Calculer la partie réelle ou imaginaire, le module, un argument d'un nombre complexe

💡 L'objectif des exercices est clair. En analysant le corrigé, on se demandera à quelle occasion je préfère passer par la forme algébrique, ou par la forme exponentielle : quand cette dernière est-elle plus pertinente ? Cela dépend aussi bien de la forme du nombre complexe que des informations que l'on cherche à obtenir.

Exercice 1. Calculer un argument de : → page 11

$$\frac{\sqrt{3}+i}{-1-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 2. Calculer la partie réelle de : → page 11

$$\frac{5-3i}{-1+i}.$$

Exercice 3. Calculer le module et la partie imaginaire de : → page 11

$$\frac{-5+9i\sqrt{3}}{4+3i}.$$

Exercice 4. Calculer le module et un argument de : → page 11

$$\frac{\sqrt{3}+i}{5i}.$$

Exercice 5. Calculer la partie réelle de : → page 11

$$\frac{4i}{\sqrt{3}-3i}.$$

Exercