\mathrm{Id}_E\right)\left(\frac{1}{4}f^2\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{4}f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \left(f+\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(\frac{1}{4}\,f^2 - \frac{1}{4}\,f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3+f+2\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{4}\left(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\right)\left(\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3+f+2\mathrm{Id}_E\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & + f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & 2\vec{z} & + f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & 2\vec{y} & - & 2\vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f=-2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}f^3(\vec{x})-\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f-2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^2-2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}f^3(\vec{x})-\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}f^3(\vec{x})-\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4+\frac{1}{2}X^3-\frac{1}{4}X^2+1$ par le polynôme annulateur X^3+X+2, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4+\frac{1}{2}X^3-\frac{1}{4}X^2+1=\left(X^3+X+2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}X+\frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\,f^4+\frac{1}{2}\,f^3-\frac{1}{4}\,f^2+\mathrm{Id}_E&=\left(f^3+f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{4}\,f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3+X+2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2-X+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2-f+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=f(\vec{x})-2\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl}a\vec{x}&+bf(\vec{x})&=&\vec{0}\\-2b\vec{x}&+(a+b)\,f(\vec{x})&=&\vec{0}\end{array}\right..$$

L'opération $L_2\leftarrow bL_2-(a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2-ab-2\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+ab+2\,b^2=0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a+\frac{1}{2}\,b\right)^2+\frac{7}{4}b^2=0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a+\frac{1}{2}\,b=b=0$. Il en découle aisément $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 2\vec{x} = \vec{y} - 2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 2. ← page 1

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et $X^2 - X + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $8 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 4f^2 + 5f - 6\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 4f^2 + 5f - 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 4f^2 + 5f - 6\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 2$ par $X - 3$. On a en effet :

$$X^2 - X + 2 = (X-3)\,Q + 8,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 8\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 4X^2 + 5X - 6 = (X-3)(X^2 - X + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 4f^2 + 5f - 6\mathrm{Id}_E = (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\big) \circ (f - 3\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{8} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8} f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{8}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{8} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8} f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}\right) \\ &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{8} f^2 - \frac{1}{8} f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{8}\left(f^3 - 4f^2 + 5f - 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{8}\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)\left((f - 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{8}\left(f^3 - 4f^2 + 5f - 6\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $8\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} &=& \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& 3\vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& 9\vec{y} & - & 2\vec{z} & + \ f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 6\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{8}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{8}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(f^3(\vec{x}) - 4f^2(\vec{x}) + 5f(\vec{x}) - 6\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 4\,f^2 + 5\,f = 6\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 4\,f^2 - 5\,f + 6\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 4\,f^3 - 5\,f^2 + 6\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{8}X^4 + \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 4X^2 + 5X - 6$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{8}X^4 + \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{2} = \left(X^3 - 4X^2 + 5X - 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}X - \frac{1}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8}\,f^4 + \frac{1}{4}\,f^3 + \frac{3}{8}\,f^2 - \frac{1}{2}\,f + \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 4\,f^2 + 5\,f - 6\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{8}\,f - \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 6$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{3\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 3, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-3$ pour écrire P comme produit de $X-3$ et de X^2-X+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x})-2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + 2\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{7}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 3\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 3 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 3\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 3), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x})-2\vec{x} = \vec{y}-2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 3.

← page 1

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Première démonstration. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 4$ par X. On a en effet :
$$X^2 + 4 = XQ + 4,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x}) + 4\vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + 4\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3 + 4X = X(X^2 + 4)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$:
$$f^3 + 4f = f \circ \left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{$\ddagger$}$$
Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{4} f \circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a :
$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(\frac{1}{4} f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 + 4f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$
donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de plus on a :
$$\vec{z} = f\left(\frac{1}{4} Q(f)(\vec{x})\right) \in \mathrm{im}(f)$$
donc : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$.
Deuxième démonstration. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ il existe $\vec{u} \in E$ tel que : $\vec{z} = f(\vec{u})$. Cela permet d'en déduire, comme pour $\vec{y}$, une relation vérifiée par $\vec{z}$ et ses images itérées par f : en évaluant $(*)$ en $\vec{u}$, on obtient en effet : $f^3(\vec{u}) + 4f(\vec{u}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} = f(\vec{u})$ on peut réécrire cette égalité ainsi : $f^2(\vec{z}) + 4\vec{z} = \vec{0}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & -\ 4\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et que $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z} = f(\vec{u})$ pour un vecteur $\vec{u} \in E$ convenable. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 4\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Pour trouver un antécédent par f de $\vec{z}$, il suffit tout simplement d'écrire :

$$\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) = f\left(-\frac{1}{4}f(\vec{x})\right),$$

donc $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Remarque. Si E est supposé de dimension finie, on peut démontrer le résultat voulu autrement : en effet, deux sous-espaces vectoriels F et G, *en dimension finie*, sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Le théorème du rang nous permet d'avoir la condition sur les dimensions, et il suffit de vérifier que l'intersection de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ est réduite au vecteur nul. Or c'est une vérification relativement facile : soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. Par définition de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$, on a $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et l'existence d'un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. En évaluant $(*)$ en $\vec{x}$, on a alors :

$$f^3(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) = \vec{0} \iff f^2(\vec{y}) + 4\vec{y} = \vec{0},$$

et comme $f(\vec{y}) = \vec{0}$ par hypothèse, il en est bien sûr de même de $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc l'égalité ci-dessus devient : $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont en somme directe, et si E est de dimension finie alors on a bien $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ par l'argument ci-dessus.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 4X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$, et comme $\mathrm{im}(f)$ est stable par f (du fait que f commute avec lui-même), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathrm{im}(f)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\mathrm{im}(f)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4\vec{x}$ (en effet, si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$ s'écrit $\vec{x} = f(\vec{z})$ avec $\vec{z} \in E$, alors : $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f^3(\vec{z}) = -4f(\vec{z}) = -4\vec{x}$ car f vérifie $(*)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -4b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 4\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 4\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, on en déduit : $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\mathrm{im}(f)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\mathrm{im}(f)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\mathrm{im}(f)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4\vec{x}$ car $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 4. ← page 2

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 2$ et $X^2 - 2X + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 2$ admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $10 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - 2X + 2$ par $X + 2$. On a en effet :

$$X^2 - 2X + 2 = (X + 2)\,Q + 10,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - 2f\,(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 10\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X + 4 = (X + 2)\,(X^2 - 2X + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{10} f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{5} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{10}\,(f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10} f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{5} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\
&= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{10}\,f^2 - \frac{1}{5}\,f + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité ($*$) de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\Big(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{10}\Big(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\,((f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $10\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - 2f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = 2f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) = f^2(\vec{y}) + f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) = -2\vec{y} + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) = 4\vec{y} - 2\vec{z} + 2f(\vec{z}) \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) = -2\vec{y} + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) = 8\vec{y} - 2\vec{z} \end{cases}.$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{10}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{5}f(\vec{x}) - \frac{2}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(f^3(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{6}{5}f(\vec{x}) + \frac{8}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 2\,f - 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^2 - 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{6}{5}f(\vec{x}) + \frac{8}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{6}{5}f(\vec{x}) + \frac{8}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{10}X^4 + \frac{2}{5}X^3 + \frac{1}{5}X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{8}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X + 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{10}X^4 + \frac{2}{5}X^3 + \frac{1}{5}X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{8}{5} = \Big(X^3 - 2X + 4\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{10}X + \frac{2}{5}\Big)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{10}\,f^4 + \frac{2}{5}\,f^3 + \frac{1}{5}\,f^2 - \frac{6}{5}\,f + \frac{8}{5}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E\Big) \circ \Big(-\frac{1}{10}\,f + \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\Big) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X + 4$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 2$ pour écrire P comme produit de $X + 2$ et de $X^2 - 2X + 2$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - 2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +(a+2b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a + 2b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - 2\,ab - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 2\,ab + 2\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$(a + b)^2 + 1b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -2), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - 2\vec{x} = 2\vec{y} - 2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2-2f+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 5. ← page 2

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-25$ et X^2+24 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-25$ admet 25 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 25 donne : $649 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+24\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-25\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+24\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3-25f^2+24f-600\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-25f^2+24f-600\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-25f^2+24f-600\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-25\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+24\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-25\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+24\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+24 par $X-25$. On a en effet :

$$X^2+24 = (X-25)\,Q + 649,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 24\vec{x} = (f-25\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 649\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-25X^2+24X-600 = (X-25)(X^2+24)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-25\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+24\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-25f^2+24f-600\mathrm{Id}_E = (f-25\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+24\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+24\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-25\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{649} f^2(\vec{x}) + \frac{24}{649}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{649}(f - 25\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 25\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 25\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{649} f^2(\vec{x}) + \frac{24}{649}\vec{x}\right) \\ &= (f - 25\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{649} f^2 + \frac{24}{649}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{649}\left(f^3 - 25 f^2 + 24 f - 600\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 24\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{649}\left(f^2 + 24\mathrm{Id}_E\right)((f - 25\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{649}\left(f^3 - 25 f^2 + 24 f - 600\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 25\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $649\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 25\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 24\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -24\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & + f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 25\vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 625\vec{y} & - & 24\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 24L_1$, ou

$L_3 \leftarrow L_3 - 625L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{24}{649}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{625}{649}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{24}{649}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{625}{649}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 25\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 25\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 25\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{24}{649}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{649}f^3(\vec{x}) + \frac{24}{649}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{25}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{600}{649}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{649}\left(f^3(\vec{x}) - 25f^2(\vec{x}) + 24f(\vec{x}) - 600\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 25\,f^2 + 24\,f = 600\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 24\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{649}f^4(\vec{x}) + \frac{601}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{15000}{649}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 25\,f^2 - 24\,f + 600\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 25\,f^3 - 24\,f^2 + 600\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{649}f^4(\vec{x}) + \frac{601}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{15000}{649}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{649}f^4(\vec{x}) + \frac{601}{649}f^2(\vec{x}) + \frac{15000}{649}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{649}X^4 + \frac{601}{649}X^2 + \frac{15000}{649}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 25X^2 + 24X - 600$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{649}X^4 + \frac{601}{649}X^2 + \frac{15000}{649} = \left(X^3 - 25X^2 + 24X - 600\right) \cdot \left(-\frac{1}{649}X - \frac{25}{649}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{649}\,f^4 + \frac{601}{649}\,f^2 + \frac{15000}{649}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 25\,f^2 + 24\,f - 600\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{649}\,f - \frac{25}{649}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 25X^2 + 24X - 600$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{25\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 25, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 25$ pour écrire P comme produit de $X - 25$ et de $X^2 + 24$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 24\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -24\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ -24b\vec{x} & +af(\vec{x}) = \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 24\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 24\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 25\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 25 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 25\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 25), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -24\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 24\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 6. ← page 2

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 3$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $4 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + 3\,f - 3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 3\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 3\,f - 3\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 3$ par $X - 1$. On a en effet :
$$X^2 + 3 = (X - 1)\,Q + 4,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 3\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 4\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 3X - 3 = (X-1)(X^2+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 3f - 3\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{4} f^2 + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 - f^2 + 3f - 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{4}\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 - f^2 + 3f - 3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 3\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} f^3(\vec{x}) + \frac{3}{4} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 3f(\vec{x}) - 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 3f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{4} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 3f + 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 3f^2 + 3f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 3X - 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4} = \left(X^3 - X^2 + 3X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}X - \frac{1}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} f^4 - \frac{1}{2} f^2 + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 3f - 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{4} f - \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + 3X - 3$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2+3, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+3\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -3b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-3\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+3\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 7. ← page 3

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+4 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$

admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+4\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-f^2+4\,f-4\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+4\,f-4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+4\,f-4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+4 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+4 = (X-1)\,Q+5,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+4\vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+5\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+4X-4 = (X-1)(X^2+4)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+4\,f-4\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+4\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+4\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{5}(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x}\right)\\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{5}\,f^2+\frac{4}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3-f^2+4\,f-4\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+4\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\Big(f^2+4\mathrm{Id}_E\Big)\left(\left(f-\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3-f^2+4\,f-4\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 4\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -4\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 4\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5} f^3(\vec{x}) + \frac{4}{5} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) - 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 4\,f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) - \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 4\,f + 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 4\,f^2 + 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) - \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5} f^4 (\vec{x}) - \frac{3}{5} f^2 (\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 - \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 4X - 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 - \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \left(X^3 - X^2 + 4X - 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X - \frac{1}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5} f^4 - \frac{3}{5} f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 4\, f - 4\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5} f - \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + 4X - 4$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 4$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 4\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -4b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 4\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 4\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur

propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 8. ← page 3

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Première démonstration. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - 2X + 1$ par X. On a en effet :
   $$X^2 - 2X + 1 = XQ + 1,$$
   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
   $$f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$
   Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + X = X(X^2 - 2X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$:
   $$f^3 - 2f^2 + f = f \circ \left(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{‡}$$
   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :
   $$\vec{y} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$
   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a :
   $$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3 - 2f^2 + f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$
   donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de plus on a :
   $$\vec{z} = f\left(Q(f)(\vec{x})\right) \in \mathrm{im}(f)$$
   donc : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$.
   Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$.

Deuxième démonstration. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ il existe $\vec{u} \in E$ tel que : $\vec{z} = f(\vec{u})$. Cela permet d'en déduire, comme pour $\vec{y}$, une relation vérifiée par $\vec{z}$ et ses images itérées par f : en évaluant $(*)$ en $\vec{u}$, on obtient en effet : $f^3(\vec{u}) - 2f^2(\vec{u}) + f(\vec{u}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} = f(\vec{u})$ on peut réécrire cette égalité ainsi : $f^2(\vec{z}) - 2f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & + & 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et que $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z} = f(\vec{u})$ pour un vecteur $\vec{u} \in E$ convenable. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Pour trouver un antécédent par f de $\vec{z}$, il suffit tout simplement d'écrire :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) = f(-f(\vec{x}) + 2\vec{x}),$$

donc $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Remarque. Si E est supposé de dimension finie, on peut démontrer le résultat voulu autrement : en effet, deux sous-espaces vectoriels F et G, *en dimension finie*, sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Le théorème du rang nous permet d'avoir la condition sur les dimensions, et il suffit de vérifier que l'intersection de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ est réduite au vecteur nul. Or c'est une vérification relativement facile : soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Par définition de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$, on a $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et l'existence d'un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. En évaluant $(*)$ en $\vec{x}$, on a alors :

$$f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow f^2(\vec{y}) - 2f(\vec{y}) + \vec{y} = \vec{0},$$

et comme $f(\vec{y}) = \vec{0}$ par hypothèse, il en est bien sûr de même de $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc l'égalité ci-dessus devient : $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe, et si E est de dimension finie alors on a bien $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ par l'argument ci-dessus.

2. D'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0, 1\}$
3. Comme suggéré par l'énoncé, justifions d'abord rapidement que : $\mathrm{im}(f) = \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)^2\right)$. Si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$, alors il existe $\vec{y} \in E$ tel que : $\vec{x} = f(\vec{y})$. Alors : $(f - \mathrm{Id}_E)^2(\vec{x}) = (f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ f(\vec{y}) = f^3(\vec{y}) - 2f^2(\vec{y}) + f(\vec{y}) = \vec{0}$ d'après $(*)$, donc $\vec{x} \in \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)^2\right)$. Pour l'inclusion réciproque : si $\vec{x} \in \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)^2\right)$, alors en développant l'expression $(f - \mathrm{Id}_E)^2(\vec{x}) = \vec{0}$ on a : $f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$. En isolant $\vec{x}$ dans cette égalité, on a : $\vec{x} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) = f(-f(\vec{x}) + 2\vec{x}) \in \mathrm{im}(f)$, d'où l'inclusion réciproque, et l'égalité entre ces deux sous-espaces vectoriels.
Calculons à présent les dimensions demandées. Comme 0 et 1 sont valeurs propres, on a :

$$\dim(\ker(f)) \geqslant 1 \quad \text{et :} \quad \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1.$$

De plus, comme les sous-espaces propres sont en somme directe :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \leqslant \dim(E) = 3.$$

On déduit de ces trois inégalités que si l'un des deux sous-espaces propres est de dimension supérieure ou égale à 2, alors la somme de ces dimensions est à la fois supérieure et inférieure à 3, donc on doit avoir :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 3.$$

Par le critère de diagonalisation, f serait diagonalisable : faux par hypothèse. Ainsi nécessairement : $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$. On obtient la dernière dimension demandée grâce à la somme directe $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, qui implique :

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

D'où le résultat.
4. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$, et comme $\mathrm{im}(f)$ est stable par $f - \mathrm{Id}_E$ (du fait que $f - \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \in \mathrm{im}(f)$. Ainsi $(\vec{y}, \vec{x})$ est bien une famille de $\mathrm{im}(f)$. Comme elle est de cardinal $2 = \dim(\mathrm{im}(f))$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour en déduire qu'elle est une base de $\mathrm{im}(f)$. Montrons-le : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{y} + b\vec{x} = \vec{0}$. On a :

$$(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{et :} \quad (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f - \mathrm{Id}_E)((f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x})) = \vec{0}$$

car $\vec{x} \in \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)^2\right)$. Par conséquent, appliquer $f - \mathrm{Id}_E$ à la relation de dépendance linéaire ci-avant donne : $b\vec{y} = \vec{0}$. Comme $\vec{y} = (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \neq \vec{0}$ par hypothèse sur $\vec{x}$ (en effet $\vec{x} \notin \ker(f - \mathrm{Id}_E)$), ceci impose : $b = 0$. La relation de dépendance linéaire devient alors $a\vec{y} = \vec{0}$, et de là on conclut que $a = 0$. Ainsi $a = b = 0$ et la famille est libre.

5. On a vu que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont respectivement de dimension 1 et 2. Soient $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$ et $(\vec{y}, \vec{x})$ la base de $\mathrm{im}(f)$ construite dans la question précédente. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{y}, \vec{x})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{y}) = \vec{y}$ (en effet : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f - \mathrm{Id}_E)^2(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \mathrm{im}(f) = \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)^2\right)$) et enfin on a par définition $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, donc : $f(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{x}$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 9. ← page 4

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+6$ et X^2+X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+6$ admet -6 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -6 donne : $32 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 6\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + 7\,f^2 + 8\,f + 12\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 7\,f^2 + 8\,f + 12\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 7\,f^2 + 8\,f + 12\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 2$ par $X + 6$. On a en effet :

$$X^2 + X + 2 = (X+6)\,Q + 32,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f + 6\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 32\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 7X^2 + 8X + 12 = (X+6)(X^2 + X + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 7\,f^2 + 8\,f + 12\mathrm{Id}_E = (f + 6\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ (f + 6\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{32} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{32} f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{32}(f + 6\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 6\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{32}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{32}f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}\right) \\ &= (f + 6\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{32}f^2 + \frac{1}{32}f + \frac{1}{16}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{32}\left(f^3 + 7f^2 + 8f + 12\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{32}\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)((f + 6\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{32}\left(f^3 + 7f^2 + 8f + 12\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $32\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -6\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & + f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 6\vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & 36\vec{y} & - 2\vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 6\vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & & 30\vec{y} & - 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 30L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{32} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{32} f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{32} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{32} f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{32} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{32} f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{32} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{32} f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 6\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{32} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{32} f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{32} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{32} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{16} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{3}{16} f^2(\vec{x}) - \frac{3}{16} f(\vec{x}) - \frac{3}{8}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(f^3(\vec{x}) + 7f^2(\vec{x}) + 8f(\vec{x}) + 12\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 7\,f^2 + 8\,f = -12\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{32} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{16} f^3(\vec{x}) + \frac{27}{32} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8} f(\vec{x}) + \frac{15}{8}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -7\,f^2 - 8\,f - 12\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -7\,f^3 - 8\,f^2 - 12\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{32} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{16} f^3(\vec{x}) + \frac{27}{32} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8} f(\vec{x}) + \frac{15}{8}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{32} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{16} f^3(\vec{x}) + \frac{27}{32} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8} f(\vec{x}) + \frac{15}{8}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{32}X^4 - \frac{1}{16}X^3 + \frac{27}{32}X^2 + \frac{7}{8}X + \frac{15}{8}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 7X^2 + 8X + 12$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{32}X^4 - \frac{1}{16}X^3 + \frac{27}{32}X^2 + \frac{7}{8}X + \frac{15}{8} = \left(X^3 + 7X^2 + 8X + 12\right) \cdot \left(-\frac{1}{32}X + \frac{5}{32}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{32}\,f^4 - \frac{1}{16}\,f^3 + \frac{27}{32}\,f^2 + \frac{7}{8}\,f + \frac{15}{8}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 7\,f^2 + 8\,f + 12\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{32}\,f + \frac{5}{32}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 7X^2 + 8X + 12$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace

vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-6\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -6, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+6$ pour écrire P comme produit de $X+6$ et de X^2+X+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+f+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - 2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{cccc} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2+ab-2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - ab + 2\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a - \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{7}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -6\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+6\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+6\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f+6\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+6\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -6 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+6\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+6\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -6\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -6), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - 2\vec{x} = -\vec{y} - 2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 10. ← page 4

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-2$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-2$

admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 2$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 2)\,Q + 5,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 5\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X - 2)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{5}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\ &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{5} f^2 + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\left((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=2\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}\vec{x}&=&\vec{y}&+\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&f(\vec{y})&+f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&f^2(\vec{y})&+f^2(\vec{z})\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rclll}\vec{x}&=&\vec{y}&+\ \vec{z}&\\ f(\vec{x})&=&2\vec{y}&&+\ f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&4\vec{y}&-\ \vec{z}&\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=-\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f-2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{5}f^3(\vec{x})+\frac{1}{5}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{2}{5}f^2(\vec{x})+\frac{2}{5}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x})-2f^2(\vec{x})+f(\vec{x})-2\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{5}f^4(\vec{x})+\frac{3}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3=2\,f^2-f+2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=2\,f^3-f^2+2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x})+\frac{3}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \left(X^3 - 2X^2 + X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X - \frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\,f^4 + \frac{3}{5}\,f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\,f - \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 2$ pour écrire P comme produit de $X - 2$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur

propre de f associé à 2), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 11. ← page 4

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 1$ par $X+1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 1 = (X+1)\,Q + 3,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{†}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + \mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{3}f^2 - \frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3 + \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & 2\vec{y} & - \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$

d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) - \frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + \vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 = -\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{3}X + \frac{2}{3} = \left(X^3 + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}\,f^4 + \frac{2}{3}\,f^3 - \frac{1}{3}\,f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\,f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 - X + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f

dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=f(\vec{x})-\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2-(a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2-ab-b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+ab+b^2=0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a+\frac{1}{2}\,b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a+\frac{1}{2}\,b=b=0$. Il en découle aisément $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq-\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim\left(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)\right)=3-\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim\left(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)+\dim\left(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)\right)$, avec $\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim\left(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)=1$ et $\dim\left(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)\right)=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=-\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=f(\vec{x})-\vec{x}=\vec{y}-\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 12. ← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $11\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)&=\ker\Big((f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)\Big)\\&=\ker(f^3-3\,f^2+2\,f-6\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-3\,f^2+2\,f-6\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+2\,f-6\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que

$\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X-3$. On a en effet :

$$X^2+2=(X-3)\,Q+11,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+2\vec{x}=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+11\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-3X^2+2X-6=(X-3)(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-3f^2+2f-6\mathrm{Id}_E=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-3\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{11}f^2(\vec{x})+\frac{2}{11}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{11}(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{11}f^2(\vec{x})+\frac{2}{11}\vec{x}\right)\\&=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{11}f^2+\frac{2}{11}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{11}\left(f^3-3f^2+2f-6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})&=\frac{1}{11}\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)((f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{11}\left(f^3-3f^2+2f-6\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $11\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et

l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{11}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{11}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{11}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{11}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{11}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{11} f^3(\vec{x}) + \frac{2}{11} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{11}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{11}\left(f^3(\vec{x}) - 3f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - 6\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 3\,f^2 + 2\,f = 6\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{11} f^4(\vec{x}) + \frac{7}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{18}{11}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 3\,f^2 - 2\,f + 6\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 3\,f^3 - 2\,f^2 + 6\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{11} f^4(\vec{x}) + \frac{7}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{18}{11}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{11} f^4(\vec{x}) + \frac{7}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{18}{11}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{11}X^4 + \frac{7}{11}X^2 + \frac{18}{11}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 3X^2 + 2X - 6$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{11}X^4 + \frac{7}{11}X^2 + \frac{18}{11} = \left(X^3 - 3X^2 + 2X - 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{11}X - \frac{3}{11}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{11}\,f^4+\frac{7}{11}\,f^2+\frac{18}{11}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-3\,f^2+2\,f-6\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{11}\,f-\frac{3}{11}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3-3X^2+2X-6$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{3\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 3, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-3$ pour écrire P comme produit de $X-3$ et de X^2+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-2\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0}\\ -2b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0}\end{array}\right..$$
L'opération $L_2\leftarrow bL_2-aL_1$ donne alors : $(-a^2-2\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+2\,b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq 3\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim\left(\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\right)<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim\left(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)\right)=3-\dim\left(\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\right)>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim\left(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim\left(\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\right)+\dim\left(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)\right)$, avec $\dim\left(\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 1$ (car 3 est valeur propre de f) et $\dim\left(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim\left(\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\right)=1$ et $\dim\left(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)\right)=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=3\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 3), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-2\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Corrigé 13.

← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et X^2+4X+8 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $29 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2-4\,f-24\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2-4\,f-24\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2-4\,f-24\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+4X+8 par $X-3$. On a en effet :

$$X^2+4X+8 = (X-3)\,Q+29,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+4f(\vec{x})+8\vec{x} = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+29\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2-4X-24 = (X-3)(X^2+4X+8)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2-4\,f-24\mathrm{Id}_E = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-3\mathrm{Id}_E)\,. \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{29}f^2(\vec{x})+\frac{4}{29}f(\vec{x})+\frac{8}{29}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{29}(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{29}f^2(\vec{x})+\frac{4}{29}f(\vec{x})+\frac{8}{29}\vec{x}\right)\\ &= (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{29}f^2+\frac{4}{29}f+\frac{8}{29}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{29}\Big(f^3+f^2-4\,f-24\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{29}\Big(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E\Big)((f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{29}\Big(f^3+f^2-4\,f-24\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $29\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 4f(\vec{z}) + 8\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -4f(\vec{z}) - 8\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & 8\vec{z} & - \; 4f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) & = & 21\vec{y} & - & 8\vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 21L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{29}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{29}f(\vec{x}) + \frac{8}{29}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{29}f^2(\vec{x}) - \frac{4}{29}f(\vec{x}) + \frac{21}{29}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{29}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{29}f(\vec{x}) + \frac{8}{29}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{29}f^2(\vec{x}) - \frac{4}{29}f(\vec{x}) + \frac{21}{29}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\,f + 8\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{29}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{29}f(\vec{x}) + \frac{8}{29}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{29}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{29}f^2(\vec{x}) + \frac{8}{29}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{29}f^2(\vec{x}) + \frac{12}{29}f(\vec{x}) + \frac{24}{29}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{29}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) - 4f(\vec{x}) - 24\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 - 4f = 24\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{29}f^4(\vec{x}) - \frac{8}{29}f^3(\vec{x}) - \frac{3}{29}f^2(\vec{x}) + \frac{52}{29}f(\vec{x}) + \frac{168}{29}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 + 4f + 24\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 + 4f^2 + 24f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{29}f^4(\vec{x}) - \frac{8}{29}f^3(\vec{x}) - \frac{3}{29}f^2(\vec{x}) + \frac{52}{29}f(\vec{x}) + \frac{168}{29}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{29}f^4(\vec{x}) - \frac{8}{29}f^3(\vec{x}) - \frac{3}{29}f^2(\vec{x}) + \frac{52}{29}f(\vec{x}) + \frac{168}{29}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{29}X^4 - \frac{8}{29}X^3 - \frac{3}{29}X^2 + \frac{52}{29}X + \frac{168}{29}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 - 4X - 24$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{29}X^4 - \frac{8}{29}X^3 - \frac{3}{29}X^2 + \frac{52}{29}X + \frac{168}{29} = \left(X^3 + X^2 - 4X - 24\right)\cdot\left(-\frac{1}{29}X - \frac{7}{29}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{29}f^4 - \frac{8}{29}f^3 - \frac{3}{29}f^2 + \frac{52}{29}f + \frac{168}{29}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 - 4f - 24\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{29}f - \frac{7}{29}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 - 4X - 24$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{3\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 3, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-3$ pour écrire P comme produit de $X-3$ et de X^2+4X+8, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 4f + 8\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans

cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-4f(\vec{x})-8\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+4f+8\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -8b\vec{x} & +(a-4b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2\leftarrow bL_2-(a-4b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2+4\,ab-8\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2-4\,ab+8\,b^2=0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$(a-2\,b)^2+4b^2=0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a-2\,b=b=0$. Il en découle aisément $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq 3\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car 3 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=3\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 3), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-4f(\vec{x})-8\vec{x}=-4\vec{y}-8\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+4\,f+8\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 14. ← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-12$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-12$ admet 12 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 12 donne : $146\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)&=\ker\left((f-12\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &=\ker(f^3-12\,f^2+2\,f-24\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-12\,f^2+2\,f-24\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-12\,f^2+2\,f-24\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que

$\ker(f-12\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X-12$. On a en effet :

$$X^2+2=(X-12)\,Q+146,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+2\vec{x}=(f-12\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+146\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-12X^2+2X-24=(X-12)\,(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-12\,f^2+2\,f-24\mathrm{Id}_E=(f-12\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-12\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{146}f^2(\vec{x})+\frac{1}{73}\vec{x},\qquad \text{et :}\quad \vec{z}=\frac{1}{146}\,(f-12\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-12\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-12\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y})&=(f-12\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{146}f^2(\vec{x})+\frac{1}{73}\vec{x}\right)\\&=(f-12\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{146}\,f^2+\frac{1}{73}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(‡)}{=}\frac{1}{146}\Big(f^3-12\,f^2+2\,f-24\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-12\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z})&=\frac{1}{146}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\left((f-12\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\&\overset{(‡)}{=}\frac{1}{146}\Big(f^3-12\,f^2+2\,f-24\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-12\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $146\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et

l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 12\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 12\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 144\vec{y} & - & 2\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 144L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{146} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{73}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{146} f^2(\vec{x}) + \frac{72}{73}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{146} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{73}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{146} f^2(\vec{x}) + \frac{72}{73}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 12\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 12\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 12\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{146} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{73}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{146} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{73} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{6}{73} f^2(\vec{x}) + \frac{12}{73}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{146}\left(f^3(\vec{x}) - 12 f^2(\vec{x}) + 2 f(\vec{x}) - 24\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 12\,f^2 + 2\,f - 24\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$.
Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{146} f^4(\vec{x}) + \frac{71}{73} f^2(\vec{x}) + \frac{144}{73}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 12\,f^2 - 2\,f + 24\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 12\,f^3 - 2\,f^2 + 24\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{146} f^4(\vec{x}) + \frac{71}{73} f^2(\vec{x}) + \frac{144}{73}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{146} f^4(\vec{x}) + \frac{71}{73} f^2(\vec{x}) + \frac{144}{73}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{146}X^4 + \frac{71}{73}X^2 + \frac{144}{73}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 12X^2 + 2X - 24$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{146}X^4 + \frac{71}{73}X^2 + \frac{144}{73} = \left(X^3 - 12X^2 + 2X - 24\right) \cdot \left(-\frac{1}{146}X - \frac{6}{73}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{146}\,f^4+\frac{71}{73}\,f^2+\frac{144}{73}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-12\,f^2+2\,f-24\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{146}\,f-\frac{6}{73}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3-12X^2+2X-24$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{12\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 12, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-12$ pour écrire P comme produit de $X-12$ et de X^2+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-2\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0}\\ -2b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0}\end{array}\right. .$$

L'opération $L_2\leftarrow bL_2-aL_1$ donne alors : $(-a^2-2\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+2\,b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq 12\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f-12\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f-12\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f-12\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-12\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car 12 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-12\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-12\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=12\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-12\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 12), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-2\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}12&0&0\\0&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Corrigé 15. ← page 6

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+1$. On a en effet :
$$X^2+1=(X+1)\,Q+2,$$
   avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x})+\vec{x}=(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$
   Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+X+1=(X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$
   Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
   donc : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\left((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \Big(X^3 + X^2 + X + 1\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\Big)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\,f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\Big) \circ \Big(-\frac{1}{2}\,f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\Big) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme

$E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 16. ← page 6

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 5$ et $X^2 + 5X + 11$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 5$ admet -5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -5 donne : $11 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 10\,f^2 + 36\,f + 55\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 10\,f^2 + 36\,f + 55\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 10\,f^2 + 36\,f + 55\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 5X + 11$ par $X + 5$. On a en effet :

$$X^2 + 5X + 11 = (X + 5)\,Q + 11,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 5f\,(\vec{x}) + 11\vec{x} = (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 11\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 10X^2 + 36X + 55 = (X + 5)\,(X^2 + 5X + 11)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 10\,f^2 + 36\,f + 55\mathrm{Id}_E = (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + 5\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{11} f^2\,(\vec{x}) + \frac{5}{11} f\,(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{11}\,(f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{11}f^2\,(\vec{x}) + \frac{5}{11}f\,(\vec{x}) + \vec{x}\right)\\ &= (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{11}\,f^2 + \frac{5}{11}\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{11}\left(f^3 + 10\,f^2 + 36\,f + 55\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{11}\left(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E\right)((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{11}\left(f^3 + 10\,f^2 + 36\,f + 55\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $11\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$. Ayant démontré : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+5\,f+11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+5\,f+11\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+5\,f+11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2+5\,f+11\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\,(\vec{z}) + 5f\,(\vec{z}) + 11\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\,(\vec{z}) = -5f\,(\vec{z}) - 11\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcrcr} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& -\;5\vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& 25\vec{y} &-& 11\vec{z} &-& 5f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcr} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& -\;5\vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2\,(\vec{x}) + 5f\,(\vec{x}) &=& &-& 11\vec{z} && \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{11} f^2(\vec{x}) - \frac{5}{11} f(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{11} f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{11} f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{11} f^2(\vec{x}) - \frac{5}{11} f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{11} f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{11} f^3(\vec{x}) + \frac{5}{11} f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{5}{11} f^2(\vec{x}) - \frac{25}{11} f(\vec{x}) - 5\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{11}\left(f^3(\vec{x}) + 10 f^2(\vec{x}) + 36 f(\vec{x}) + 55\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 10f^2 + 36f = -55\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{11} f^4(\vec{x}) - \frac{10}{11} f^3(\vec{x}) - \frac{36}{11} f^2(\vec{x}) - 5f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = -10f^2 - 36f - 55\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -10f^3 - 36f^2 - 55f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{11} f^4(\vec{x}) - \frac{10}{11} f^3(\vec{x}) - \frac{36}{11} f^2(\vec{x}) - 5f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 10X^2 + 36X + 55$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-5\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -5, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 5$ pour écrire P comme produit de $X + 5$ et de $X^2 + 5X + 11$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -5f(\vec{x}) - 11\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 5f + 11\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{llll} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -11b\vec{x} & +(a-5b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a - 5b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 + 5ab - 11b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - 5ab + 11b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a - \frac{5}{2} b\right)^2 + \frac{19}{4} b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{5}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -5\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -5 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -5\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -5), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -5f(\vec{x}) - 11\vec{x} = -5\vec{y} - 11\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 5\,f + 11\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 17. ← page 6

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} &+\vec{z} \\ f(\vec{x}) &= f(\vec{y}) &+f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= f^2(\vec{y}) &+f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &= \vec{y} & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= \vec{y} - \vec{z} & \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 18. ← page 7

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 11$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $12 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 11\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 11\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + 11\, f + 11\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+11\,f+11\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+11\,f+11\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+11 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+11 = (X+1)\,Q+12,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+11\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+12\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+11X+11 = (X+1)\,(X^2+11)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+11\,f+11\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+11\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+11\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{12}f^2\,(\vec{x})+\frac{11}{12}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{12}\,(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{12}f^2\,(\vec{x})+\frac{11}{12}\vec{x}\right)\\
&= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{12}\,f^2+\frac{11}{12}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{12}\left(f^3+f^2+11\,f+11\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2+11\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{12}\left(f^2+11\mathrm{Id}_E\right)((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{12}\left(f^3+f^2+11\,f+11\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2+11\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $12\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 11\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -11\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 11\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 11L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{12} f^2(\vec{x}) + \frac{11}{12}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{12} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{12}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{12} f^2(\vec{x}) + \frac{11}{12}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{12} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{12}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2+11\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{12} f^2(\vec{x}) + \frac{11}{12}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{12} f^3(\vec{x}) + \frac{11}{12} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{12} f^2(\vec{x}) - \frac{11}{12}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 11 f(\vec{x}) + 11\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 11\,f + 11\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 11\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{12} f^4(\vec{x}) - \frac{5}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{11}{12}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 11\,f - 11\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 11\,f^2 - 11\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{12} f^4(\vec{x}) - \frac{5}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{11}{12}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{12}f^4(\vec{x})-\frac{5}{6}f^2(\vec{x})+\frac{11}{12}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{12}X^4-\frac{5}{6}X^2+\frac{11}{12}$ par le polynôme annulateur $X^3+X^2+11X+11$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{12}X^4-\frac{5}{6}X^2+\frac{11}{12}=\left(X^3+X^2+11X+11\right)\cdot\left(-\frac{1}{12}X+\frac{1}{12}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{12}f^4-\frac{5}{6}f^2+\frac{11}{12}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3+f^2+11\,f+11\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{12}f+\frac{1}{12}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3+X^2+11X+11$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2+11, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+11\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-11\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl}a\vec{x}&+bf(\vec{x})&=&\vec{0}\\-11b\vec{x}&+af(\vec{x})&=&\vec{0}\end{array}\right..$$

L'opération $L_2\leftarrow bL_2-aL_1$ donne alors : $(-a^2-11\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+11\,b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq-\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+11\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=-\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc

c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -11\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 11\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 19. ← page 7

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 + 14$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $14 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \big(f^2 + 14\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 14\, f). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 14\, f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 14\, f) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 14$ par X. On a en effet :

$$X^2 + 14 = XQ + 14,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 14\vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + 14\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 14X = X(X^2 + 14)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 14\, f = f \circ \big(f^2 + 14\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2 + 14\mathrm{Id}_E\big) \circ f. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{14} f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{14} f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{14} f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(\frac{1}{14} f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{14}\big(f^3 + 14\, f\big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 14\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{14}\left(f^2 + 14\mathrm{Id}_E\right)(f \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{14}\left(f^3 + 14\, f\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $14\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 14\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -14\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & 14\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{14}f^2(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{14}f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{14}f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 = -14\,f$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 14\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{14} f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = -14\,f$, on a aussi : $f^4 = -14\,f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{14}f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 14X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 14\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -14\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -14b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 14\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 14\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -14\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 14\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 20. ← page 7

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 122$ et $X^2 + X + 1$ sont

deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+122$ admet -122 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -122 donne : $14763 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+122\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+122\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3+123\,f^2+123\,f+122\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+123\,f^2+123\,f+122\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+123\,f^2+123\,f+122\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+122\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+122\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+X+1 par $X+122$. On a en effet :

$$X^2+X+1 = (X+122)\,Q+14763,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+\vec{x} = (f+122\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+14763\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+123X^2+123X+122 = (X+122)(X^2+X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+122\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+123\,f^2+123\,f+122\mathrm{Id}_E = (f+122\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\big)\circ(f+122\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+122\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{14763}f^2(\vec{x})+\frac{1}{14763}f(\vec{x})+\frac{1}{14763}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{14763}(f+122\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+122\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+122\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+122\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{14763}f^2(\vec{x})+\frac{1}{14763}f(\vec{x})+\frac{1}{14763}\vec{x}\right)\\ &= (f+122\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{14763}f^2+\frac{1}{14763}f+\frac{1}{14763}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{14763}\Big(f^3+123\,f^2+123\,f+122\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+122\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{14763}\Big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)\big((f+122\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\big)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{14763}\Big(f^3+123\,f^2+123\,f+122\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+122\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+122\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 122\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $14763\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 122\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -122\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 122\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 14884\vec{y} & - & \vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 122\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 14762\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 14762L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{14763} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{14763} f(\vec{x}) + \frac{1}{14763}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{14763} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{14763} f(\vec{x}) + \frac{14762}{14763}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{14763} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{14763} f(\vec{x}) + \frac{1}{14763}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{14763} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{14763} f(\vec{x}) + \frac{14762}{14763}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 122\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f+122\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$:

cela revient à démontrer que $(f+122\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+f+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+122\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+122\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{14763}f^2(\vec{x})+\frac{1}{14763}f(\vec{x})+\frac{1}{14763}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{14763}f^3(\vec{x})+\frac{1}{14763}f^2(\vec{x})+\frac{1}{14763}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{122}{14763}f^2(\vec{x})-\frac{122}{14763}f(\vec{x})-\frac{122}{14763}\vec{x}\right.\\ &= \frac{1}{14763}\left(f^3(\vec{x})+123f^2(\vec{x})+123f(\vec{x})+122\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+123\,f^2+123\,f+122\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+122\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{14763}f^4(\vec{x})-\frac{2}{14763}f^3(\vec{x})+\frac{4920}{4921}f^2(\vec{x})+\frac{14761}{14763}f(\vec{x})+\frac{14762}{14763}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-123\,f^2-123\,f-122\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-123\,f^3-123\,f^2-122\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{14763}f^4(\vec{x})-\frac{2}{14763}f^3(\vec{x})+\frac{4920}{4921}f^2(\vec{x})+\frac{14761}{14763}f(\vec{x})+\frac{14762}{14763}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+122\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+122\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{14763}f^4(\vec{x})-\frac{2}{14763}f^3(\vec{x})+\frac{4920}{4921}f^2(\vec{x})+\frac{14761}{14763}f(\vec{x})+\frac{14762}{14763}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{14763}X^4-\frac{2}{14763}X^3+\frac{4920}{4921}X^2+\frac{14761}{14763}X+\frac{14762}{14763}$ par le polynôme annulateur $X^3+123X^2+123X+122$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{14763}X^4-\frac{2}{14763}X^3+\frac{4920}{4921}X^2+\frac{14761}{14763}X+\frac{14762}{14763}=\left(X^3+123X^2+123X+122\right)\cdot\left(-\frac{1}{14763}X+\frac{121}{14763}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{14763}\,f^4-\frac{2}{14763}\,f^3+\frac{4920}{4921}\,f^2+\frac{14761}{14763}\,f+\frac{14762}{14763}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+123\,f^2+123\,f+122\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{14763}\,f\right.\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3+123X^2+123X+122$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-122\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -122, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+122$ pour écrire P comme produit de $X+122$ et de X^2+X+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+f+\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette

égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 + ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -122\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 122\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 122\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 122\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 122\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -122 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 122\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + 122\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + 122\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -122\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 122\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -122), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x} = -\vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -122 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 21. ← page 8

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 3$ et $X^2 - X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $7 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+1 par $X-3$. On a en effet :

$$X^2-X+1=(X-3)\,Q+7,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\vec{x}=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+7\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-4X^2+4X-3=(X-3)(X^2-X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-4f^2+4f-3\mathrm{Id}_E=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-3\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{7}f^2(\vec{x})-\frac{1}{7}f(\vec{x})+\frac{1}{7}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{7}(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2(\vec{x})-\frac{1}{7}f(\vec{x})+\frac{1}{7}\vec{x}\right)\\&=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{7}f^2-\frac{1}{7}f+\frac{1}{7}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{7}\Big(f^3-4f^2+4f-3\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z})&=\frac{1}{7}\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)((f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{7}\Big(f^3-4f^2+4f-3\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $7\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et

l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rclcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rclcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 6\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{7}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{7}f(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(f^3(\vec{x}) - 4f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) - 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{5}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 4\,f^2 - 4\,f + 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 4\,f^3 - 4\,f^2 + 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{5}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{5}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{7}X^4 + \frac{2}{7}X^3 + \frac{4}{7}X^2 - \frac{5}{7}X + \frac{6}{7}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 4X^2 + 4X - 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{7}X^4 + \frac{2}{7}X^3 + \frac{4}{7}X^2 - \frac{5}{7}X + \frac{6}{7} = \left(X^3 - 4X^2 + 4X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}X - \frac{2}{7}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{7}f^4 + \frac{2}{7}f^3 + \frac{4}{7}f^2 - \frac{5}{7}f + \frac{6}{7}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 4f^2 + 4f - 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{7}f - \frac{2}{7}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 4X - 3$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{3\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 3, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 3$ pour écrire P comme produit de $X - 3$ et de $X^2 - X + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 3\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins

un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 3 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 3\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 3), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 22. ← page 8

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 39$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 39$ admet 39 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 39 donne : $1522 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 39\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - 39\,f^2 + f - 39\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 39\,f^2 + f - 39\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 39\,f^2 + f - 39\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 39$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 39)\,Q + 1522,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - 39\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 1522\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 39X^2 + X - 39 = (X - 39)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 39\,f^2 + f - 39\mathrm{Id}_E = (f - 39\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 39\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{1522} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{1522}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{1522}(f - 39\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 39\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 39\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{1522}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{1522}\vec{x}\right) \\
&= (f - 39\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{1522}f^2 + \frac{1}{1522}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{1522}\left(f^3 - 39f^2 + f - 39\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{1522}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left(\left(f - 39\mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{1522}\left(f^3 - 39f^2 + f - 39\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 39\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $1522\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 39\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} &=& \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& 39\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& 1521\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 1521L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{1522}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{1522}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{1522}f^2(\vec{x}) + \frac{1521}{1522}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{1522} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{1522}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{1522} f^2(\vec{x}) + \frac{1521}{1522}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 39\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 39\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 39\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{1522} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{1522}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1522} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{1522} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{39}{1522} f^2(\vec{x}) + \frac{39}{1522}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{1522}\left(f^3(\vec{x}) - 39 f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 39\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 39\, f^2 + f = 39\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{1522} f^4(\vec{x}) + \frac{760}{761} f^2(\vec{x}) + \frac{1521}{1522}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 39\, f^2 - f + 39\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 39\, f^3 - f^2 + 39\, f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{1522} f^4(\vec{x}) + \frac{760}{761} f^2(\vec{x}) + \frac{1521}{1522}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{1522} f^4(\vec{x}) + \frac{760}{761} f^2(\vec{x}) + \frac{1521}{1522}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{1522}X^4 + \frac{760}{761}X^2 + \frac{1521}{1522}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 39X^2 + X - 39$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{1522}X^4 + \frac{760}{761}X^2 + \frac{1521}{1522} = \left(X^3 - 39X^2 + X - 39\right) \cdot \left(-\frac{1}{1522}X - \frac{39}{1522}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{1522}\, f^4 + \frac{760}{761}\, f^2 + \frac{1521}{1522}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 39\, f^2 + f - 39\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{1522}\, f - \frac{39}{1522}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 39X^2 + X - 39$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{39\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 39, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 39$ pour écrire P comme produit de $X - 39$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 39\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 39\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 39\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 39\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 39\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 39 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 39\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 39\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 39\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 39\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 39), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 23. ← page 8

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :
$$X^2 + 1 = (X + 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2} f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 24. ← page 9

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 + 26$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0

pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $26 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f) \oplus \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \Big(f^2 + 26\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3 + 26\, f).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 26\, f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 26\, f) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 26$ par X. On a en effet :

$$X^2 + 26 = XQ + 26,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 26\vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + 26\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 26X = X\,(X^2 + 26)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 26\, f = f \circ \Big(f^2 + 26\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + 26\mathrm{Id}_E\Big) \circ f. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{26} f^2\,(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{26} f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{26} f^2\,(\vec{x}) + \vec{x}\right)\\ &= f \circ \left(\frac{1}{26}\, f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{26}\Big(f^3 + 26\, f\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2 + 26\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{26}\Big(f^2 + 26\mathrm{Id}_E\Big)(f \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{26}\Big(f^3 + 26\, f\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant

(†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $26\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 26\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -26\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \quad \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - \quad 26\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{26} f^2(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{26} f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{26} f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 26\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 26\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{26} f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = -26\,f$, on a aussi : $f^4 = -26\,f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{26} f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or

d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 26X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 26\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -26\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+26\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -26b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 26\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 26\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -26\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 26\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 25. ← page 9

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f). \end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par X. On a en effet :
$$X^2 + 1 = XQ + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X = X(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f = f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3 + f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(f \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3 + f\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}. \end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait

que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & -\ \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}), \qquad \text{et :} \qquad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = -f$, on a aussi : $f^4 = -f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{cccc} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$,

donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 26. ← page 9

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3+f). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par X. On a en effet :

$$X^2+1 = XQ+1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X = X(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f = f \circ \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) \circ f. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \left(f^3 + f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(f \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \left(f^3 + f\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}. \end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x})+\vec{x}\right)\\ &= \left(f^3(\vec{x})+f(\vec{x})\right)\\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -f^4(\vec{x})-f^2(\vec{x}),$$

et comme : $f^3=-f$, on a aussi : $f^4=-f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4(\vec{x})-f^2(\vec{x})=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3+X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$

3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0}\\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2\leftarrow bL_2-aL_1$ donne alors : $(-a^2-b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f))+\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f))\geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f))=1$ et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E=\ker(f)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=\vec{0}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 27. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $4 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+3 par $X-1$. On a en effet :
$$X^2+3=(X-1)\,Q+4,$$
avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x})+3\vec{x}=(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+4\vec{x}. \tag{†}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+3X-3=(X-1)\,(X^2+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$
Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y}=\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}\right)\\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{4}\,f^2+\frac{3}{4}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{4}\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 3\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{4}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 3f(\vec{x}) - 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 3f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 3\,f + 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 3\,f^2 + 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 3X - 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4} = \left(X^3 - X^2 + 3X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}X - \frac{1}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\,f^4 - \frac{1}{2}\,f^2 + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 3\,f - 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{4}\,f - \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + 3X - 3$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 3$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 3\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -3b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 3\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 3\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 28. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 4$ et $X^2 + 8$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 4$ admet 4 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 4 donne : $24 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 4\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + 8\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 4\,f^2 + 8\,f - 32\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 4\,f^2 + 8\,f - 32\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 4\,f^2 + 8\,f - 32\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 8$ par $X - 4$. On a en effet :

$$X^2 + 8 = (X - 4)\,Q + 24,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 8\vec{x} = (f - 4\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 24\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 - 4X^2 + 8X - 32 = (X - 4)\,(X^2 + 8)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 4\,f^2 + 8\,f - 32\mathrm{Id}_E = (f - 4\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + 8\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2 + 8\mathrm{Id}_E\big) \circ (f - 4\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{24} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{24}\,(f - 4\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 4\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 4\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{24}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= (f - 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{24}f^2 + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{24}\left(f^3 - 4f^2 + 8f - 32\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 8\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{24}\left(f^2 + 8\mathrm{Id}_E\right)((f - 4\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{24}\left(f^3 - 4f^2 + 8f - 32\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 4\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $24\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 4\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 8\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -8\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 16\vec{y} & - & 8\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 16L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{24}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{24}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{24}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{24}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-4\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+8\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-4\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-4\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{24}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{24}f^3(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{1}{6}f^2(\vec{x})+\frac{4}{3}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{24}\left(f^3(\vec{x})-4f^2(\vec{x})+8f(\vec{x})-32\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-4\,f^2+8\,f-32\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+8\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{24}f^4(\vec{x})+\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{16}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3=4\,f^2-8\,f+32\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=4\,f^3-8\,f^2+32\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{24}f^4(\vec{x})+\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{16}{3}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{24}f^4(\vec{x})+\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{16}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{24}X^4+\frac{1}{3}X^2+\frac{16}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3-4X^2+8X-32$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{24}X^4+\frac{1}{3}X^2+\frac{16}{3}=\left(X^3-4X^2+8X-32\right)\cdot\left(-\frac{1}{24}X-\frac{1}{6}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{24}\,f^4+\frac{1}{3}\,f^2+\frac{16}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-4\,f^2+8\,f-32\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{24}\,f-\frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3-4X^2+8X-32$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{4\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 4, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-4$ pour écrire P comme produit de $X-4$ et de X^2+8, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+8\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-8\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -8b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-8\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+8\,b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq 4\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f-4\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f-4\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f-4\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-4\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car 4 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-4\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=4\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 4), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-8\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 29. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $4\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
   $$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+3\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+3\,f+3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+3\,f+3\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+3\,f+3\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+3 par $X+1$. On a en effet :
   $$X^2+3=(X+1)\,Q+4,$$
   avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :
   $$f^2(\vec{x})+3\vec{x}=(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+4\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + 3X + 3 = (X+1)(X^2+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + 3f + 3\mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{4}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{4} f^2 + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 + f^2 + 3f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{4}\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 + f^2 + 3f + 3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 3\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{4}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 3f(\vec{x}) + 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 3\,f = -3\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 3\,f - 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 3\,f^2 - 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 3X + 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4} = \left(X^3 + X^2 + 3X + 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\,f^4 - \frac{1}{2}\,f^2 + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 3\,f + 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{4}\,f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + 3X + 3$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2+3, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+3\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -3b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 3\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 3\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 30. ← page 11

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 2$ et $X^2 - 2X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 4\,f^2 + 5\,f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-4f^2+5f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-4f^2+5f-2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-2X+1 par $X-2$. On a en effet :

$$X^2-2X+1 = (X-2)\,Q+1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+\vec{x} = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-4X^2+5X-2 = (X-2)\,(X^2-2X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-4f^2+5f-2\mathrm{Id}_E = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2f+\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2-2f+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-2\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\left(f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+\vec{x}\right)\\ &= (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3-4f^2+5f-2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2-2f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \left(f^2-2f+\mathrm{Id}_E\right)((f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3-4f^2+5f-2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - 2f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = 2f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & \vec{z} & + & 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\Big(f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}\Big) \\ &= \Big(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\Big) - \Big(2f^2(\vec{x}) - 4f(\vec{x}) + 2\vec{x}\Big) \\ &= f^3(\vec{x}) - 4f^2(\vec{x}) + 5f(\vec{x}) - 2\vec{x} \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 4\,f^2 + 5\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) = -f^4(\vec{x}) + 4f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 4\,f^2 - 5\,f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 4\,f^3 - 5\,f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4(\vec{x}) + 4f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

2. D'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1, 2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2-3X+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Comme 2 et 1 sont valeurs propres, on a :
$$\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1 \qquad \text{et :} \qquad \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1.$$
De plus, comme les sous-espaces propres sont en somme directe :
$$\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \leqslant \dim(E) = 3.$$
On déduit de ces trois inégalités que si l'un des deux sous-espaces propres est de dimension supérieure ou égale à 2, alors la somme de ces dimensions est à la fois supérieure et inférieure à 3, donc on doit avoir :
$$\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 3.$$
Par le critère de diagonalisation, f serait diagonalisable : faux par hypothèse. Ainsi nécessairement : $\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E)) = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$. On obtient la dernière dimension demandée grâce à la somme directe $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$, qui implique :
$$\dim(\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E)) = 3-1 = 2.$$
D'où le résultat.
4. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ est stable par $f-\mathrm{Id}_E$ (du fait que $f-\mathrm{Id}_E$ et $f^2-2f+\mathrm{Id}_E$ commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \in \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{y}, \vec{x})$ est bien une famille de $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. Comme elle est de cardinal $2 = \dim(\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E))$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour en déduire qu'elle est une base de $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. Montrons-le : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{y} + b\vec{x} = \vec{0}$. On a :
$$(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \text{et :} \qquad (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f-\mathrm{Id}_E)((f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x})) = \vec{0}$$
car $\vec{x} \in \ker\left((f-\mathrm{Id}_E)^2\right)$. Par conséquent, appliquer $f-\mathrm{Id}_E$ à la relation de dépendance linéaire ci-avant donne : $b\vec{y} = \vec{0}$. Comme $\vec{y} = (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \neq \vec{0}$ par hypothèse sur $\vec{x}$ (en effet $\vec{x} \notin \ker(f-\mathrm{Id}_E)$), ceci impose : $b = 0$. La relation de dépendance linéaire devient alors $a\vec{y} = \vec{0}$, et de là on conclut que $a = 0$. Ainsi $a = b = 0$ et la famille est libre.
5. On a vu que $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ sont respectivement de dimension 1 et 2. Soient $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $(\vec{y}, \vec{x})$ la base de $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ construite dans la question précédente. Comme $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{y}, \vec{x})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 2), $f(\vec{y}) = \vec{y}$ (en effet : $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f-\mathrm{Id}_E)^2(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E) = \ker\left((f-\mathrm{Id}_E)^2\right)$) et enfin on a par définition $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, donc : $f(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{x}$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 31. ← page 11

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+2$ et X^2+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+2$ admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $7 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+3 par $X+2$. On a en effet :

$$X^2+3 = (X+2)\,Q+7,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right)+3\vec{x} = (f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+7\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3+2X^2+3X+6 = (X+2)\,(X^2+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E = (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+2\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{7}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{3}{7}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{7}\left(f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f+2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{3}{7}\vec{x}\right)\\ &= (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{7}\,f^2+\frac{3}{7}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\left(f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

   donc : $\vec{y} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{7}\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\left((f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\left(f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $7\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) = f^2(\vec{y}) + f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) = -2\vec{y} + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) = 4\vec{y} - 3\vec{z} \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{7}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{7}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{7}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{2}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{6}{7}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(f^3(\vec{x}) + 2f^2(\vec{x}) + 3f(\vec{x}) + 6\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2f^2 + 3f + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{12}{7}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -2\,f^2 - 3\,f - 6\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\,f^3 - 3\,f^2 - 6\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{7}f^4\,(\vec{x}) + \frac{1}{7}f^2\,(\vec{x}) + \frac{12}{7}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{7}f^4\,(\vec{x}) + \frac{1}{7}f^2\,(\vec{x}) + \frac{12}{7}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{7}X^4 + \frac{1}{7}X^2 + \frac{12}{7}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 2X^2 + 3X + 6$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{7}X^4 + \frac{1}{7}X^2 + \frac{12}{7} = \left(X^3 + 2X^2 + 3X + 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}X + \frac{2}{7}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{7}\,f^4 + \frac{1}{7}\,f^2 + \frac{12}{7}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 6\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{7}\,f + \frac{2}{7}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + 3X + 6$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 2$ pour écrire P comme produit de $X + 2$ et de $X^2 + 3$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 3\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -3b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 3\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 3\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la

famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -2), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 32. ← page 11

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 - X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 1 = (X - 1)\,Q + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + 2X - 1 = (X - 1)\,(X^2 - X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\Big(f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x}\Big) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \Big(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \left(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} &-& \vec{z} & + \ f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) &=& &-& \vec{z} & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que

$(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\Big(f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}\Big)\\ &= \Big(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\Big) - \Big(f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}\Big)\\ &= f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - \vec{x}\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) = -f^4(\vec{x}) + 2f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - 2\,f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4(\vec{x}) + 2f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2-X+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans

$\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 33. ← page 12

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+5$ et $X^2 - X + 6$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+5$ admet -5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -5 donne : $36 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 4f^2 + f + 30\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 4f^2 + f + 30\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 4f^2 + f + 30\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 6$ par $X + 5$. On a en effet :

$$X^2 - X + 6 = (X+5)\,Q + 36,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 6\vec{x} = (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 36\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 4X^2 + X + 30 = (X+5)(X^2 - X + 6)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 4f^2 + f + 30\mathrm{Id}_E = (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + 5\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{36} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{36} f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{36}(f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{36}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{36}f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}\right) \\
&= (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{36}f^2 - \frac{1}{36}f + \frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{36}\left(f^3 + 4f^2 + f + 30\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{36}\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{36}\left(f^3 + 4f^2 + f + 30\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $36\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 6\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 6\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) & = & -5\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & 25\vec{y} & - & 6\vec{z} & + & f(\vec{z})
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) & = & -5\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 30\vec{y} & - & 6\vec{z} & &
\end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 30L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{36} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{36} f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{36} f(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{36} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{36} f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{36} f(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{36} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{36} f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{36} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{5}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{36} f(\vec{x}) - \frac{5}{6}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{36}\left(f^3(\vec{x}) + 4f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 30\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 4\,f^2 + f = -30\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{36} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{18} f^3(\vec{x}) + \frac{23}{36} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3} f(\vec{x}) + 5\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -4\,f^2 - f - 30\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -4\,f^3 - f^2 - 30\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{36} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{18} f^3(\vec{x}) + \frac{23}{36} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3} f(\vec{x}) + 5\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{36} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{18} f^3(\vec{x}) + \frac{23}{36} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3} f(\vec{x}) + 5\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{36}X^4 + \frac{1}{18}X^3 + \frac{23}{36}X^2 - \frac{2}{3}X + 5$ par le polynôme annulateur $X^3 + 4X^2 + X + 30$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{36}X^4 + \frac{1}{18}X^3 + \frac{23}{36}X^2 - \frac{2}{3}X + 5 = \left(X^3 + 4X^2 + X + 30\right) \cdot \left(-\frac{1}{36}X + \frac{1}{6}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{36}\,f^4 + \frac{1}{18}\,f^3 + \frac{23}{36}\,f^2 - \frac{2}{3}\,f + 5\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 4\,f^2 + f + 30\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{36}\,f + \frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 4X^2 + X + 30$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace

vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-5\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -5, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+5$ pour écrire P comme produit de $X+5$ et de X^2-X+6, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 6\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -6b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - 6\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + 6\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{23}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -5\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -5 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -5\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -5), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 6\vec{x} = \vec{y} - 6\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 34. ← page 12

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 7$ et $X^2 + 25$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 7$

admet 7 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 7 donne : $74 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-7\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+25\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-7\,f^2+25\,f-175\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-7\,f^2+25\,f-175\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-7\,f^2+25\,f-175\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+25 par $X-7$. On a en effet :

$$X^2+25=(X-7)\,Q+74,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right)+25\vec{x}=(f-7\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+74\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-7X^2+25X-175=(X-7)\,(X^2+25)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-7\,f^2+25\,f-175\mathrm{Id}_E=(f-7\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+25\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+25\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-7\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{74}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{25}{74}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{74}\left(f-7\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-7\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f-7\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{74}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{25}{74}\vec{x}\right)\\ &= (f-7\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{74}\,f^2+\frac{25}{74}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{74}\Big(f^3-7\,f^2+25\,f-175\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+25\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{74}\Big(f^2+25\mathrm{Id}_E\Big)\left(\left(f-7\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{74}\Big(f^3-7\,f^2+25\,f-175\mathrm{Id}_E\Big)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f-7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 7\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $74\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f-7\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 7\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 25\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -25\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 7\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 49\vec{y} & - & 25\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 25L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 49L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{74} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{74}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{74} f^2(\vec{x}) + \frac{49}{74}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{74} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{74}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{74} f^2(\vec{x}) + \frac{49}{74}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 7\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 7\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 7\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 7\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 7\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{74} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{74}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{74} f^3(\vec{x}) + \frac{25}{74} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{7}{74} f^2(\vec{x}) + \frac{175}{74}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{74}\left(f^3(\vec{x}) - 7f^2(\vec{x}) + 25f(\vec{x}) - 175\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 7\,f^2 + 25\,f = 175\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 7\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 25\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{74} f^4(\vec{x}) + \frac{12}{37} f^2(\vec{x}) + \frac{1225}{74}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 7\,f^2 - 25\,f + 175\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 7\,f^3 - 25\,f^2 + 175\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{74} f^4(\vec{x}) + \frac{12}{37} f^2(\vec{x}) + \frac{1225}{74}\vec{x} = \vec{0}$, donc

$\vec{z} \in \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 7\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{74} f^4(\vec{x}) + \frac{12}{37} f^2(\vec{x}) + \frac{1225}{74}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{74}X^4 + \frac{12}{37}X^2 + \frac{1225}{74}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 7X^2 + 25X - 175$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{74}X^4 + \frac{12}{37}X^2 + \frac{1225}{74} = \left(X^3 - 7X^2 + 25X - 175\right) \cdot \left(-\frac{1}{74}X - \frac{7}{74}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{74} f^4 + \frac{12}{37} f^2 + \frac{1225}{74}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 7 f^2 + 25 f - 175\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{74} f - \frac{7}{74}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 7X^2 + 25X - 175$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{7\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 7, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 7$ pour écrire P comme produit de $X - 7$ et de $X^2 + 25$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 25\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -25\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ -25b\vec{x} & +af(\vec{x}) = \vec{0} \end{cases}.$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 25\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 25\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 7\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 7\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 7\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 7\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 7\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 7 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 7\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 25\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une

base de $\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=7\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 7), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-25\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+25\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&0&-25\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Corrigé 35. ← page 12

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $4\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)&=\ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+3\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\&=\ker(f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+3 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+3=(X-1)\,Q+4,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+3\vec{x}=(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+4\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+3X-3=(X-1)\,(X^2+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+3\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+3\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{4}f^2\,(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{4}\,(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right)\\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{4}f^2 + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 - f^2 + 3f - 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{4}\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 - f^2 + 3f - 3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \quad \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & + \quad f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - \quad 3\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+3\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x})+\frac{3}{4}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x})-f^2(\vec{x})+3f(\vec{x})-3\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x},$$

et comme : $f^3=f^2-3\,f+3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=f^3-3\,f^2+3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4-\frac{1}{2}X^2+\frac{3}{4}$ par le polynôme annulateur X^3-X^2+3X-3, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4-\frac{1}{2}X^2+\frac{3}{4}=\left(X^3-X^2+3X-3\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}X-\frac{1}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\,f^4-\frac{1}{2}\,f^2+\frac{3}{4}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-f^2+3\,f-3\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{4}\,f-\frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3-X^2+3X-3$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2+3, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+3\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=$

$\vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -3b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 3\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 3\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 36. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} &+\vec{z} \\ f(\vec{x}) &= f(\vec{y}) &+f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= f^2(\vec{y}) &+f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) &= -\vec{y} + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= \vec{y} - \vec{z} \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z}=-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x})+\frac{1}{2}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})-\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x})+f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f^2+f=-\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f^2-f-\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^3-f^2-f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur X^3+X^2+X+1, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{2}=\left(X^3+X^2+X+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f^4+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 37. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Première démonstration. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par X. On a en effet :
$$X^2 + 1 = XQ + 1,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur

$\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X = X(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$:

$$f^3 + f = f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3 + f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de plus on a :

$$\vec{z} = f\left(Q(f)(\vec{x})\right) \in \operatorname{im}(f)$$

donc : $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$.
Deuxième démonstration. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ il existe $\vec{u} \in E$ tel que : $\vec{z} = f(\vec{u})$. Cela permet d'en déduire, comme pour $\vec{y}$, une relation vérifiée par $\vec{z}$ et ses images itérées par f : en évaluant $(*)$ en $\vec{u}$, on obtient en effet : $f^3(\vec{u}) = -f(\vec{u})$, et comme $\vec{z} = f(\vec{u})$ on peut réécrire cette égalité ainsi : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} &=& \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& -\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et que $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z} = f(\vec{u})$ pour un vecteur $\vec{u} \in E$ convenable. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 = -f$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Pour trouver un antécédent par f de $\vec{z}$, il suffit tout simplement d'écrire :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) = f(-f(\vec{x})),$$

donc $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Remarque. Si E est supposé de dimension finie, on peut démontrer le résultat voulu autrement : en effet, deux sous-espaces vectoriels F et G, *en dimension finie*, sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Le théorème du rang nous permet d'avoir la condition sur les dimensions, et il suffit de vérifier que l'intersection de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ est réduite au vecteur nul. Or c'est une vérification relativement facile : soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. Par définition de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$, on a $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et l'existence d'un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. En évaluant $(*)$ en $\vec{x}$, on a alors :

$$f^3(\vec{x}) = -f(\vec{x}) \Longleftrightarrow f^2(\vec{y}) = -\vec{y},$$

et comme $f(\vec{y}) = \vec{0}$ par hypothèse, il en est bien sûr de même de $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc l'égalité ci-dessus devient : $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont en somme directe, et si E est de dimension finie alors on a bien $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ par l'argument ci-dessus.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \operatorname{im}(f)$, et comme $\operatorname{im}(f)$ est stable par f (du fait que f commute avec lui-même), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \operatorname{im}(f)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\operatorname{im}(f)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (en effet, si $\vec{x} \in \operatorname{im}(f)$ s'écrit $\vec{x} = f(\vec{z})$ avec $\vec{z} \in E$, alors : $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f^3(\vec{z}) = -f(\vec{z}) = -\vec{x}$ car f vérifie $(*)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, on en déduit : $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\mathrm{im}(f)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\mathrm{im}(f)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\mathrm{im}(f)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 38. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + X + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $4 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 2$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + X + 2 = (X - 1)\,Q + 4,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 4\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X - 2 = (X - 1)(X^2 + X + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4} f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4} f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{4} f^2 + \frac{1}{4} f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{4}\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} & = & \vec{y} & + \vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & + f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & + f^2(\vec{z})
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & - & f(\vec{z})
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^2 + 2f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + 1$ par le polynôme annulateur $X^3 + X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + 1 = \left(X^3 + X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}f^4 - \frac{1}{2}f^3 - \frac{1}{4}f^2 + \mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{4}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + X + 2$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - 2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a - b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 + ab - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - ab + 2\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a - \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{7}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - 2\vec{x} = -\vec{y} - 2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 39. ← page 14

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-2X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $4 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-2X+1 par $X+1$. On a en effet :
$$X^2-2X+1=(X+1)\,Q+4,$$
avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+\vec{x}=(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+4\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2-X+1=(X+1)\,(X^2-2X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$
Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y}=\frac{1}{4}f^2(\vec{x})-\frac{1}{2}f(\vec{x})+\frac{1}{4}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{4}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x})-\frac{1}{2}f(\vec{x})+\frac{1}{4}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{4}f^2-\frac{1}{2}f+\frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\Big(f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{4}\Big(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\big((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\big)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\Big(f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\big(Q(f)(\vec{x})\big)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - 2f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = 2f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\,\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & + & 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\,\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x})-\frac{1}{2}f(\vec{x})+\frac{1}{4}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x})-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{4}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}f(\vec{x})-\frac{1}{4}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x})-f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-f^2-f=-\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2-2f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+f^3(\vec{x})-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x},$$

et comme : $f^3=f^2+f-\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=f^3+f^2-f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+f^3(\vec{x})-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+f^3(\vec{x})-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4+X^3-\frac{1}{2}X^2-X+\frac{3}{4}$ par le polynôme annulateur X^3-X^2-X+1, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4+X^3-\frac{1}{2}X^2-X+\frac{3}{4}=\left(X^3-X^2-X+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}X+\frac{3}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}f^4+f^3-\frac{1}{2}f^2-f+\frac{3}{4}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{4}f+\frac{3}{4}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. D'après $(*)$, le polynôme $P=X^3-X^2-X+1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1,-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2-2X+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Comme -1 et 1 sont valeurs propres, on a :

$$\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))\geqslant 1 \quad\text{et :}\quad \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E))\geqslant 1.$$

De plus, comme les sous-espaces propres sont en somme directe :

$$\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E))\leqslant\dim(E)=3.$$

On déduit de ces trois inégalités que si l'un des deux sous-espaces propres est de dimension supérieure ou égale à 2, alors la somme de ces dimensions est à la fois supérieure et inférieure à 3, donc on doit avoir :

$$\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E))=3.$$

Par le critère de diagonalisation, f serait diagonalisable : faux par hypothèse. Ainsi nécessairement : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$. On obtient la dernière dimension demandée grâce à la somme directe $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$, qui implique :

$$\dim(\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = 3-1 = 2.$$

D'où le résultat.

4. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$ est stable par $f-\mathrm{Id}_E$ (du fait que $f-\mathrm{Id}_E$ et $f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E$ commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \in \ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{y},\vec{x})$ est bien une famille de $\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$. Comme elle est de cardinal $2 = \dim(\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E))$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour en déduire qu'elle est une base de $\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$. Montrons-le : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{y}+b\vec{x} = \vec{0}$. On a :

$$(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{ et : } \quad (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f-\mathrm{Id}_E)((f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x})) = \vec{0}$$

car $\vec{x} \in \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)^2\Big)$. Par conséquent, appliquer $f-\mathrm{Id}_E$ à la relation de dépendance linéaire ci-avant donne : $b\vec{y} = \vec{0}$. Comme $\vec{y} = (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \neq \vec{0}$ par hypothèse sur $\vec{x}$ (en effet $\vec{x} \notin \ker(f-\mathrm{Id}_E)$), ceci impose : $b=0$. La relation de dépendance linéaire devient alors $a\vec{y} = \vec{0}$, et de là on conclut que $a=0$. Ainsi $a=b=0$ et la famille est libre.

5. On a vu que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$ sont respectivement de dimension 1 et 2. Soient $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $(\vec{y},\vec{x})$ la base de $\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$ construite dans la question précédente. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{y},\vec{x})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{y}) = \vec{y}$ (en effet : $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f-\mathrm{Id}_E)^2(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E) = \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)^2\Big)$) et enfin on a par définition $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, donc : $f(\vec{x}) = \vec{y}+\vec{x}$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 40. ← page 14

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+2 = (X+1)\,Q+3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + 2X + 2 = (X+1)(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité ($*$) de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 2f = -2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 2f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 2f^2 - 2f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 2X + 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 + X^2 + 2X + 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} f^4 - \frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3} f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + 2X + 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +af(\vec{x}) = \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 2\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 41. ← page 15

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 15$ et $X^2 + X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que

$X-15$ admet 15 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 15 donne : $241 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-15\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-15\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3-14\,f^2-14\,f-15\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-14\,f^2-14\,f-15\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-14\,f^2-14\,f-15\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-15\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-15\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+X+1 par $X-15$. On a en effet :

$$X^2+X+1=(X-15)\,Q+241,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{x}\right)+\vec{x}=(f-15\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+241\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-14X^2-14X-15=(X-15)\,(X^2+X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-15\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-14\,f^2-14\,f-15\mathrm{Id}_E=(f-15\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\big)=\big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\big)\circ(f-15\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-15\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{241}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{241}f\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{241}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{241}\left(f-15\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-15\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-15\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f-15\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{241}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{241}f\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{241}\vec{x}\right)\\ &= (f-15\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{241}\,f^2+\frac{1}{241}\,f+\frac{1}{241}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{241}\left(f^3-14\,f^2-14\,f-15\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-15\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{241}\left(f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)\left((f-15\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{241}\left(f^3-14\,f^2-14\,f-15\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-15\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-15\mathrm{Id}_E)+$

$\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 15\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $241\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 15\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 15\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 225\vec{y} & - & \vec{z} & - \; f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 15\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 240\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 240L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{1}{241}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{241}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{1}{241}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{241}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 15\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 15\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 15\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{1}{241}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{241}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{15}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{15}{241}f(\vec{x}) + \frac{15}{241}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{241}\left(f^3(\vec{x}) - 14f^2(\vec{x}) - 14f(\vec{x}) - 15\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 14\,f^2 - 14\,f - 15\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$.
Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{241} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{241} f^3(\vec{x}) + \frac{238}{241} f^2(\vec{x}) + \frac{239}{241} f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 14\,f^2 + 14\,f + 15\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 14\,f^3 + 14\,f^2 + 15\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{241} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{241} f^3(\vec{x}) + \frac{238}{241} f^2(\vec{x}) + \frac{239}{241} f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{241} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{241} f^3(\vec{x}) + \frac{238}{241} f^2(\vec{x}) + \frac{239}{241} f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{241}X^4 - \frac{2}{241}X^3 + \frac{238}{241}X^2 + \frac{239}{241}X + \frac{240}{241}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 14X^2 - 14X - 15$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{241}X^4 - \frac{2}{241}X^3 + \frac{238}{241}X^2 + \frac{239}{241}X + \frac{240}{241} = \left(X^3 - 14X^2 - 14X - 15\right) \cdot \left(-\frac{1}{241}X - \frac{16}{241}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{241}\,f^4 - \frac{2}{241}\,f^3 + \frac{238}{241}\,f^2 + \frac{239}{241}\,f + \frac{240}{241}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 14\,f^2 - 14\,f - 15\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{241}\,f - \frac{16}{241}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 14X^2 - 14X - 15$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{15\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 15, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 15$ pour écrire P comme produit de $X - 15$ et de $X^2 + X + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a - b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 + ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a - \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 15\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 15 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 15\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 15), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x} = -\vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 42. ← page 15

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 5$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 5$ admet -5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -5 donne : $26 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 5\,f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 5\,f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 5\,f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 5$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 5)\,Q + 26,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 26\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 5X^2 + X + 5 = (X+5)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 5\,f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E = (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + 5\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{26}(f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}\right) \\
&= (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{26}\,f^2 + \frac{1}{26}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{26}\left(f^3 + 5\,f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{26}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{26}\left(f^3 + 5\,f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $26\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & -5\vec{y} & & +\ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 25\vec{y} & - & \vec{z} \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 25L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{26}f^2(\vec{x})+\frac{1}{26}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z}=-\frac{1}{26}f^2(\vec{x})+\frac{25}{26}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{26}f^2(\vec{x})+\frac{1}{26}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{26}f^2(\vec{x})+\frac{25}{26}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+5\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{26}f^2(\vec{x})+\frac{1}{26}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{26}f^3(\vec{x})+\frac{1}{26}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{5}{26}f^2(\vec{x})-\frac{5}{26}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{26}\left(f^3(\vec{x})+5f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+5\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+5\,f^2+f+5\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{26}f^4(\vec{x})+\frac{12}{13}f^2(\vec{x})+\frac{25}{26}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-5\,f^2-f-5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-5\,f^3-f^2-5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{26}f^4(\vec{x})+\frac{12}{13}f^2(\vec{x})+\frac{25}{26}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{26}f^4(\vec{x})+\frac{12}{13}f^2(\vec{x})+\frac{25}{26}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{26}X^4+\frac{12}{13}X^2+\frac{25}{26}$ par le polynôme annulateur X^3+5X^2+X+5, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{26}X^4+\frac{12}{13}X^2+\frac{25}{26}=\left(X^3+5X^2+X+5\right)\cdot\left(-\frac{1}{26}X+\frac{5}{26}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{26}\,f^4+\frac{12}{13}\,f^2+\frac{25}{26}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+5\,f^2+f+5\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{26}\,f+\frac{5}{26}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 5X^2 + X + 5$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-5\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -5, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 5$ pour écrire P comme produit de $X + 5$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq -5\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -5 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -5\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -5), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 43. ← page 15

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 1 = (X + 1)\, Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 1 = (X + 1)\,(X^2 - X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{3} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{3}\,(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{3} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3}\, f^2 - \frac{1}{3}\, f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) - \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{3}X + \frac{2}{3} = \left(X^3 + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}f^4 + \frac{2}{3}f^3 - \frac{1}{3}f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 - X + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans

$\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 44. ← page 16

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2+\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X+1)\,Q + 2,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2+\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2+\mathrm{Id}_E\big) \circ (f+\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\
f(\vec{x}) &=& -\vec{y} &&&+& f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} &-& \vec{z} &&
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel

que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq-\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)=3-\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)+\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)$, avec $\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim\left(\ker(f+\mathrm{Id}_E)\right)=1$ et $\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=-\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 45. ← page 16

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+16$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+16$ admet -16 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -16 donne : $257\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+16\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+16\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3+16\,f^2+f+16\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+16\,f^2+f+16\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+16\,f^2+f+16\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+16\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+16\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+16$. On a en effet :

$$X^2+1=(X+16)\,Q+257,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right)+\vec{x}=(f+16\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+257\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 16X^2 + X + 16 = (X + 16)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 16\,f^2 + f + 16\mathrm{Id}_E = (f + 16\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + 16\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{257} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{257}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{257}(f + 16\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 16\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 16\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{257} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{257}\vec{x}\right) \\
&= (f + 16\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{257} f^2 + \frac{1}{257}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{257}\left(f^3 + 16\,f^2 + f + 16\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{257}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + 16\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{257}\left(f^3 + 16\,f^2 + f + 16\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 16\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $257\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -16\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique :

$f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 16\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 256\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3-256L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{257}f^2(\vec{x})+\frac{1}{257}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z}=-\frac{1}{257}f^2(\vec{x})+\frac{256}{257}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{257}f^2(\vec{x})+\frac{1}{257}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{257}f^2(\vec{x})+\frac{256}{257}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+16\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+16\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+16\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+16\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+16\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{257}f^2(\vec{x})+\frac{1}{257}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{257}f^3(\vec{x})+\frac{1}{257}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{16}{257}f^2(\vec{x})-\frac{16}{257}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{257}\left(f^3(\vec{x})+16f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+16\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+16\,f^2+f=-16\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+16\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{257}f^4(\vec{x})+\frac{255}{257}f^2(\vec{x})+\frac{256}{257}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-16\,f^2-f-16\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-16\,f^3-f^2-16\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{257}f^4(\vec{x})+\frac{255}{257}f^2(\vec{x})+\frac{256}{257}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+16\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+16\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{257}f^4(\vec{x})+\frac{255}{257}f^2(\vec{x})+\frac{256}{257}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{257}X^4+\frac{255}{257}X^2+\frac{256}{257}$ par le polynôme annulateur X^3+16X^2+X+16, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{257}X^4+\frac{255}{257}X^2+\frac{256}{257}=\left(X^3+16X^2+X+16\right)\cdot\left(-\frac{1}{257}X+\frac{16}{257}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{257}\,f^4+\frac{255}{257}\,f^2+\frac{256}{257}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+16\,f^2+f+16\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{257}\,f+\frac{16}{257}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 16X^2 + X + 16$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-16\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -16, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+16$ pour écrire P comme produit de $X+16$ et de X^2+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq -16\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+16\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -16 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -16\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -16), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 46. ← page 16

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 - 2X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + f). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + f) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - 2X + 1$ par X. On a en effet :

$$X^2 - 2X + 1 = XQ + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) - 2f\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + X = X\left(X^2 - 2X + 1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + f = f \circ \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big) \circ f. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2\left(\vec{x}\right) - 2f\left(\vec{x}\right) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2\left(\vec{x}\right) - 2f\left(\vec{x}\right) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{x}\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \Big(f^3 - 2\,f^2 + f\Big)\left(\vec{x}\right) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{z}\right) &= \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)\left(f \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \Big(f^3 - 2\,f^2 + f\Big)\left(Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}. \end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel

que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - 2f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = 2f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & + & 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \qquad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -f^4(\vec{x}) + 4f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - f$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4(\vec{x}) + 4f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

2. D'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0, 1\}$

3. Comme 0 et 1 sont valeurs propres, on a :
$$\dim(\ker(f)) \geqslant 1 \qquad \text{et :} \qquad \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1.$$
De plus, comme les sous-espaces propres sont en somme directe :
$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \leqslant \dim(E) = 3.$$
On déduit de ces trois inégalités que si l'un des deux sous-espaces propres est de dimension supérieure ou égale à 2, alors la somme de ces dimensions est à la fois supérieure et inférieure à 3, donc on doit avoir :
$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 3.$$
Par le critère de diagonalisation, f serait diagonalisable : faux par hypothèse. Ainsi nécessairement : $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$. On obtient la dernière dimension demandée grâce à la somme directe $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$, qui implique :
$$\dim(\ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$
D'où le résultat.
4. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ est stable par $f - \mathrm{Id}_E$ (du fait que $f-\mathrm{Id}_E$ et $f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E$ commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \in \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{y},\vec{x})$ est bien une famille de $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. Comme elle est de cardinal $2 = \dim(\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E))$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour en déduire qu'elle est une base de $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$. Montrons-le : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{y} + b\vec{x} = \vec{0}$. On a :
$$(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \text{et :} \qquad (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f-\mathrm{Id}_E)((f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x})) = \vec{0}$$
car $\vec{x} \in \ker\left((f-\mathrm{Id}_E)^2\right)$. Par conséquent, appliquer $f - \mathrm{Id}_E$ à la relation de dépendance linéaire ci-avant donne : $b\vec{y} = \vec{0}$. Comme $\vec{y} = (f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \neq \vec{0}$ par hypothèse sur $\vec{x}$ (en effet $\vec{x} \notin \ker(f-\mathrm{Id}_E)$), ceci impose : $b = 0$. La relation de dépendance linéaire devient alors $a\vec{y} = \vec{0}$, et de là on conclut que $a = 0$. Ainsi $a = b = 0$ et la famille est libre.
5. On a vu que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$ sont respectivement de dimension 1 et 2. Soient $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$ et $(\vec{y},\vec{x})$ la base de $\ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$ construite dans la question précédente. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{y},\vec{x})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{y}) = \vec{y}$ (en effet : $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f-\mathrm{Id}_E)^2(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2-2f+\mathrm{Id}_E) = \ker\left((f-\mathrm{Id}_E)^2\right)$) et enfin on a par définition $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, donc : $f(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{x}$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 47. ← page 17

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Première démonstration. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E =$

$\ker(f) + \operatorname{im}(f)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par X. On a en effet :

$$X^2 + 1 = XQ + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X = X(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$:

$$f^3 + f = f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3 + f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de plus on a :

$$\vec{z} = f\left(Q(f)(\vec{x})\right) \in \operatorname{im}(f)$$

donc : $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$.
Deuxième démonstration. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ il existe $\vec{u} \in E$ tel que : $\vec{z} = f(\vec{u})$. Cela permet d'en déduire, comme pour $\vec{y}$, une relation vérifiée par $\vec{z}$ et ses images itérées par f :

en évaluant $(*)$ en $\vec{u}$, on obtient en effet : $f^3(\vec{u}) + f(\vec{u}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} = f(\vec{u})$ on peut réécrire cette égalité ainsi : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et que $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z} = f(\vec{u})$ pour un vecteur $\vec{u} \in E$ convenable. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Pour trouver un antécédent par f de $\vec{z}$, il suffit tout simplement d'écrire :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) = f(-f(\vec{x})),$$

donc $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Remarque. Si E est supposé de dimension finie, on peut démontrer le résultat voulu autrement : en effet, deux sous-espaces vectoriels F et G, *en dimension finie*, sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Le théorème du rang nous permet d'avoir la condition sur les dimensions, et il suffit de vérifier que l'intersection de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ est réduite au vecteur nul. Or c'est une vérification relativement facile : soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. Par définition de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$, on a $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et l'existence d'un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. En évaluant $(*)$ en $\vec{x}$, on a alors :

$$f^3(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \vec{0} \iff f^2(\vec{y}) + \vec{y} = \vec{0},$$

et comme $f(\vec{y}) = \vec{0}$ par hypothèse, il en est bien sûr de même de $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc l'égalité ci-dessus devient : $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont en somme directe, et si E est de dimension finie alors on a bien $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ par l'argument ci-dessus.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \operatorname{im}(f)$, et comme $\operatorname{im}(f)$ est stable par f (du fait que f commute avec lui-même), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \operatorname{im}(f)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\operatorname{im}(f)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (en effet, si $\vec{x} \in \operatorname{im}(f)$ s'écrit $\vec{x} = f(\vec{z})$ avec $\vec{z} \in E$, alors : $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f^3(\vec{z}) = -f(\vec{z}) = -\vec{x}$ car f vérifie $(*)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$, on en déduit : $\dim(\operatorname{im}(f)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\operatorname{im}(f)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\operatorname{im}(f)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\operatorname{im}(f)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\operatorname{im}(f)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\operatorname{im}(f)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \operatorname{im}(f)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 48. ← page 17

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 27$ et $X^2 - X + 4$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 27$ admet -27 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -27 donne : $760 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 27\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 26\,f^2 - 23\,f + 108\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 26\,f^2 - 23\,f + 108\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 26\,f^2 - 23\,f + 108\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 4$ par $X + 27$. On a en effet :
$$X^2 - X + 4 = (X + 27)\,Q + 760,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 4\vec{x} = (f + 27\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 760\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+26X^2-23X+108 = (X+27)(X^2-X+4)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+27\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+26f^2-23f+108\mathrm{Id}_E = (f+27\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f+4\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2-f+4\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+27\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{760}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{760}f(\vec{x}) + \frac{1}{190}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{760}(f+27\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f+27\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+27\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{760}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{760}f(\vec{x}) + \frac{1}{190}\vec{x}\right) \\
&= (f+27\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{760}f^2 - \frac{1}{760}f + \frac{1}{190}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{760}\left(f^3+26f^2-23f+108\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+27\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2-f+4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{760}\left(f^2-f+4\mathrm{Id}_E\right)((f+27\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{760}\left(f^3+26f^2-23f+108\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+27\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+27\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+27\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+27\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+27\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $760\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f+27\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f+27\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f+27\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+27\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f+27\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+27\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$

tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -27\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 4\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 4\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 27\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & 729\vec{y} & - & 4\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 27\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & 756\vec{y} & - & 4\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 756L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{760} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{760} f(\vec{x}) + \frac{1}{190}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{760} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{760} f(\vec{x}) + \frac{189}{190}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{760} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{760} f(\vec{x}) + \frac{1}{190}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{760} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{760} f(\vec{x}) + \frac{189}{190}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 27\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{760} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{760} f(\vec{x}) + \frac{1}{190}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{760} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{760} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{190} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{27}{760} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{760} f(\vec{x}) - \frac{27}{190}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{760}\left(f^3(\vec{x}) + 26 f^2(\vec{x}) - 23 f(\vec{x}) + 108\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 26\, f^2 - 23\, f = -108\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{760} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{380} f^3(\vec{x}) + \frac{751}{760} f^2(\vec{x}) - \frac{94}{95} f(\vec{x}) + \frac{378}{95}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -26\, f^2 + 23\, f - 108\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -26\, f^3 + 23\, f^2 - 108\, f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{760} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{380} f^3(\vec{x}) + \frac{751}{760} f^2(\vec{x}) - \frac{94}{95} f(\vec{x}) + \frac{378}{95}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{760}f^4(\vec{x})+\frac{1}{380}f^3(\vec{x})+\frac{751}{760}f^2(\vec{x})-\frac{94}{95}f(\vec{x})+\frac{378}{95}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{760}X^4+\frac{1}{380}X^3+\frac{751}{760}X^2-\frac{94}{95}X+\frac{378}{95}$ par le polynôme annulateur $X^3+26X^2-23X+108$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{760}X^4+\frac{1}{380}X^3+\frac{751}{760}X^2-\frac{94}{95}X+\frac{378}{95}=\left(X^3+26X^2-23X+108\right)\cdot\left(-\frac{1}{760}X+\frac{7}{190}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{760}f^4+\frac{1}{380}f^3+\frac{751}{760}f^2-\frac{94}{95}f+\frac{378}{95}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3+26f^2-23f+108\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{760}f+\frac{7}{190}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3+26X^2-23X+108$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-27\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -27, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+27$ pour écrire P comme produit de $X+27$ et de X^2-X+4, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2-f+4\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=f(\vec{x})-4\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{llcl}a\vec{x}&+bf(\vec{x})&=&\vec{0}\\-4b\vec{x}&+(a+b)f(\vec{x})&=&\vec{0}\end{array}\right..$$

L'opération $L_2\leftarrow bL_2-(a+b)L_1$ donne alors : $(-a^2-ab-4b^2)\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+ab+4b^2=0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{15}{4}b^2=0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a+\frac{1}{2}b=b=0$. Il en découle aisément $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f\neq-27\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+27\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f+27\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f+27\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f+27\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2-f+4\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on

a : $3 = \dim(\ker(f+27\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+27\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -27 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+27\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+27\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -27\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+27\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -27), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 4\vec{x} = \vec{y} - 4\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 49. ← page 18

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+2$ et X^2+X+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+2$ admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2+f+3\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 3\,f^2 + 5\,f + 6\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+3\,f^2+5\,f+6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+3\,f^2+5\,f+6\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+X+3 par $X+2$. On a en effet :

$$X^2+X+3 = (X+2)\,Q + 5,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 3\vec{x} = (f+2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 5\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3+3X^2+5X+6 = (X+2)\,(X^2+X+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+3\,f^2+5\,f+6\mathrm{Id}_E = (f+2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2+f+3\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+f+3\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f+2\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5} f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{5}(f+2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}\right) \\
&= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{5}f^2 + \frac{1}{5}f + \frac{3}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + 3f^2 + 5f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\left(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E\right)((f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + 3f^2 + 5f + 6\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & 3\vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & 3\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{2}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{2}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{5}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{2}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{5}f(\vec{x}) - \frac{6}{5}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) + 3f^2(\vec{x}) + 5f(\vec{x}) + 6\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 3\,f^2 + 5\,f = -6\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -3\,f^2 - 5\,f - 6\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -3\,f^3 - 5\,f^2 - 6\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 - \frac{2}{5}X^3 - \frac{2}{5}X^2 - \frac{1}{5}X + \frac{6}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 3X^2 + 5X + 6$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 - \frac{2}{5}X^3 - \frac{2}{5}X^2 - \frac{1}{5}X + \frac{6}{5} = \left(X^3 + 3X^2 + 5X + 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X + \frac{1}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{5}\,f^4 - \frac{2}{5}\,f^3 - \frac{2}{5}\,f^2 - \frac{1}{5}\,f + \frac{6}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 3\,f^2 + 5\,f + 6\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\,f + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 3X^2 + 5X + 6$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace

vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+2$ pour écrire P comme produit de $X+2$ et de X^2+X+3, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+f+3\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - 3\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{llll} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -3b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2+ab-3\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2-ab+3\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a-\frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{11}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -2), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - 3\vec{x} = -\vec{y} - 3\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 50. ← page 18

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-X+11 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que

$X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $13 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 10\,f + 11\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 10\,f + 11\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 10\,f + 11\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 11$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 11 = (X+1)\,Q + 13,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + 11\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 13\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 10X + 11 = (X+1)\,(X^2 - X + 11)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 10\,f + 11\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{13} f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{13} f\,(\vec{x}) + \frac{11}{13}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{13}\,(f+\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{13} f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{13} f\,(\vec{x}) + \frac{11}{13}\vec{x}\right) \\ &= (f+\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{13}\,f^2 - \frac{1}{13}\,f + \frac{11}{13}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{13}\Big(f^3 + 10\,f + 11\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{13}\Big(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E\Big)\big((f+\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\big) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{13}\Big(f^3 + 10\,f + 11\mathrm{Id}_E\Big)\big(Q(f)(\vec{x})\big) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) +$

$\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $13\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 11\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 11\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 11\vec{z} & + f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & 11\vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 11L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{13}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{11}{13}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{2}{13}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{13}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{11}{13}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{2}{13}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{13}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{11}{13}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{13}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{11}{13}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{13}f(\vec{x}) - \frac{11}{13}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{13}\left(f^3(\vec{x}) + 10f(\vec{x}) + 11\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 10\,f = -11\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{13}f^4\left(\vec{x}\right) + \frac{2}{13}f^3\left(\vec{x}\right) - \frac{10}{13}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{9}{13}f\left(\vec{x}\right) + \frac{22}{13}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -10\,f - 11\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -10\,f^2 - 11\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{13}f^4\left(\vec{x}\right) + \frac{2}{13}f^3\left(\vec{x}\right) - \frac{10}{13}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{9}{13}f\left(\vec{x}\right) + \frac{22}{13}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{13}f^4\left(\vec{x}\right)+\frac{2}{13}f^3\left(\vec{x}\right)-\frac{10}{13}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{9}{13}f\left(\vec{x}\right)+\frac{22}{13}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{13}X^4+\frac{2}{13}X^3-\frac{10}{13}X^2+\frac{9}{13}X+\frac{22}{13}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 10X + 11$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{13}X^4 + \frac{2}{13}X^3 - \frac{10}{13}X^2 + \frac{9}{13}X + \frac{22}{13} = \left(X^3 + 10X + 11\right)\cdot\left(-\frac{1}{13}X + \frac{2}{13}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{13}\,f^4 + \frac{2}{13}\,f^3 - \frac{10}{13}\,f^2 + \frac{9}{13}\,f + \frac{22}{13}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 10\,f + 11\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{13}\,f + \frac{2}{13}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 10X + 11$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 - X + 11$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f\left(\vec{x}\right) - 11\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -11b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - 11\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + 11\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{43}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 11\vec{x} = \vec{y} - 11\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 51. ← page 18

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 - 2X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \big(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2f^2 + f). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2f^2 + f) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - 2X + 1$ par X. On a en effet :

$$X^2 - 2X + 1 = XQ + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + X = X\left(X^2 - 2X + 1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + f = f \circ \left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right) \circ f. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2\left(\vec{x}\right) - 2f\left(\vec{x}\right) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2\left(\vec{x}\right) - 2f\left(\vec{x}\right) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \left(f^3 - 2\,f^2 + f\right)\left(\vec{x}\right) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{z}\right) &= \left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)\left(f \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \left(f^3 - 2\,f^2 + f\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}. \end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $\left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\left(\vec{z}\right) - 2f\left(\vec{z}\right) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\left(\vec{z}\right) = 2f\left(\vec{z}\right) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & + \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & + f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} \vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & - \vec{z} & + 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & & \end{array} \right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -f^4(\vec{x}) + 4f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2f^2 - f$, on a aussi : $f^4 = 2f^3 - f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4(\vec{x}) + 4f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$.

2. D'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0, 1\}$

3. Comme 0 et 1 sont valeurs propres, on a :

$$\dim(\ker(f)) \geqslant 1 \qquad \text{et :} \quad \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1.$$

De plus, comme les sous-espaces propres sont en somme directe :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \leqslant \dim(E) = 3.$$

On déduit de ces trois inégalités que si l'un des deux sous-espaces propres est de dimension supérieure ou égale à 2, alors la somme de ces dimensions est à la fois supérieure et inférieure à 3, donc on doit avoir :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 3.$$

Par le critère de diagonalisation, f serait diagonalisable : faux par hypothèse. Ainsi nécessairement : $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$. On obtient la dernière dimension demandée grâce à la somme directe $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$, qui implique :

$$\dim(\ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

D'où le résultat.

4. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par $f - \mathrm{Id}_E$ (du fait que $f - \mathrm{Id}_E$ et $f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E$ commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{y}, \vec{x})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Comme elle est de cardinal $2 = \dim(\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E))$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour en déduire qu'elle est une base de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons-le : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{y} + b\vec{x} = \vec{0}$. On a :

$$(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \text{et :} \qquad (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f - \mathrm{Id}_E)((f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x})) = \vec{0}$$

car $\vec{x} \in \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)^2\right)$. Par conséquent, appliquer $f - \mathrm{Id}_E$ à la relation de dépendance linéaire ci-avant donne : $b\vec{y} = \vec{0}$. Comme $\vec{y} = (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) \neq \vec{0}$ par hypothèse sur $\vec{x}$ (en effet $\vec{x} \notin \ker(f - \mathrm{Id}_E)$), ceci impose : $b = 0$. La relation de dépendance linéaire devient alors $a\vec{y} = \vec{0}$, et de là on conclut que $a = 0$. Ainsi $a = b = 0$ et la famille est libre.

5. On a vu que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ sont respectivement de dimension 1 et 2. Soient $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$ et $(\vec{y}, \vec{x})$ la base de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ construite dans la question précédente. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{y}, \vec{x})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{y}) = \vec{y}$ (en effet : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = (f - \mathrm{Id}_E)^2(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)^2\right)$) et enfin on a par définition $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, donc : $f(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{x}$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 52. ← page 19

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + X + 42$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $42 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + 2\,f^2 + 43\,f + 42\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 2\,f^2 + 43\,f + 42\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 2\,f^2 + 43\,f + 42\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 42$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + X + 42 = (X + 1)\,Q + 42,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 42\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 42\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+2X^2+43X+42=(X+1)\left(X^2+X+42\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+2\,f^2+43\,f+42\mathrm{Id}_E=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+f+42\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+f+42\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{42}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{42}f\left(\vec{x}\right)+\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{42}\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right)&=(f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{42}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{42}f\left(\vec{x}\right)+\vec{x}\right)\\&=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{42}\,f^2+\frac{1}{42}\,f+\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{42}\Big(f^3+2\,f^2+43\,f+42\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{x}\right)\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+f+42\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{z}\right)&=\frac{1}{42}\Big(f^2+f+42\mathrm{Id}_E\Big)\left(\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{42}\Big(f^3+2\,f^2+43\,f+42\mathrm{Id}_E\Big)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right)=\vec{0}$, et : $(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right)=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $42\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 42\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 42\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} &+\vec{z} \\ f(\vec{x}) &= f(\vec{y}) &+f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= f^2(\vec{y}) &+f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} &= & \vec{y} &+ & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) &= & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= & \vec{y} &- & 42\vec{z} &- & f(\vec{z}) \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\begin{cases} \vec{x} &= & \vec{y} &+ & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) &= & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) &= & & - & 42\vec{z} & & \end{cases}.$$

On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{42}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{42}f(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{42}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{42}f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{42}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{42}f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{42}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{42}f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{42}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{42}f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{42}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{42}f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{42}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{42}f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{42}\left(f^3(\vec{x}) + 2f^2(\vec{x}) + 43f(\vec{x}) + 42\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2\,f^2 + 43\,f + 42\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{42}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{21}f^3(\vec{x}) - \frac{43}{42}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = -2\,f^2 - 43\,f - 42\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\,f^3 - 43\,f^2 - 42\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{42}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{21}f^3(\vec{x}) - \frac{43}{42}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + 43X + 42$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2+X+42, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - 42\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -42b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 + ab - 42\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - ab + 42\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{167}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+42\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - 42\vec{x} = -\vec{y} - 42\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + 42\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -42 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 53. ← page 19

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 5$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 5$ admet 5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 5 donne : $26 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-5$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X-5)\,Q+26,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+\vec{x} = (f-5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+26\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-5X^2+X-5 = (X-5)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E = (f-5\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-5\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{26}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{26}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{26}\,(f-5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{26}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{26}\vec{x}\right)\\ &= (f-5\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{26}\,f^2+\frac{1}{26}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{26}\left(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{26}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\left((f-5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{26}\left(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f-5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $26\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f-5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en

somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} &+\vec{z} \\ f(\vec{x}) &= f(\vec{y}) &+f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= f^2(\vec{y}) &+f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &= 5\vec{y} & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= 25\vec{y} - \vec{z} & \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 25L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{26} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{26} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{5}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{26}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{26}\left(f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 5\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{26} f^4(\vec{x}) + \frac{12}{13} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 5\,f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 5\,f^3 - f^2 + 5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{26} f^4(\vec{x}) + \frac{12}{13} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{26} f^4(\vec{x}) + \frac{12}{13} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{26}X^4 + \frac{12}{13}X^2 + \frac{25}{26}$ par le polynôme annulateur

$X^3 - 5X^2 + X - 5$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{26}X^4 + \frac{12}{13}X^2 + \frac{25}{26} = \left(X^3 - 5X^2 + X - 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{26}X - \frac{5}{26}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{26}\,f^4 + \frac{12}{13}\,f^2 + \frac{25}{26}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{26}\,f - \frac{5}{26}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 5X^2 + X - 5$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{5\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 5, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 5$ pour écrire P comme produit de $X - 5$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a\vec{x} & & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 5\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 5 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 5\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 5), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 54. ← page 20

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $10 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
   $$\begin{aligned}\ker(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-3$. On a en effet :
   $$X^2+1 = (X-3)\,Q+10,$$
   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
   $$f^2\,(\vec{x})+\vec{x} = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+10\vec{x}. \qquad (\dagger)$$
   Remarquons également que l'on a : $X^3-3X^2+X-3 = (X-3)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:
   $$f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-3\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$
   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
   $$\vec{y} = \frac{1}{10}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{10}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{10}\,(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :
   $$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{10}\vec{x}\right)\\ &= (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{10}\,f^2+\frac{1}{10}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
   donc : $\vec{y} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
   $$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{10}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\,((f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $10\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \quad f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{10} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{10} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{10}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(f^3(\vec{x}) - 3f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 3f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{10} f^4(\vec{x}) + \frac{4}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 3\,f^3 - f^2 + 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) + \frac{4}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) + \frac{4}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{10}X^4 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{9}{10}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 3X^2 + X - 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{10}X^4 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{9}{10} = \left(X^3 - 3X^2 + X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}X - \frac{3}{10}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{10}\,f^4 + \frac{4}{5}\,f^2 + \frac{9}{10}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{10}\,f - \frac{3}{10}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + X - 3$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{3\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 3, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 3$ pour écrire P comme produit de $X - 3$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 3\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 3 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

Comme $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 3\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 3), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 55. ← page 20

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Première démonstration. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par X. On a en effet :

$$X^2 + 1 = XQ + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X = X(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$:

$$f^3 + f = f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3 + f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de plus on a :

$$\vec{z} = f\left(Q(f)(\vec{x})\right) \in \mathrm{im}(f)$$

donc : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$.

Deuxième démonstration. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$ il existe $\vec{u} \in E$ tel que : $\vec{z} = f(\vec{u})$. Cela permet d'en déduire, comme pour $\vec{y}$, une relation vérifiée par $\vec{z}$ et ses images itérées par f : en évaluant $(*)$ en $\vec{u}$, on obtient en effet : $f^3(\vec{u}) + f(\vec{u}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} = f(\vec{u})$ on peut réécrire cette égalité ainsi : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et que $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z} = f(\vec{u})$ pour un vecteur $\vec{u} \in E$ convenable. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Pour trouver un antécédent par f de $\vec{z}$, il suffit tout simplement d'écrire :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) = f(-f(\vec{x})),$$

donc $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

Remarque. Si E est supposé de dimension finie, on peut démontrer le résultat voulu autrement : en effet, deux sous-espaces vectoriels F et G, *en dimension finie*, sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Le théorème du rang nous permet d'avoir la condition sur les dimensions, et il suffit de vérifier que l'intersection de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ est réduite au vecteur nul. Or c'est une vérification relativement facile :

soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Par définition de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$, on a $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et l'existence d'un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. En évaluant $(*)$ en $\vec{x}$, on a alors :

$$f^3(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow f^2(\vec{y}) + \vec{y} = \vec{0},$$

et comme $f(\vec{y}) = \vec{0}$ par hypothèse, il en est bien sûr de même de $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc l'égalité ci-dessus devient : $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe, et si E est de dimension finie alors on a bien $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ par l'argument ci-dessus.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$, et comme $\mathrm{im}(f)$ est stable par f (du fait que f commute avec lui-même), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathrm{im}(f)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\mathrm{im}(f)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (en effet, si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$ s'écrit $\vec{x} = f(\vec{z})$ avec $\vec{z} \in E$, alors : $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f^3(\vec{z}) = -f(\vec{z}) = -\vec{x}$ car f vérifie $(*)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, on en déduit : $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\mathrm{im}(f)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\mathrm{im}(f)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\mathrm{im}(f)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 56. ← page 20

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 - X + 11$ sont

deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $13 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+11\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+10\,f+11\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+10\,f+11\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+10\,f+11\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+11 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2-X+11 = (X+1)\,Q+13,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 11\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 13\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+10X+11 = (X+1)(X^2-X+11)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+10\,f+11\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+11\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2-f+11\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{13}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{11}{13}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{13}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{13}f^2(\vec{x})-\frac{1}{13}f(\vec{x})+\frac{11}{13}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{13}f^2-\frac{1}{13}f+\frac{11}{13}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{13}\Big(f^3+10\,f+11\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-f+11\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{13}\Big(f^2-f+11\mathrm{Id}_E\Big)((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{13}\Big(f^3+10\,f+11\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $13\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 11\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 11\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 11\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & 11\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 11L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{13}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{11}{13}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{2}{13}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{13}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{11}{13}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{13}f(\vec{x}) + \frac{2}{13}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{13}f^2(\vec{x})-\frac{1}{13}f(\vec{x})+\frac{11}{13}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{13}f^3(\vec{x})-\frac{1}{13}f^2(\vec{x})+\frac{11}{13}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{13}f^2(\vec{x})+\frac{1}{13}f(\vec{x})-\frac{11}{13}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{13}\left(f^3(\vec{x})+10f(\vec{x})+11\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+10\,f=-11\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2-f+11\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{13}f^4(\vec{x})+\frac{2}{13}f^3(\vec{x})-\frac{10}{13}f^2(\vec{x})+\frac{9}{13}f(\vec{x})+\frac{22}{13}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-10\,f-11\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-10\,f^2-11\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{13}f^4(\vec{x})+\frac{2}{13}f^3(\vec{x})-\frac{10}{13}f^2(\vec{x})+\frac{9}{13}f(\vec{x})+\frac{22}{13}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{13}f^4(\vec{x})+\frac{2}{13}f^3(\vec{x})-\frac{10}{13}f^2(\vec{x})+\frac{9}{13}f(\vec{x})+\frac{22}{13}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{13}X^4+\frac{2}{13}X^3-\frac{10}{13}X^2+\frac{9}{13}X+\frac{22}{13}$ par le polynôme annulateur $X^3+10X+11$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{13}X^4+\frac{2}{13}X^3-\frac{10}{13}X^2+\frac{9}{13}X+\frac{22}{13}=\left(X^3+10X+11\right)\cdot\left(-\frac{1}{13}X+\frac{2}{13}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{13}\,f^4+\frac{2}{13}\,f^3-\frac{10}{13}\,f^2+\frac{9}{13}\,f+\frac{22}{13}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+10\,f+11\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{13}\,f+\frac{2}{13}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3+10X+11$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2-X+11, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2-f+11\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2-f+11\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans

cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 11\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -11b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - 11\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + 11\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{43}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 11\vec{x} = \vec{y} - 11\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 11\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 57. ← page 21

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Première démonstration. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par X. On a en effet :

$$X^2 + 1 = XQ + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X = X\,(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$:

$$f^3 + f = f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ f. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f)\times\mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \left(f^3 + f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de plus on a :

$$\vec{z} = f\left(Q(f)(\vec{x})\right) \in \mathrm{im}(f)$$

donc : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$.
Deuxième démonstration. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$ il existe $\vec{u} \in E$ tel que : $\vec{z} = f(\vec{u})$. Cela permet d'en déduire, comme pour $\vec{y}$, une relation vérifiée par $\vec{z}$ et ses images itérées par f : en évaluant $(*)$ en $\vec{u}$, on obtient en effet : $f^3(\vec{u}) + f(\vec{u}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} = f(\vec{u})$ on peut réécrire cette égalité ainsi : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} &=& \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f)$ et $\vec{z}\in\operatorname{im}(f)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y})=\vec{0}$ et que $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z}=f(\vec{u})$ pour un vecteur $\vec{u}\in E$ convenable. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x})+\vec{x}\right)\\ &= \left(f^3(\vec{x})+f(\vec{x})\right)\\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f)$. Pour trouver un antécédent par f de $\vec{z}$, il suffit tout simplement d'écrire :

$$\vec{z}=-f^2(\vec{x})=f(-f(\vec{x})),$$

donc $\vec{z}\in\operatorname{im}(f)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f)$ et $\vec{z}\in\operatorname{im}(f)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f)\oplus\operatorname{im}(f)$.

Remarque. Si E est supposé de dimension finie, on peut démontrer le résultat voulu autrement : en effet, deux sous-espaces vectoriels F et G, *en dimension finie*, sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E)=\dim(F)+\dim(G)$ et $F\cap G=\{\vec{0}\}$. Le théorème du rang nous permet d'avoir la condition sur les dimensions, et il suffit de vérifier que l'intersection de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ est réduite au vecteur nul. Or c'est une vérification relativement facile : soit $\vec{y}\in\ker(f)\cap\operatorname{im}(f)$. Par définition de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$, on a $f(\vec{y})=\vec{0}$, et l'existence d'un vecteur $\vec{x}\in E$ tel que : $\vec{y}=f(\vec{x})$. En évaluant $(*)$ en $\vec{x}$, on a alors :

$$f^3(\vec{x})+f(\vec{x})=\vec{0}\Longleftrightarrow f^2(\vec{y})+\vec{y}=\vec{0},$$

et comme $f(\vec{y})=\vec{0}$ par hypothèse, il en est bien sûr de même de $f^2(\vec{y})=f(f(\vec{y}))=f(\vec{0})=\vec{0}$, donc l'égalité ci-dessus devient : $\vec{y}=\vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont en somme directe, et si E est de dimension finie alors on a bien $E=\ker(f)\oplus\operatorname{im}(f)$ par l'argument ci-dessus.

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3+X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$
3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\operatorname{im}(f)$, et comme $\operatorname{im}(f)$ est stable par f (du fait que f commute avec lui-même), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\operatorname{im}(f)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\operatorname{im}(f)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ (en effet, si $\vec{x}\in\operatorname{im}(f)$ s'écrit $\vec{x}=f(\vec{z})$ avec $\vec{z}\in E$, alors : $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=f^3(\vec{z})=-f(\vec{z})=-\vec{x}$ car f vérifie $(*)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0}\\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2\leftarrow bL_2-aL_1$ donne alors : $(-a^2-b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, on en déduit : $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\mathrm{im}(f)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\mathrm{im}(f)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\mathrm{im}(f)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 58. ← page 21

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :
$$X^2 + 1 = (X+1)\,Q + 2,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$
Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:
$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$
Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\vec{x}&=&\vec{y}&+\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&f(\vec{y})&+f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&f^2(\vec{y})&+f^2(\vec{z})\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x}&=&&\vec{y}&+&\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&-&\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&&\vec{y}&-&\vec{z}\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\,f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}\,f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel

que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq-\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=-\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 59. ← page 21

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-11$ et X^2+4X+9 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-11$ admet 11 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 11 donne : $174\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-11\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3-7\,f^2-35\,f-99\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-7\,f^2-35\,f-99\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-7\,f^2-35\,f-99\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-11\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-11\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+4X+9 par $X-11$. On a en effet :

$$X^2+4X+9=(X-11)\,Q+174,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+4f(\vec{x})+9\vec{x}=(f-11\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+174\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-7X^2-35X-99=(X-11)(X^2+4X+9)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-11\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-7f^2-35f-99\mathrm{Id}_E=(f-11\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-11\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{174}f^2(\vec{x})+\frac{2}{87}f(\vec{x})+\frac{3}{58}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=\frac{1}{174}(f-11\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-11\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f-11\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{174}f^2(\vec{x})+\frac{2}{87}f(\vec{x})+\frac{3}{58}\vec{x}\right)\\&=(f-11\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{174}f^2+\frac{2}{87}f+\frac{3}{58}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(‡)}{=}\frac{1}{174}\left(f^3-7f^2-35f-99\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})&=\frac{1}{174}\left(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E\right)((f-11\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(‡)}{=}\frac{1}{174}\left(f^3-7f^2-35f-99\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-11\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-11\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $174\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.

Ayant démontré : $E=\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-11\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=11\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+4f+9\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + 4f(\vec{z}) + 9\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -4f(\vec{z}) - 9\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 11\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 121\vec{y} & - & 9\vec{z} & - & 4f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 11\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) & = & 165\vec{y} & - & 9\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 9L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 165L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{174}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{87}f(\vec{x}) + \frac{3}{58}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{174}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{87}f(\vec{x}) + \frac{55}{58}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{174}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{87}f(\vec{x}) + \frac{3}{58}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{174}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{87}f(\vec{x}) + \frac{55}{58}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4f + 9\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4f + 9\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 11\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 4f + 9\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 11\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 11\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{174}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{87}f(\vec{x}) + \frac{3}{58}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{174}f^3(\vec{x}) + \frac{2}{87}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{58}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{11}{174}f^2(\vec{x}) + \frac{22}{87}f(\vec{x}) + \frac{33}{58}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{174}\left(f^3(\vec{x}) - 7f^2(\vec{x}) - 35f(\vec{x}) - 99\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 7f^2 - 35f = 99\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 4f + 9\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{174}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{87}f^3(\vec{x}) + \frac{70}{87}f^2(\vec{x}) + \frac{104}{29}f(\vec{x}) + \frac{495}{58}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 7f^2 + 35f + 99\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 7f^3 + 35f^2 + 99f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{174}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{87}f^3(\vec{x}) + \frac{70}{87}f^2(\vec{x}) + \frac{104}{29}f(\vec{x}) + \frac{495}{58}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4f + 9\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4f + 9\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4f + 9\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{174}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{87}f^3(\vec{x}) + \frac{70}{87}f^2(\vec{x}) + \frac{104}{29}f(\vec{x}) + \frac{495}{58}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{174}X^4 - \frac{4}{87}X^3 + \frac{70}{87}X^2 + \frac{104}{29}X + \frac{495}{58}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 7X^2 - 35X - 99$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{174}X^4 - \frac{4}{87}X^3 + \frac{70}{87}X^2 + \frac{104}{29}X + \frac{495}{58} = \left(X^3 - 7X^2 - 35X - 99\right) \cdot \left(-\frac{1}{174}X - \frac{5}{58}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$-\frac{1}{174}\,f^4-\frac{4}{87}\,f^3+\frac{70}{87}\,f^2+\frac{104}{29}\,f+\frac{495}{58}\mathrm{Id}_E=\left(f^3-7\,f^2-35\,f-99\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{174}\,f-\frac{5}{58}\mathrm{Id}_E\right)$$
$$=0_{\mathrm{L}(E)}.$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3-7X^2-35X-99$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{11\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 11, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-11$ pour écrire P comme produit de $X-11$ et de X^2+4X+9, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-4f(\vec{x})-9\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{lll} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & =\vec{0}\\ -9b\vec{x} & +(a-4b)\,f(\vec{x}) & =\vec{0}\end{array}\right..$$

L'opération $L_2\leftarrow bL_2-(a-4b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2+4\,ab-9\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2-4\,ab+9\,b^2=0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$(a-2\,b)^2+5b^2=0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a-2\,b=b=0$. Il en découle aisément $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq 11\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f-11\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f-11\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f-11\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-11\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car 11 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-11\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-11\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-11\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+4\,f+9\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=11\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-11\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 11), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition

de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4f(\vec{x}) - 9\vec{x} = -4\vec{y} - 9\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4f + 9\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 60. ← page 22

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 2 = (X - 1)\, Q + 3,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X - 1)(X^2 + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\big) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) &=& \vec{y} & & &+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} &-& 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 2\,f = 2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 2\,f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 2X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 - X^2 + 2X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\,f^4 - \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\,f - \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + 2X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 2$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 2\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans

$\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-2\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Corrigé 61. ← page 22

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)&=\ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\&=\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+1=(X+1)\,Q+2,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+\vec{x}=(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+X+1=(X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel

que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq-\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=-\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 62. ← page 22

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et X^2+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $3\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f)\oplus\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)&=\ker\Big((f)\circ\Big(f^2+3\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\&=\ker(f^3+3\,f).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+3\,f=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+3\,f)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+3 par X. On a en effet :

$$X^2+3=XQ+3,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+3\vec{x}=f\circ Q(f)(\vec{x})+3\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+3X = X\left(X^2+3\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+3\,f = f\circ\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\circ f. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f)\times\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2\left(\vec{x}\right)+\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}f\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{3}f^2\left(\vec{x}\right)+\vec{x}\right)\\ &= f\circ\left(\frac{1}{3}\,f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3+3\,f\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\left(f\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3+3\,f\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}. \end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f)\times\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f)\cap\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f)\cap\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+3\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f)\cap\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f)\cap\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f)\cap\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f)\times\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f)\times\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f)$, on a : $f(\vec{y})=\vec{0}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} & = & \vec{y} \ + \ \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & - \ 3\vec{z} & \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 = -3f$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = -3f$, on a aussi : $f^4 = -3f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 3X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 3\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -3b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 3b^2)\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 3b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -3\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 63. ← page 23

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+3$ et X^2-X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+3$ admet -3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -3 donne : $13 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 1$ par $X + 3$. On a en effet :
$$X^2 - X + 1 = (X + 3)\,Q + 13,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x} = (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 13\vec{x}. \tag{†}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3 + 2X^2 - 2X + 3 = (X+3)(X^2 - X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$:
$$f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E = (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\big) \circ (f + 3\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$
Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{13} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13} f(\vec{x}) + \frac{1}{13}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{13}(f + 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{13} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13} f(\vec{x}) + \frac{1}{13}\vec{x}\right) \\ &= (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{13} f^2 - \frac{1}{13} f + \frac{1}{13}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{13}\left(f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{13}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)((f + 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{13}\left(f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $13\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\,3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\,3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 12\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 12L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{13} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13} f(\vec{x}) + \frac{1}{13}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{13} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{13} f(\vec{x}) + \frac{12}{13}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{13} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13} f(\vec{x}) + \frac{1}{13}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{13} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{13} f(\vec{x}) + \frac{12}{13}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{13} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{13} f(\vec{x}) + \frac{1}{13}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{13} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{13} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{13} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{3}{13} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{13} f(\vec{x}) - \frac{3}{13}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{13}\left(f^3(\vec{x}) + 2f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + 3\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{13} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{13} f^3(\vec{x}) + \frac{10}{13} f^2(\vec{x}) - \frac{11}{13} f(\vec{x}) + \frac{12}{13}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -2\,f^2 + 2\,f - 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\,f^3 + 2\,f^2 - 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{13} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{13} f^3(\vec{x}) + \frac{10}{13} f^2(\vec{x}) - \frac{11}{13} f(\vec{x}) + \frac{12}{13}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{13} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{13} f^3(\vec{x}) + \frac{10}{13} f^2(\vec{x}) - \frac{11}{13} f(\vec{x}) + \frac{12}{13}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{13}X^4 + \frac{2}{13}X^3 + \frac{10}{13}X^2 - \frac{11}{13}X + \frac{12}{13}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 2X^2 - 2X + 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{13}X^4 + \frac{2}{13}X^3 + \frac{10}{13}X^2 - \frac{11}{13}X + \frac{12}{13} = \left(X^3 + 2X^2 - 2X + 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{13}X + \frac{4}{13}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{13}\,f^4 + \frac{2}{13}\,f^3 + \frac{10}{13}\,f^2 - \frac{11}{13}\,f + \frac{12}{13}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{13}\,f + \frac{4}{13}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 2X^2 - 2X + 3$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace

vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-3\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -3, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+3$ pour écrire P comme produit de $X+3$ et de X^2-X+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x})-\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -3\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -3 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -3\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -3), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 64. ← page 23

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$

admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X+1)\,Q+2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\vec{x}&=&\vec{y}&+\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&f(\vec{y})&+f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&f^2(\vec{y})&+f^2(\vec{z})\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x}&=&&\vec{y}&+\ \vec{z}&\\ f(\vec{x})&=&-&\vec{y}&&+\ f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&&\vec{y}&-\ \vec{z}&\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x})+\frac{1}{2}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})-\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x})+f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f^2+f=-\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f^2-f-\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^3-f^2-f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre

de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 65. ← page 23

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X-1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2} f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc :

$\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 66. ← page 24

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+2$ et X^2-3X+6 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+2$ admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $16 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-3\,f+6\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-3\,f+6\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3-f^2+12\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+12\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+12\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-3\,f+6\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-3\,f+6\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-3X+6 par $X+2$. On a en effet :

$$X^2-3X+6 = (X+2)\,Q+16,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - 3f(\vec{x}) + 6\vec{x} = (f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 16\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+12 = (X+2)(X^2-3X+6)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-3\,f+6\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+12\mathrm{Id}_E = (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-3\,f+6\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2-3\,f+6\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+2\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2-3\,f+6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{16}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{16}f(\vec{x}) + \frac{3}{8}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{16}(f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{16}f^2\,(\vec{x}) - \frac{3}{16}f\,(\vec{x}) + \frac{3}{8}\vec{x}\right)\\
&= (f + 2\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{16}\,f^2 - \frac{3}{16}\,f + \frac{3}{8}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{16}\left(f^3 - f^2 + 12\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{16}\left(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E\right)((f + 2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{16}\left(f^3 - f^2 + 12\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $16\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\,(\vec{z}) - 3f\,(\vec{z}) + 6\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\,(\vec{z}) = 3f\,(\vec{z}) - 6\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\
f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\
f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}
\vec{x} &=& \vec{y} + \vec{z}\\
f(\vec{x}) &=& -2\vec{y} + f(\vec{z})\\
f^2(\vec{x}) &=& 4\vec{y} - 6\vec{z} + 3f(\vec{z})
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\vec{x} &=& \vec{y} + \vec{z}\\
f(\vec{x}) &=& -2\vec{y} + f(\vec{z})\\
f^2\,(\vec{x}) - 3f\,(\vec{x}) &=& 10\vec{y} - 6\vec{z}
\end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{16} f^2(\vec{x}) - \frac{3}{16} f(\vec{x}) + \frac{3}{8}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{16} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{16} f(\vec{x}) + \frac{5}{8}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{16} f^2(\vec{x}) - \frac{3}{16} f(\vec{x}) + \frac{3}{8}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{16} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{16} f(\vec{x}) + \frac{5}{8}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3f + 6\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3f + 6\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 3f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{16} f^2(\vec{x}) - \frac{3}{16} f(\vec{x}) + \frac{3}{8}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{16} f^3(\vec{x}) - \frac{3}{16} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{8} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{8} f(\vec{x}) - \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 12\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 = -12\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 3f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{16} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{8} f^3(\vec{x}) - \frac{5}{16} f^2(\vec{x}) - \frac{3}{4} f(\vec{x}) + \frac{15}{4}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 12\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 12f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{16} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{8} f^3(\vec{x}) - \frac{5}{16} f^2(\vec{x}) - \frac{3}{4} f(\vec{x}) + \frac{15}{4}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3f + 6\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3f + 6\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 3f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{16} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{8} f^3(\vec{x}) - \frac{5}{16} f^2(\vec{x}) - \frac{3}{4} f(\vec{x}) + \frac{15}{4}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{16}X^4 + \frac{3}{8}X^3 - \frac{5}{16}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{15}{4}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 12$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{16}X^4 + \frac{3}{8}X^3 - \frac{5}{16}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{15}{4} = \left(X^3 - X^2 + 12\right) \cdot \left(-\frac{1}{16}X + \frac{5}{16}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{16} f^4 + \frac{3}{8} f^3 - \frac{5}{16} f^2 - \frac{3}{4} f + \frac{15}{4}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 12\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{16} f + \frac{5}{16}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + 12$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+2$ pour écrire P comme produit de $X+2$ et de X^2-3X+6, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 3f\,(\vec{x}) - 6\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -6b\vec{x} & +(a+3b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+3b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - 3\,ab - 6\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 3\,ab + 6\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a + \frac{3}{2}\,b\right)^2 + \frac{15}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{3}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -2), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 3f\,(\vec{x}) - 6\vec{x} = 3\vec{y} - 6\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 67. ← page 24

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2-2X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que

$X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-3\,f^2+4\,f-2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-3\,f^2+4\,f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+4\,f-2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-2X+2 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2-2X+2 = (X-1)\,Q+1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+2\vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-3X^2+4X-2 = (X-1)\,(X^2-2X+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-3\,f^2+4\,f-2\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+2\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\Big(f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+2\vec{x}\Big)\\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \Big(f^3-3\,f^2+4\,f-2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \Big(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \Big(f^3-3\,f^2+4\,f-2\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in$

$\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})-2f(\vec{z})+2\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=2f(\vec{z})-2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}\vec{x}&=&\vec{y}&+\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&f(\vec{y})&+f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&f^2(\vec{y})&+f^2(\vec{z})\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcccccc}\vec{x}&=&\vec{y}&+&\vec{z}&&\\ f(\vec{x})&=&\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&\vec{y}&-&2\vec{z}&+&2f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3\leftarrow L_3-2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rccccccc}\vec{x}&=&&\vec{y}&+&\vec{z}&&\\ f(\vec{x})&=&&\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})&=&-&\vec{y}&-&2\vec{z}&&\end{array}\right..$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+2L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3+L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+2\vec{x},\qquad\text{et : }\quad\vec{z}=-f^2(\vec{x})+2f(\vec{x})-\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+2\vec{x}$, et : $\vec{z}=-f^2(\vec{x})+2f(\vec{x})-\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f-\mathrm{Id}_E)\Big(f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+2\vec{x}\Big)\\&=\Big(f^3(\vec{x})-2f^2(\vec{x})+2f(\vec{x})\Big)-\Big(f^2(\vec{x})-2f(\vec{x})+2\vec{x}\Big)\\&=f^3(\vec{x})-3f^2(\vec{x})+4f(\vec{x})-2\vec{x}\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-3\,f^2+4\,f=2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\Big(f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z})=-f^4(\vec{x})+4f^3(\vec{x})-7f^2(\vec{x})+6f(\vec{x})-2\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 3\,f^2 - 4\,f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 3\,f^3 - 4\,f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4\,(\vec{x}) + 4f^3\,(\vec{x}) - 7f^2\,(\vec{x}) + 6f\,(\vec{x}) - 2\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-f^4\,(\vec{x}) + 4f^3\,(\vec{x}) - 7f^2\,(\vec{x}) + 6f\,(\vec{x}) - 2\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-X^4 + 4X^3 - 7X^2 + 6X - 2$ par le polynôme annulateur $X^3 - 3X^2 + 4X - 2$, pour remarquer que :

$$-X^4 + 4X^3 - 7X^2 + 6X - 2 = \Big(X^3 - 3X^2 + 4X - 2\Big) \cdot (-X + 1)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -f^4 + 4\,f^3 - 7\,f^2 + 6\,f - 2\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3 - 3\,f^2 + 4\,f - 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ (-f + \mathrm{Id}_E) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2-2X+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 2f\,(\vec{x}) - 2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +(a+2b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+2b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - 2\,ab - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 2\,ab + 2\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$(a+b)^2 + 1b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)) =$

$3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - 2\vec{x} = 2\vec{y} - 2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 68. ← page 24

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 4$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 4$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 4 = (X + 1)\,Q + 5,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 4\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 5\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + 4X + 4 = (X + 1)(X^2 + 4)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{5}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{5}f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right)\left(\left(f + \mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 4\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -4\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc}
\vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\
f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & 4\vec{z} &
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{5}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{4}{5}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) + 4\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) - \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 4\,f - 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 4\,f^2 - 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) - \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) - \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 - \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 4X + 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 - \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \left(X^3 + X^2 + 4X + 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X + \frac{1}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{5}\,f^4 - \frac{3}{5}\,f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\,f + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + 4X + 4$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 + 4$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 4\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.

Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -4b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 4\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 4\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 69. ← page 25

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + X + 1 = (X - 1)\,Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 1 = (X-1)\,(X^2+X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{3} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}\,(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{3} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3}\, f^2 + \frac{1}{3}\, f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z})+f(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-f(\vec{z})-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &= f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &= \vec{y} & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= \vec{y} - \vec{z} & - f(\vec{z}) \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3+L_2$, alors le système équivaut à :

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &= \vec{y} & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x})+f(\vec{x}) &= 2\vec{y} - \vec{z} & \end{cases}.$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z}=-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+f+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x})+\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x})-\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3=\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})-\frac{2}{3}f^3(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3=\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})-\frac{2}{3}f^3(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})-\frac{2}{3}f^3(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4-\frac{2}{3}X^3+\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur X^3-1, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4-\frac{2}{3}X^3+\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}=\left(X^3-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}f^4-\frac{2}{3}f^3+\frac{1}{3}f+\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{3}f-\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2+X+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+f+\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2+ab-b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x} = -\vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 70. ← page 25

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 - X + 6$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $6 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f) \circ \left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - f^2 + 6\,f).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 6\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 6\,f) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 6$ par X. On a en effet :

$$X^2 - X + 6 = XQ + 6,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{x}\right) + 6\vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + 6\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 6X = X\left(X^2 - X + 6\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 6\,f = f \circ \left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{$\ddagger$}$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{6}f^2\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{6}f\left(\vec{x}\right) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{6}f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{6}f^2\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{6}f\left(\vec{x}\right) + \vec{x}\right)\\ &= f \circ \left(\frac{1}{6}\,f^2 - \frac{1}{6}\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{6}\left(f^3 - f^2 + 6\,f\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

   donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{6}\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)\left(f \circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{6}\left(f^3 - f^2 + 6\,f\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $6\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 6\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 6\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & 6\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & - & 6\vec{z} & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6} f(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{6} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{6} f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{6} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{6} f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6} f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{6} f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 6\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{6}f^4\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^3\,(\vec{x}) - \frac{7}{6}f^2\,(\vec{x}) + f\,(\vec{x})\,,$$

et comme : $f^3 = f^2 - 6\,f$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 6\,f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{6}f^4\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^3\,(\vec{x}) - \frac{7}{6}f^2\,(\vec{x}) + f\,(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + 6X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f\,(\vec{x}) - 6\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{cccc} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -6b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - 6\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + 6\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{23}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f\,(\vec{x}) - 6\vec{x} = \vec{y} - 6\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 71. ← page 25

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Première démonstration. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 4X + 38$ par X. On a en effet :

   $$X^2 + 4X + 38 = XQ + 38,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

   $$f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) + 38\vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + 38\vec{x}. \tag{†}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3+4X^2+38X = X(X^2 + 4X + 38)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$:

   $$f^3 + 4\,f^2 + 38\,f = f \circ \left(f^2 + 4\,f + 38\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 4\,f + 38\mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{‡}$$

   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f)\times\mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

   $$\vec{y} = \frac{1}{38}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{19}f(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{38}f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a :

   $$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{38}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{19}f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(\frac{1}{38}\,f^2 + \frac{2}{19}\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{38}\left(f^3 + 4\,f^2 + 38\,f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

   donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de plus on a :

   $$\vec{z} = f\left(\frac{1}{38}Q(f)(\vec{x})\right) \in \mathrm{im}(f)$$

   donc : $\vec{z} \in \mathrm{im}(f)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$.

   Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 4\,f + 38\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $38\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

   Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$.

   Deuxième démonstration. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que

$E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ il existe $\vec{u} \in E$ tel que : $\vec{z} = f(\vec{u})$. Cela permet d'en déduire, comme pour $\vec{y}$, une relation vérifiée par $\vec{z}$ et ses images itérées par f : en évaluant $(*)$ en $\vec{u}$, on obtient en effet : $f^3(\vec{u}) + 4f^2(\vec{u}) + 38f(\vec{u}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} = f(\vec{u})$ on peut réécrire cette égalité ainsi : $f^2(\vec{z}) + 4f(\vec{z}) + 38\vec{z} = \vec{0}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrrrr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & 38\vec{z} & - \ 4f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrrrr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) & = & & - & 38\vec{z} & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{38}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{19}f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{38}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{19}f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{38}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{19}f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{38}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{19}f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et que $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z} = f(\vec{u})$ pour un vecteur $\vec{u} \in E$ convenable. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{38}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{19}f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{38}f^3(\vec{x}) + \frac{2}{19}f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 4\,f^2 + 38\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Pour trouver un antécédent par f de $\vec{z}$, il suffit tout simplement d'écrire :

$$\vec{z} = -\frac{1}{38}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{19}f(\vec{x}) = f\left(-\frac{1}{38}f(\vec{x}) - \frac{2}{19}\vec{x}\right),$$

donc $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Remarque. Si E est supposé de dimension finie, on peut démontrer le résultat voulu autrement : en effet, deux sous-espaces vectoriels F et G, *en dimension finie*, sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Le théorème du rang nous permet d'avoir la condition sur les dimensions, et il suffit de vérifier que l'intersection de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ est réduite au vecteur nul. Or c'est une vérification relativement facile : soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Par définition de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$, on a $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et l'existence d'un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. En évaluant $(*)$ en $\vec{x}$, on a alors :

$$f^3(\vec{x}) + 4f^2(\vec{x}) + 38f(\vec{x}) = \vec{0} \iff f^2(\vec{y}) + 4f(\vec{y}) + 38\vec{y} = \vec{0},$$

et comme $f(\vec{y}) = \vec{0}$ par hypothèse, il en est bien sûr de même de $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc l'égalité ci-dessus devient : $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe, et si E est de dimension finie alors on a bien $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ par l'argument ci-dessus.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 4X^2 + 38X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$, et comme $\mathrm{im}(f)$ est stable par f (du fait que f commute avec lui-même), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathrm{im}(f)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\mathrm{im}(f)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4f(\vec{x}) - 38\vec{x}$ (en effet, si $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$ s'écrit $\vec{x} = f(\vec{z})$ avec $\vec{z} \in E$, alors : $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f^3(\vec{z}) = -4f^2(\vec{z}) - 38f(\vec{z}) = -4f(\vec{x}) - 38\vec{x}$ car f vérifie $(*)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -38b\vec{x} & +(a-4b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-4b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 + 4\,ab - 38\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - 4\,ab + 38\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$(a - 2\,b)^2 + 34b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - 2\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, on en déduit : $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\mathrm{im}(f)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\mathrm{im}(f)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\mathrm{im}(f)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -4f(\vec{x}) - 38\vec{x} = -4\vec{y} - 38\vec{x}$ car $\vec{x} \in \mathrm{im}(f)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 72. ← page 26

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-2$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-2\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+\mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-2$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X-2)\,Q+5,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+\vec{x} = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+5\vec{x}. \tag{†}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3-2X^2+X-2 = (X-2)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2+\mathrm{Id}_E\big)\circ(f-2\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{5}\,(f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}\right)\\ &= (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{5}\,f^2+\frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

   donc : $\vec{y} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)((f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{2}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \left(X^3 - 2X^2 + X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X - \frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\,f^4 + \frac{3}{5}\,f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\,f - \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 2$ pour écrire P comme produit de $X - 2$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

Comme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 2), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 73. ← page 26

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et $X^2 - X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 1 = (X + 1)\, Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 1 = (X + 1)\,(X^2 - X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{3} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}\,(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{3} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3}\, f^2 - \frac{1}{3}\, f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3 + \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$

d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x})-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})-\frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x})+\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})+\frac{2}{3}f^3(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})+\frac{2}{3}f^3(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})+\frac{2}{3}f^3(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4+\frac{2}{3}X^3-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur X^3+1, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4+\frac{2}{3}X^3-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}=\left(X^3+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}f^4+\frac{2}{3}f^3-\frac{1}{3}f+\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{3}f+\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x\mapsto\chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x^3\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x)=+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda)=0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P=X^3+1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2-X+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2-f+\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x})\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f

dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=f(\vec{x})-\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\vec{x} \quad +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} \quad +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2-(a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2-ab-b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+ab+b^2=0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a+\frac{1}{2}\,b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a+\frac{1}{2}\,b=b=0$. Il en découle aisément $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq-\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=-\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=f(\vec{x})-\vec{x}=\vec{y}-\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Corrigé 74. ← page 26

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)&=\ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\&=\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que

$\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\, Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)\,(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}\,(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}\, f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et

l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vec{x} & = & \vec{y} \quad +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) \quad +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) \quad +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\,f^4+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{2}\,f-\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0}\\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0}\end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+b^2=0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f\neq\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim\left(\ker(f-\mathrm{Id}_E)\right)<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right) = 3-\dim\left(\ker(f-\mathrm{Id}_E)\right)>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim\left(\ker(f-\mathrm{Id}_E)\right)+\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)$, avec $\dim\left(\ker(f-\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim\left(\ker(f-\mathrm{Id}_E)\right)=1$ et $\dim\left(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\right)=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Corrigé 75. ← page 27

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Première démonstration. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par X. On a en effet :
$$X^2 + 1 = XQ + 1,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3 + X = X(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$:
$$f^3 + f = f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ f. \tag{‡}$$
Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$. On a :
$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \left(f^3 + f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$
donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de plus on a :
$$\vec{z} = f\left(Q(f)(\vec{x})\right) \in \operatorname{im}(f)$$
donc : $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$.
Deuxième démonstration. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \operatorname{im}(f)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée

par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et comme $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ il existe $\vec{u} \in E$ tel que : $\vec{z} = f(\vec{u})$. Cela permet d'en déduire, comme pour $\vec{y}$, une relation vérifiée par $\vec{z}$ et ses images itérées par f : en évaluant $(*)$ en $\vec{u}$, on obtient en effet : $f^3(\vec{u}) = -f(\vec{u})$, et comme $\vec{z} = f(\vec{u})$ on peut réécrire cette égalité ainsi : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & -\vec{z} & \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et que $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z} = f(\vec{u})$ pour un vecteur $\vec{u} \in E$ convenable. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 = -f$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Pour trouver un antécédent par f de $\vec{z}$, il suffit tout simplement d'écrire :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) = f(-f(\vec{x})),$$

donc $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \operatorname{im}(f)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Remarque. Si E est supposé de dimension finie, on peut démontrer le résultat voulu autrement : en effet, deux sous-espaces vectoriels F et G, *en dimension finie*, sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Le théorème du rang nous permet d'avoir la condition sur les dimensions, et il suffit de vérifier que l'intersection de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ est réduite au vecteur nul. Or c'est une vérification relativement facile : soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. Par définition de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$, on a $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et l'existence d'un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. En évaluant $(*)$ en $\vec{x}$, on a alors :

$$f^3(\vec{x}) = -f(\vec{x}) \iff f^2(\vec{y}) = -\vec{y},$$

et comme $f(\vec{y}) = \vec{0}$ par hypothèse, il en est bien sûr de même de $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc l'égalité ci-dessus devient : $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont en somme directe, et si E est de dimension finie alors on a bien $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ par l'argument ci-dessus.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$

tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \operatorname{im}(f)$, et comme $\operatorname{im}(f)$ est stable par f (du fait que f commute avec lui-même), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \operatorname{im}(f)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\operatorname{im}(f)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (en effet, si $\vec{x} \in \operatorname{im}(f)$ s'écrit $\vec{x} = f(\vec{z})$ avec $\vec{z} \in E$, alors : $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f^3(\vec{z}) = -f(\vec{z}) = -\vec{x}$ car f vérifie $(*)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$, on en déduit : $\dim(\operatorname{im}(f)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\operatorname{im}(f)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\operatorname{im}(f)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\operatorname{im}(f)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\operatorname{im}(f)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\operatorname{im}(f)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \operatorname{im}(f)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 76. ← page 27

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+8$ et $X^2 - X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 8$ admet -8 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -8 donne : $73 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f + 8\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 8\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 7\,f^2 - 7\,f + 8\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 7\,f^2 - 7\,f + 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 7\,f^2 - 7\,f + 8\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 8\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant

que $\ker(f+8\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+1 par $X+8$. On a en effet :

$$X^2-X+1=(X+8)\,Q+73,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\vec{x}=(f+8\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+73\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+7X^2-7X+8=(X+8)(X^2-X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+8\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+7f^2-7f+8\mathrm{Id}_E=(f+8\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+8\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+8\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{73}f^2(\vec{x})-\frac{1}{73}f(\vec{x})+\frac{1}{73}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=\frac{1}{73}(f+8\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+8\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+8\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f+8\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{73}f^2(\vec{x})-\frac{1}{73}f(\vec{x})+\frac{1}{73}\vec{x}\right)\\&=(f+8\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{73}f^2-\frac{1}{73}f+\frac{1}{73}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(‡)}{=}\frac{1}{73}\left(f^3+7f^2-7f+8\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f+8\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})&=\frac{1}{73}\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)\left((f+8\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\&\overset{(‡)}{=}\frac{1}{73}\left(f^3+7f^2-7f+8\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+8\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+8\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+8\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+8\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+8\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $73\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+8\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+8\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+8\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+8\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+8\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et

l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 8\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 8\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -8\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 8\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & 64\vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 8\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & 72\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 72L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{73}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{73}f(\vec{x}) + \frac{1}{73}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{73}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{73}f(\vec{x}) + \frac{72}{73}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{73}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{73}f(\vec{x}) + \frac{1}{73}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{73}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{73}f(\vec{x}) + \frac{72}{73}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 8\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 8\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 8\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 8\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 8\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{73}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{73}f(\vec{x}) + \frac{1}{73}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{73}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{73}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{73}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{8}{73}f^2(\vec{x}) + \frac{8}{73}f(\vec{x}) - \frac{8}{73}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{73}\left(f^3(\vec{x}) + 7f^2(\vec{x}) - 7f(\vec{x}) + 8\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 7f^2 - 7f = -8\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 8\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{73}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{73}f^3(\vec{x}) + \frac{70}{73}f^2(\vec{x}) - \frac{71}{73}f(\vec{x}) + \frac{72}{73}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -7f^2 + 7f - 8\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -7f^3 + 7f^2 - 8f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{73}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{73}f^3(\vec{x}) + \frac{70}{73}f^2(\vec{x}) - \frac{71}{73}f(\vec{x}) +$

$\frac{72}{73}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 8\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 8\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{73}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{73}f^3(\vec{x}) + \frac{70}{73}f^2(\vec{x}) - \frac{71}{73}f(\vec{x}) + \frac{72}{73}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{73}X^4 + \frac{2}{73}X^3 + \frac{70}{73}X^2 - \frac{71}{73}X + \frac{72}{73}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 7X^2 - 7X + 8$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{73}X^4 + \frac{2}{73}X^3 + \frac{70}{73}X^2 - \frac{71}{73}X + \frac{72}{73} = \left(X^3 + 7X^2 - 7X + 8\right) \cdot \left(-\frac{1}{73}X + \frac{9}{73}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{73}f^4 + \frac{2}{73}f^3 + \frac{70}{73}f^2 - \frac{71}{73}f + \frac{72}{73}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 7f^2 - 7f + 8\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{73}f + \frac{9}{73}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 7X^2 - 7X + 8$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-8\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -8, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+8$ pour écrire P comme produit de $X+8$ et de $X^2 - X + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq -8\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 8\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 8\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + 8\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit :

$\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 8\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 8\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 8\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -8 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 8\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + 8\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + 8\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -8\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 8\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -8), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 77. ← page 27

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 2$ et $X^2 + 2X + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $10 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - 2f - 4\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2f - 4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2X + 2$ par $X - 2$. On a en effet :
$$X^2 + 2X + 2 = (X - 2)\,Q + 10,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 10\vec{x}. \qquad (\dagger)$$
Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X - 4 = (X - 2)(X^2 + 2X + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3 - 2f - 4\mathrm{Id}_E = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$
Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{10}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{5}f\,(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right)\\ &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{10}\,f^2 + \frac{1}{5}\,f + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\left(f^3 - 2\,f - 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{10}\left(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right)\left(\left(f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\left(f^3 - 2\,f - 4\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $10\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\,(\vec{z}) + 2f\,(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\,(\vec{z}) = -2f\,(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc}\vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& 2\vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& 4\vec{y} &-& 2\vec{z} &-& 2f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}\vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& 2\vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2\,(\vec{x}) + 2f\,(\vec{x}) &=& 8\vec{y} &-& 2\vec{z} &&\end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{10}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{5}f(\vec{x}) + \frac{2}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(f^3(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) - 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f = 4\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{6}{5}f(\vec{x}) + \frac{8}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 2\,f + 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^2 + 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{6}{5}f(\vec{x}) + \frac{8}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{6}{5}f(\vec{x}) + \frac{8}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{10}X^4 - \frac{2}{5}X^3 + \frac{1}{5}X^2 + \frac{6}{5}X + \frac{8}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X - 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{10}X^4 - \frac{2}{5}X^3 + \frac{1}{5}X^2 + \frac{6}{5}X + \frac{8}{5} = \left(X^3 - 2X - 4\right)\cdot\left(-\frac{1}{10}X - \frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{10}\,f^4 - \frac{2}{5}\,f^3 + \frac{1}{5}\,f^2 + \frac{6}{5}\,f + \frac{8}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 2\,f - 4\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{10}\,f - \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X - 4$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-2$ pour écrire P comme produit de $X-2$ et de X^2+2X+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x}) \in \ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-2f(\vec{x})-2\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +(a-2b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2-(a-2b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2+2\,ab-2\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2-2\,ab+2\,b^2=0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$(a-b)^2+1b^2=0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a-b=b=0$. Il en découle aisément $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq 2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car 2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=2\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 2), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-2f(\vec{x})-2\vec{x}=-2\vec{y}-2\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 78. ← page 28

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-6$ et X^2-X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-6$ admet 6 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 6 donne : $32\neq 0$. Ils

sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-6\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-7\,f^2+8\,f-12\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-7\,f^2+8\,f-12\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-7\,f^2+8\,f-12\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-6\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+2 par $X-6$. On a en effet :

$$X^2-X+2=(X-6)\,Q+32,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+2\vec{x}=(f-6\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+32\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-7X^2+8X-12=(X-6)\,(X^2-X+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-6\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-7\,f^2+8\,f-12\mathrm{Id}_E=(f-6\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-6\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{32}f^2(\vec{x})-\frac{1}{32}f(\vec{x})+\frac{1}{16}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{32}\,(f-6\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-6\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-6\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{32}f^2(\vec{x})-\frac{1}{32}f(\vec{x})+\frac{1}{16}\vec{x}\right)\\ &= (f-6\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{32}\,f^2-\frac{1}{32}\,f+\frac{1}{16}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{32}\Big(f^3-7\,f^2+8\,f-12\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{32}\Big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)\,((f-6\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{32}\Big(f^3-7\,f^2+8\,f-12\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-6\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-6\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $32\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-6\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=6\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})-f(\vec{z})+2\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=f(\vec{z})-2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 6\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 36\vec{y} & - & 2\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3\leftarrow L_3-L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 6\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x})-f(\vec{x}) & = & 30\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+2L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-30L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{32}f^2(\vec{x})-\frac{1}{32}f(\vec{x})+\frac{1}{16}\vec{x},\quad \text{et :}\quad \vec{z}=-\frac{1}{32}f^2(\vec{x})+\frac{1}{32}f(\vec{x})+\frac{15}{16}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{32}f^2(\vec{x})-\frac{1}{32}f(\vec{x})+\frac{1}{16}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{32}f^2(\vec{x})+\frac{1}{32}f(\vec{x})+\frac{15}{16}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-6\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-6\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-6\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{32}f^2(\vec{x})-\frac{1}{32}f(\vec{x})+\frac{1}{16}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{32}f^3(\vec{x})-\frac{1}{32}f^2(\vec{x})+\frac{1}{16}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{3}{16}f^2(\vec{x})-\frac{3}{16}f(\vec{x})+\frac{3}{8}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{32}\left(f^3(\vec{x})-7f^2(\vec{x})+8f(\vec{x})-12\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 7\,f^2 + 8\,f = 12\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{32}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{16}f^3(\vec{x}) + \frac{27}{32}f^2(\vec{x}) - \frac{7}{8}f(\vec{x}) + \frac{15}{8}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 7\,f^2 - 8\,f + 12\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 7\,f^3 - 8\,f^2 + 12\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{32}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{16}f^3(\vec{x}) + \frac{27}{32}f^2(\vec{x}) - \frac{7}{8}f(\vec{x}) + \frac{15}{8}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{32}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{16}f^3(\vec{x}) + \frac{27}{32}f^2(\vec{x}) - \frac{7}{8}f(\vec{x}) + \frac{15}{8}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{32}X^4 + \frac{1}{16}X^3 + \frac{27}{32}X^2 - \frac{7}{8}X + \frac{15}{8}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 7X^2 + 8X - 12$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{32}X^4 + \frac{1}{16}X^3 + \frac{27}{32}X^2 - \frac{7}{8}X + \frac{15}{8} = \left(X^3 - 7X^2 + 8X - 12\right) \cdot \left(-\frac{1}{32}X - \frac{5}{32}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{32}\,f^4 + \frac{1}{16}\,f^3 + \frac{27}{32}\,f^2 - \frac{7}{8}\,f + \frac{15}{8}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 7\,f^2 + 8\,f - 12\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{32}\,f - \frac{5}{32}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 7X^2 + 8X - 12$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{6\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 6, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-6$ pour écrire P comme produit de $X-6$ et de X^2-X+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = \vec{0} \end{cases}.$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + 2\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{7}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 6\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 6 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 6\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 6), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 2\vec{x} = \vec{y} - 2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 79. ← page 28

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + X + 1 = (X - 1)\,Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3} f^2 + \frac{1}{3} f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vec{x} & = & \vec{y} \quad +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) \quad +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) \quad +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{1}{3}X + \frac{2}{3} = \left(X^3 - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}f^4 - \frac{2}{3}f^3 + \frac{1}{3}f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}f - \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2+X+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+f+\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2+ab-b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2-ab+b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x} = -\vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 80. ← page 28

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante

en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2-X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3-2\,f^2+2\,f-\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-2\,f^2+2\,f-\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-2\,f^2+2\,f-\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+1 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2-X+1 = (X-1)\,Q+1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-2X^2+2X-1 = (X-1)\,(X^2-X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-2\,f^2+2\,f-\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\Big(f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x}\Big) \\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \Big(f^3-2\,f^2+2\,f-\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\,((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \Big(f^3-2\,f^2+2\,f-\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})-f(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=f(\vec{z})-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3\leftarrow L_3-L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x})-f(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z}=-f^2(\vec{x})+f(\vec{x}),\qquad\text{et :}\quad \vec{y}=\vec{x}-\vec{z}=f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\vec{x}$, et : $\vec{z}=-f^2(\vec{x})+f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f-\mathrm{Id}_E)\Big(f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\vec{x}\Big)\\&=\Big(f^3(\vec{x})-f^2(\vec{x})+f(\vec{x})\Big)-\Big(f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\vec{x}\Big)\\&=f^3(\vec{x})-2f^2(\vec{x})+2f(\vec{x})-\vec{x}\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-2f^2+2f-\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z})=-f^4(\vec{x})+2f^3(\vec{x})-2f^2(\vec{x})+f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - 2\,f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4\,(\vec{x}) + 2f^3\,(\vec{x}) - 2f^2\,(\vec{x}) + f\,(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 - X + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f\,(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}\,b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f\,(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 81. ← page 29

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-2$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-2$. On a en effet :
$$X^2+1 = (X-2)\,Q+5,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2\,(\vec{x})+\vec{x} = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+5\vec{x}. \tag{†}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3-2X^2+X-2 = (X-2)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-2\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$
Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{5}\,(f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}\right)\\ &= (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{5}\,f^2+\frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\,((f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{2}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4\,(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2\,(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4\,(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2\,(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \Big(X^3 - 2X^2 + X - 2\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{5}X - \frac{2}{5}\Big)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\,f^4 + \frac{3}{5}\,f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ \Big(-\frac{1}{5}\,f - \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\Big) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 2$ pour écrire P comme produit de $X - 2$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

Comme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 2), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 82. ← page 29

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 - 2X + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \Big(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - 2X + 2$ par X. On a en effet :

$$X^2 - 2X + 2 = XQ + 2,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - 2f\,(\vec{x}) + 2\vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + 2X = X\,(X^2 - 2X + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = f \circ \Big(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ f. \tag{$\ddagger$}$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2} f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{2}f^2\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{x}\right) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(\frac{1}{2}\,f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \left(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right)(f \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}. \end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\left(\vec{z}\right) - 2f\left(\vec{z}\right) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\left(\vec{z}\right) = 2f\left(\vec{z}\right) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & 2\vec{z} & + & 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & & & & & f(\vec{z}) \\ f^2\left(\vec{x}\right) - 2f\left(\vec{x}\right) & = & & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2f^2 + 2f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + 2f^3(\vec{x}) - 3f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2f^2 - 2f$, on a aussi : $f^4 = 2f^3 - 2f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + 2f^3(\vec{x}) - 3f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 2X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - 2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +(a+2b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+2b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - 2ab - 2b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 2ab + 2b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$(a+b)^2 + 1b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - 2\vec{x} = 2\vec{y} - 2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 83. ← page 29

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 2 = (X - 1)\,Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X - 1)(X^2 + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll}
\vec{x} &=& \vec{y} & + & \vec{z} & \\
f(\vec{x}) &=& \vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} & - & 2\vec{z} &
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 2\,f = 2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 2\,f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 2X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 - X^2 + 2X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\,f^4 - \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\,f - \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + 2X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 2$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+2\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 84. ← page 30

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+1$. On a en effet :
$$X^2+2 = (X+1)\,Q+3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + 2X + 2 = (X+1)(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 2\,f^2 - 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 2X + 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 + X^2 + 2X + 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\,f^4 - \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\,f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + 2X + 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2+2, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 2\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 85. ← page 30

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+5 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$

admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $6 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+5\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+5\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+5\,f+5\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+5\,f+5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+5\,f+5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+5 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+5 = (X+1)\,Q+6,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+5\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+6\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+5X+5 = (X+1)\,(X^2+5)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+5\,f+5\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+5\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+5\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{6}f^2\,(\vec{x})+\frac{5}{6}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{6}\,(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{6}f^2\,(\vec{x})+\frac{5}{6}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{6}\,f^2+\frac{5}{6}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{6}\Big(f^3+f^2+5\,f+5\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+5\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{6}\Big(f^2+5\mathrm{Id}_E\Big)\,((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{6}\Big(f^3+f^2+5\,f+5\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+5\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $6\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+5\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-5\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & +\ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 5\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+5L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{6}f^2(\vec{x})+\frac{5}{6}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=-\frac{1}{6}f^2(\vec{x})+\frac{1}{6}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{6}f^2(\vec{x})+\frac{5}{6}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{6}f^2(\vec{x})+\frac{1}{6}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+5\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{6}f^2(\vec{x})+\frac{5}{6}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{6}f^3(\vec{x})+\frac{5}{6}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{6}f^2(\vec{x})-\frac{5}{6}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{6}\left(f^3(\vec{x})+f^2(\vec{x})+5f(\vec{x})+5\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f^2+5\,f=-5\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{6}f^4(\vec{x})-\frac{2}{3}f^2(\vec{x})+\frac{5}{6}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f^2-5\,f-5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^3-5\,f^2-5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{6}f^4(\vec{x})-\frac{2}{3}f^2(\vec{x})+\frac{5}{6}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{6}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{6}X^4 - \frac{2}{3}X^2 + \frac{5}{6}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 5X + 5$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{6}X^4 - \frac{2}{3}X^2 + \frac{5}{6} = \left(X^3 + X^2 + 5X + 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}X + \frac{1}{6}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}\,f^4 - \frac{2}{3}\,f^2 + \frac{5}{6}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 5\,f + 5\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{6}\,f + \frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + 5X + 5$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 + 5$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + 5\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -5\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -5b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 5\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 5\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre

de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -5\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 86. ← page 30

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X+1)\,Q + 2,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)\left(X^2+1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}\, f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{x}\right) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 1$ pour écrire P comme produit de $X + 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) = \vec{0} \end{cases}.$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant$

2. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 87. ← page 31

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
 Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3-\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

 Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
 Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+X+1 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+X+1 = (X-1)\,Q+3,$$

 avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{†}$$

 Remarquons également que l'on a : $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

 Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3}f^2 + \frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& \vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} &-& \vec{z} &-& f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& \vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) &=& 2\vec{y} &-& \vec{z} &&\end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{1}{3}X + \frac{2}{3} = \left(X^3 - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3} f^4 - \frac{2}{3} f^3 + \frac{1}{3} f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3} f - \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + X + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 + ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 - ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a - \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -f(\vec{x}) - \vec{x} = -\vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 88. ← page 31

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 - X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-2\,f^2+2\,f-\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-2\,f^2+2\,f-\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 1 = (X - 1)\, Q + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + 2X - 1 = (X - 1)\,(X^2 - X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\,\Big(f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x}\Big) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \Big(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\,((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \Big(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - \mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse

et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\Big(f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}\Big) \\ &= \Big(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\Big) - \Big(f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}\Big) \\ &= f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - \vec{x} \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) = -f^4(\vec{x}) + 2f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - 2\,f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4(\vec{x}) + 2f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$

tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-1$ pour écrire P comme produit de $X-1$ et de X^2-X+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +(a+b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - ab - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{1}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{y} - \vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 89. ← page 31

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0

pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 2\,f).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 2\,f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 2\,f) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2$ par X. On a en effet :

$$X^2 + 2 = XQ + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + 2\vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 2X = X\left(X^2 + 2\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 2\,f = f \circ \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ f. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2\left(\vec{x}\right) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2} f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{2} f^2\left(\vec{x}\right) + \vec{x}\right) \\ &= f \circ \left(\frac{1}{2}\,f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3 + 2\,f\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big)\left(f \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3 + 2\,f\Big)\left(Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce

vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rclr} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & 2\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = -2f$, on a aussi : $f^4 = -2f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or

d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 2X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0\}$

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 2\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ équivaut à : $\ker(f) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$ (car 0 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 90. ← page 32

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 5$ et $X^2 + 6$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 5$ admet 5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 5 donne : $31 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 5\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 6\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 5\,f^2 + 6\,f - 30\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-5\,f^2+6\,f-30\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-5\,f^2+6\,f-30\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 6$ par $X - 5$. On a en effet :
$$X^2 + 6 = (X - 5)\,Q + 31,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + 6\vec{x} = (f - 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 31\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 5X^2 + 6X - 30 = (X-5)\left(X^2+6\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 5\,f^2 + 6\,f - 30\mathrm{Id}_E = (f - 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 6\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 6\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 5\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{31} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{6}{31}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{31}\left(f - 5\mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(f - 5\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{y}\right) &= \left(f - 5\mathrm{Id}_E\right)\left(\frac{1}{31} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{6}{31}\vec{x}\right) \\
&= \left(f - 5\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(\frac{1}{31}\,f^2 + \frac{6}{31}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{31}\left(f^3 - 5\,f^2 + 6\,f - 30\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité ($*$) de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 6\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{31}\left(f^2 + 6\mathrm{Id}_E\right)\left(\left(f - 5\mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{31}\left(f^3 - 5\,f^2 + 6\,f - 30\mathrm{Id}_E\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 5\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $31\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 6\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -6\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) = f^2(\vec{y}) + f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) = 5\vec{y} + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) = 25\vec{y} - 6\vec{z} \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 25L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{31}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{31}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{31}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{31}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{31}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{31} f^3(\vec{x}) + \frac{6}{31} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{5}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{31}\left(f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 6f(\vec{x}) - 30\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 5\,f^2 + 6\,f - 30\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{31} f^4(\vec{x}) + \frac{19}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{150}{31}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 5\,f^2 - 6\,f + 30\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 5\,f^3 - 6\,f^2 + 30\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{31} f^4(\vec{x}) + \frac{19}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{150}{31}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{31} f^4(\vec{x}) + \frac{19}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{150}{31}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{31}X^4 + \frac{19}{31}X^2 + \frac{150}{31}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 5X^2 + 6X - 30$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{31}X^4 + \frac{19}{31}X^2 + \frac{150}{31} = \left(X^3 - 5X^2 + 6X - 30\right) \cdot \left(-\frac{1}{31}X - \frac{5}{31}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{31}\,f^4 + \frac{19}{31}\,f^2 + \frac{150}{31}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 5\,f^2 + 6\,f - 30\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{31}\,f - \frac{5}{31}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 5X^2 + 6X - 30$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{5\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 5, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-5$ pour écrire P comme produit de $X-5$ et de X^2+6, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+6\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -6\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -6b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-6\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+6\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq 5\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-5\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f-5\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f-5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f-5\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f-5\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-5\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 5 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-5\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-5\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f-5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 5\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 5), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -6\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 91. ← page 32

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-3X+4 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que

$X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $8 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-2\,f^2+f+4\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-2\,f^2+f+4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-2\,f^2+f+4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-3X+4 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2-3X+4 = (X+1)\,Q+8,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})-3f\,(\vec{x})+4\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+8\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-2X^2+X+4 = (X+1)\,(X^2-3X+4)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-2\,f^2+f+4\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{8}f^2\,(\vec{x})-\frac{3}{8}f\,(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{8}\,(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{8}f^2\,(\vec{x})-\frac{3}{8}f\,(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{8}\,f^2-\frac{3}{8}\,f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{8}\Big(f^3-2\,f^2+f+4\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{8}\Big(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E\Big)\left((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{8}\Big(f^3-2\,f^2+f+4\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-3\,f+4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+$

$\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-3f+4\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-3f+4\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $8\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-3f+4\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - 3f(\vec{z}) + 4\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = 3f(\vec{z}) - 4\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\,\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 4\vec{z} & + & 3f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\,\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 3f(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & 4\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{8}f^3(\vec{x}) - \frac{3}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{8}f(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{4}f^3(\vec{x}) - \frac{9}{8}f^2(\vec{x}) + 2\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - f - 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - f^2 - 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{4}f^3(\vec{x}) - \frac{9}{8}f^2(\vec{x}) + 2\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{4}f^3(\vec{x}) - \frac{9}{8}f^2(\vec{x}) + 2\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{8}X^4 + \frac{3}{4}X^3 - \frac{9}{8}X^2 + 2$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X + 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{8}X^4 + \frac{3}{4}X^3 - \frac{9}{8}X^2 + 2 = \left(X^3 - 2X^2 + X + 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}\,f^4 + \frac{3}{4}\,f^3 - \frac{9}{8}\,f^2 + 2\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 2\,f^2 + f + 4\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{8}\,f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X + 4$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2-3X+4, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 3f(\vec{x}) - 4\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 3\,f + 4\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{llcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -4b\vec{x} & +(a+3b)\,f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - (a+3b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2 - 3\,ab - 4\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 3\,ab + 4\,b^2 = 0$. Ce qu'on peut réécrire :

$$\left(a + \frac{3}{2}\,b\right)^2 + \frac{7}{4}b^2 = 0$$

(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a + \frac{3}{2}b = b = 0$. Il en découle aisément $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = 3f(\vec{x}) - 4\vec{x} = 3\vec{y} - 4\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 3f + 4\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 92. ← page 32

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 7$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 7$ admet -7 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -7 donne : $50 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 7\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 7f^2 + f + 7\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 7f^2 + f + 7\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 7f^2 + f + 7\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 7\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 7$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 7)\,Q + 50,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + 7\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 50\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 7X^2 + X + 7 = (X + 7)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 7\,f^2 + f + 7\mathrm{Id}_E = (f + 7\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + 7\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{50} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{50}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{50}(f + 7\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 7\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 7\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{50} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{50}\vec{x}\right) \\
&= (f + 7\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{50}\, f^2 + \frac{1}{50}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{50}\left(f^3 + 7\,f^2 + f + 7\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{50}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + 7\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{50}\left(f^3 + 7\,f^2 + f + 7\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 7\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $50\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -7\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & -\,7\vec{y} + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 49\vec{y} - \vec{z} \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 49L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{50}f^2(\vec{x})+\frac{1}{50}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z}=-\frac{1}{50}f^2(\vec{x})+\frac{49}{50}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{50}f^2(\vec{x})+\frac{1}{50}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{50}f^2(\vec{x})+\frac{49}{50}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+7\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+7\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+7\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+7\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+7\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{50}f^2(\vec{x})+\frac{1}{50}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{50}f^3(\vec{x})+\frac{1}{50}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{7}{50}f^2(\vec{x})-\frac{7}{50}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{50}\left(f^3(\vec{x})+7f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+7\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+7\,f^2+f+7\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+7\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{50}f^4(\vec{x})+\frac{24}{25}f^2(\vec{x})+\frac{49}{50}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-7\,f^2-f-7\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-7\,f^3-f^2-7\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{50}f^4(\vec{x})+\frac{24}{25}f^2(\vec{x})+\frac{49}{50}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+7\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{50}f^4(\vec{x})+\frac{24}{25}f^2(\vec{x})+\frac{49}{50}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{50}X^4+\frac{24}{25}X^2+\frac{49}{50}$ par le polynôme annulateur X^3+7X^2+X+7, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{50}X^4+\frac{24}{25}X^2+\frac{49}{50}=\left(X^3+7X^2+X+7\right)\cdot\left(-\frac{1}{50}X+\frac{7}{50}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{50}\,f^4+\frac{24}{25}\,f^2+\frac{49}{50}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+7\,f^2+f+7\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{50}\,f+\frac{7}{50}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 7X^2 + X + 7$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-7\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -7, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+7$ pour écrire P comme produit de $X+7$ et de X^2+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq -7\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 7\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 7\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 7\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 7\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 7\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -7 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 7\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+7\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -7\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 7\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -7), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 93. ← page 33

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que X et $X^2 - 2X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que X admet 0 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 0 donne : $1 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f) \circ \big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + f). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + f) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - 2X + 1$ par X. On a en effet :

$$X^2 - 2X + 1 = XQ + 1,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x} = f \circ Q(f)(\vec{x}) + \vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + X = X\,(X^2 - 2X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + f = f \circ \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big) \circ f. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = f \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\Big(f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}\Big) \\ &= f \circ \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \Big(f^3 - 2\,f^2 + f\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \Big(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)(f \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \Big(f^3 - 2\,f^2 + f\Big)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}. \end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $f(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{0}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - 2f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = 2f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & + & 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & & & & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) & = & & - & \vec{z} & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \qquad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) &= f\left(f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + f = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -f^4(\vec{x}) + 4f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - f$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - f^2$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-f^4(\vec{x}) + 4f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

2. D'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{0, 1\}$

3. Comme 0 et 1 sont valeurs propres, on a :

$$\dim\left(\ker(f)\right) \geqslant 1 \quad \text{et :} \quad \dim\left(\ker\left(f-\mathrm{Id}_E\right)\right) \geqslant 1.$$

De plus, comme les sous-espaces propres sont en somme directe :

$$\dim\left(\ker(f)\right) + \dim\left(\ker\left(f-\mathrm{Id}_E\right)\right) \leqslant \dim(E) = 3.$$

On déduit de ces trois inégalités que si l'un des deux sous-espaces propres est de dimension supérieure ou égale à 2, alors la somme de ces dimensions est à la fois supérieure et inférieure à 3, donc on doit avoir :

$$\dim\left(\ker(f)\right) + \dim\left(\ker\left(f-\mathrm{Id}_E\right)\right) = 3.$$

Par le critère de diagonalisation, f serait diagonalisable : faux par hypothèse. Ainsi nécessairement : $\dim\left(\ker(f)\right) = \dim\left(\ker\left(f-\mathrm{Id}_E\right)\right) = 1$. On obtient la dernière dimension demandée grâce à la somme directe $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, qui implique :

$$\dim(\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \dim\left(\ker(f)\right) = 3 - 1 = 2.$$

D'où le résultat.

4. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ est stable par $f - \mathrm{Id}_E$ (du fait que $f - \mathrm{Id}_E$ et $f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E$ commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = \left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{y}, \vec{x})$ est bien une famille de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Comme elle est de cardinal $2 = \dim\left(\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)\right)$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour en déduire qu'elle est une base de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Montrons-le : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{y} + b\vec{x} = \vec{0}$. On a :

$$\left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{et :} \quad \left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{y}) = \left(f - \mathrm{Id}_E\right)\left(\left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\right) = \vec{0}$$

car $\vec{x} \in \ker\left(\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^2\right)$. Par conséquent, appliquer $f - \mathrm{Id}_E$ à la relation de dépendance linéaire ci-avant donne : $b\vec{y} = \vec{0}$. Comme $\vec{y} = \left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \neq \vec{0}$ par hypothèse sur $\vec{x}$ (en effet $\vec{x} \notin \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$), ceci impose : $b = 0$. La relation de dépendance linéaire devient alors $a\vec{y} = \vec{0}$, et de là on conclut que $a = 0$. Ainsi $a = b = 0$ et la famille est libre.

5. On a vu que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ sont respectivement de dimension 1 et 2. Soient $(\vec{e})$ une base de $\ker(f)$ et $(\vec{y}, \vec{x})$ la base de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ construite dans la question précédente. Comme $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{y}, \vec{x})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{0}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 0), $f(\vec{y}) = \vec{y}$ (en effet : $\left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{y}) = \left(f - \mathrm{Id}_E\right)^2(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \ker\left(\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^2\right)$) et enfin on a par définition $\left(f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, donc : $f(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{x}$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 94. ← page 33

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux

polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X-1)\,Q+2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+\vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+X-1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \quad f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \Big(X^3 - X^2 + X - 1\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\Big)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\Big) \circ \Big(-\frac{1}{2} f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\Big) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 95. ← page 33

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 3$ et $X^2 + X + 5$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $17 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 15\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 15\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 15\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 5$ par $X - 3$. On a en effet :

$$X^2 + X + 5 = (X - 3)\,Q + 17,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + f\,(\vec{x}) + 5\vec{x} = (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 17\vec{x}. \tag{†}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + 2X - 15 = (X - 3)\,(X^2 + X + 5)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 15\mathrm{Id}_E = (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - 3\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{17} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{17} f\,(\vec{x}) + \frac{5}{17}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{17}\,(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{17}f(\vec{x}) + \frac{5}{17}\vec{x}\right)\\ &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{17}f^2 + \frac{1}{17}f + \frac{5}{17}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{17}\left(f^3 - 2f^2 + 2f - 15\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{17}\left(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E\right)((f - 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{17}\left(f^3 - 2f^2 + 2f - 15\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $17\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 5\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 5\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \; f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & 5\vec{z} & - \; f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \; f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 12\vec{y} & - & 5\vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 12L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{17}f(\vec{x}) + \frac{5}{17}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{17}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{17}f(\vec{x}) + \frac{12}{17}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{17}f(\vec{x}) + \frac{5}{17}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{17}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{17}f(\vec{x}) + \frac{12}{17}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{17}f(\vec{x}) + \frac{5}{17}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{17}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{17}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{17}f(\vec{x}) + \frac{15}{17}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{17}\left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - 15\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + 2\,f = 15\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{17}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{17}f^3(\vec{x}) + \frac{6}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{7}{17}f(\vec{x}) + \frac{60}{17}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - 2\,f + 15\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - 2\,f^2 + 15\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{17}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{17}f^3(\vec{x}) + \frac{6}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{7}{17}f(\vec{x}) + \frac{60}{17}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 5\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{17}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{17}f^3(\vec{x}) + \frac{6}{17}f^2(\vec{x}) + \frac{7}{17}f(\vec{x}) + \frac{60}{17}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{17}X^4 - \frac{2}{17}X^3 + \frac{6}{17}X^2 + \frac{7}{17}X + \frac{60}{17}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + 2X - 15$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{17}X^4 - \frac{2}{17}X^3 + \frac{6}{17}X^2 + \frac{7}{17}X + \frac{60}{17} = \left(X^3 - 2X^2 + 2X - 15\right) \cdot \left(-\frac{1}{17}X - \frac{4}{17}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{17}\,f^4 - \frac{2}{17}\,f^3 + \frac{6}{17}\,f^2 + \frac{7}{17}\,f + \frac{60}{17}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 15\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{17}\,f - \frac{4}{17}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 2X - 15$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace

vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{3\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 3, puis vous faites la division euclidienne de P par $X-3$ pour écrire P comme produit de $X-3$ et de X^2+X+5, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+f+5\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y}=f(\vec{x}) \in \ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y}=\vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y})=\vec{0}$. Mais $f(\vec{x})=\vec{y}$, et $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-f(\vec{x})-5\vec{x}$ (car $\vec{x}\in\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = \vec{0} \\ -5b\vec{x} & +(a-b)\,f(\vec{x}) & = \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2-(a-b)\,L_1$ donne alors : $(-a^2+ab-5\,b^2)\,\vec{x}=\vec{0}$. Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2-ab+5\,b^2=0$. Ce qu'on peut réécrire :
$$\left(a-\frac{1}{2}\,b\right)^2+\frac{19}{4}b^2=0$$
(l'idée est de se ramener à une somme de réels au carré, qui sont positifs ; on voit ce genre de raisonnement lors de l'étude des produits scalaires). Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a-\frac{1}{2}\,b=b=0$. Il en découle aisément $a=b=0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f\neq 3\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\neq E$, donc : $\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))<\dim(E)=3$. Comme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E))=3-\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))>0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$. Ainsi on a : $3=\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))+\dim(\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))\geqslant 1$ (car 3 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E))\geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-3\mathrm{Id}_E))=1$ et $\dim(\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E))=2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$. Comme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B}=(\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e})=3\vec{e}$ (en effet $\vec{e}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 3), $f(\vec{x})=\vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y})=f^2(\vec{x})=-f(\vec{x})-5\vec{x}=-\vec{y}-5\vec{x}$ car $\vec{x}\in\ker(f^2+f+5\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 96. ← page 34

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$

admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)\left(X^2 + 1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}\, f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}\vec{x}&=&\vec{y}&+\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&f(\vec{y})&+f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&f^2(\vec{y})&+f^2(\vec{z})\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\vec{x}&=&\vec{y}&+&\vec{z}&&\\ f(\vec{x})&=&-\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&\vec{y}&-&\vec{z}&&\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},\qquad\text{et :}\quad \vec{z}=-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x})+\frac{1}{2}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})-\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x})+f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f^2-f-\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^3-f^2-f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur X^3+X^2+X+1, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \Big(X^3+X^2+X+1\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\Big)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\,f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\Big)\circ\Big(-\frac{1}{2}\,f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\Big)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3+X^2+X+1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X+1$ pour écrire P comme produit de $X+1$ et de X^2+1, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.
3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x},\vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2-b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2+b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc bien libre.
4. L'hypothèse $f \neq -\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f+\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre

de f associé à -1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 97. ← page 34

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\, Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}, \end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2} f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc :

$\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x},\vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e},\vec{x},\vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 98. ← page 34

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+3718$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+3718$ admet -3718 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -3718 donne : $13823526 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+3718\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+3718\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+3718\,f^2+2\,f+7436\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+3718\,f^2+2\,f+7436\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+3718\,f^2+2\,f+7436\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+3718\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+3718\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+3718$. On a en effet :

$$X^2+2 = (X+3718)\,Q + 13823526,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f+3718\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 13823526\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3+3718X^2+2X+7436 = (X+3718)(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+3718\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+3718\,f^2+2\,f+7436\mathrm{Id}_E = (f+3718\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+3718\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+3718\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{13823526}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6911763}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{13823526}(f+3718\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 3718\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 3718\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{13823526} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6911763}\vec{x}\right)\\ &= (f + 3718\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{13823526} f^2 + \frac{1}{6911763}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{13823526}\left(f^3 + 3718 f^2 + 2 f + 7436\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{13823526}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)\left(\left((f + 3718\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}\right)\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{13823526}\left(f^3 + 3718 f^2 + 2 f + 7436\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 3718\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $13823526\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -3718\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & 3718\vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & 13823524\vec{y} & - & 2\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 13823524L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{13823526} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6911763}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{13823526} f^2(\vec{x}) + \frac{6911762}{6911763}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{13823526} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6911763}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{13823526} f^2(\vec{x}) + \frac{6911762}{6911763}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 3718\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 3718\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 3718\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{13823526} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6911763}\vec{x}\right)\\
&= \left(\frac{1}{13823526} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{6911763} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1859}{6911763} f^2(\vec{x}) - \frac{3718}{6911763}\vec{x}\right)\\
&= \frac{1}{13823526}\left(f^3(\vec{x}) + 3718 f^2(\vec{x}) + 2 f(\vec{x}) + 7436\vec{x}\right)\\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 3718\, f^2 + 2\, f + 7436\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{13823526} f^4(\vec{x}) + \frac{6911761}{6911763} f^2(\vec{x}) + \frac{13823524}{6911763}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -3718\, f^2 - 2\, f - 7436\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -3718\, f^3 - 2\, f^2 - 7436\, f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{13823526} f^4(\vec{x}) + \frac{6911761}{6911763} f^2(\vec{x}) + \frac{13823524}{6911763}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{13823526} f^4(\vec{x}) + \frac{6911761}{6911763} f^2(\vec{x}) + \frac{13823524}{6911763}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{13823526} X^4 + \frac{6911761}{6911763} X^2 + \frac{13823524}{6911763}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 3718X^2 + 2X + 7436$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{13823526} X^4 + \frac{6911761}{6911763} X^2 + \frac{13823524}{6911763} = \left(X^3 + 3718X^2 + 2X + 7436\right)\cdot\left(-\frac{1}{13823526} X + \frac{1859}{6911763}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{13823526}\, f^4 + \frac{6911761}{6911763}\, f^2 + \frac{13823524}{6911763}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 3718\, f^2 + 2\, f + 7436\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{13823526}\, f + \frac{1859}{6911763}\mathrm{Id}_E\right)\\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 + 3718X^2 + 2X + 7436$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{-3718\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » -3718, puis vous faites la division euclidienne de P par $X + 3718$ pour écrire P comme produit de $X + 3718$ et de $X^2 + 2$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2+2\mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\begin{cases} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -2b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}.$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - 2\,b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + 2\,b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq -3718\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car -3718 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = -3718\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f + 3718\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à -3718), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -2\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3718 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 99. ← page 35

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :
$$X^2 + 1 = (X - 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité ($*$) de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2} f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - X^2 + X - 1$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{1\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 1, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 1$ pour écrire P comme produit de $X - 1$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x}+b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x})+bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :
$$\left\{\begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}\right. .$$
L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq \mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 1 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = \vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur propre de f associé à 1), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 100. ← page 35

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 2$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 2$

admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-2$. On a en effet :

$$X^2+1=(X-2)\,Q+5,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+\vec{x}=(f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+5\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-2X^2+X-2=(X-2)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E=(f-2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-2\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{5}(f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}\right)\\ &= (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{5}\,f^2+\frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\big((f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\big)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3-2\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E\Big)\big(Q(f)(\vec{x})\big)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=2\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x}&=&\vec{y}&+\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&f(\vec{y})&+f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&f^2(\vec{y})&+f^2(\vec{z})\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccccccc}\vec{x}&=&\vec{y}&+&\vec{z}&&\\ f(\vec{x})&=&2\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&4\vec{y}&-&\vec{z}&&\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=-\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f-2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{5}f^3(\vec{x})+\frac{1}{5}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{2}{5}f^2(\vec{x})+\frac{2}{5}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x})-2f^2(\vec{x})+f(\vec{x})-2\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-2f^2+f=2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{5}f^4(\vec{x})+\frac{3}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3=2f^2-f+2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=2f^3-f^2+2f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x})+\frac{3}{5}f^2(\vec{x})+\frac{4}{5}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \left(X^3 - 2X^2 + X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X - \frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}f^4 + \frac{3}{5}f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}f - \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. L'application $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et on a : $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi f admet (au moins) une valeur propre. Il reste à l'expliciter. Or d'après $(*)$, le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de f. On sait donc que les valeurs propres de f sont parmi les racines (réelles, car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de P. Nous vous laissons vérifier que l'ensemble des racines réelles de P est $\{2\}$ (si besoin, vous commencez par trouver à tâtons la « racine évidente » 2, puis vous faites la division euclidienne de P par $X - 2$ pour écrire P comme produit de $X - 2$ et de $X^2 + 1$, dont vous savez classiquement trouver les racines). D'où le résultat.

3. Tout d'abord, on a $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et comme $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f (du fait que $f^2 + \mathrm{Id}_E$ et f commutent en tant que polynômes en f), on a aussi $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $(\vec{x}, \vec{y})$ est bien une famille de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrons qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. En prenant l'image par f dans cette égalité, on obtient : $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = \vec{0}$. Mais $f(\vec{x}) = \vec{y}$, et $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ (car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$), donc cette relation et celle de départ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a\vec{x} & +bf(\vec{x}) & = & \vec{0} \\ -b\vec{x} & +af(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

L'opération $L_2 \leftarrow bL_2 - aL_1$ donne alors : $(-a^2 - b^2)\,\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, cette égalité implique : $a^2 + b^2 = 0$. Or une somme de réels *positifs* est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $a = b = 0$. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc bien libre.

4. L'hypothèse $f \neq 2\mathrm{Id}_E$ équivaut à : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \neq E$, donc : $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) < \dim(E) = 3$. Comme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, on en déduit : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 3 - \dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) > 0$, donc il existe bien au moins un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Alors, la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite dans la question précédente est libre dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et la dimension est supérieure au cardinal de toute famille libre, donc : $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$. Ainsi on a : $3 = \dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E))$, avec $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ (car 2 est valeur propre de f) et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$: ce n'est possible que si $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)) = 1$ et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ (et alors la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ construite ci-dessus est même une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$). Soit $(\vec{e})$ une base de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Comme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, la concaténation $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{x}, \vec{y})$ de ces deux familles forme une base de E. On a $f(\vec{e}) = 2\vec{e}$ (en effet $\vec{e} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ donc c'est un vecteur

propre de f associé à 2), $f(\vec{x}) = \vec{y}$ par définition de $\vec{y}$, et enfin on a $f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = -\vec{x}$ car $\vec{x} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$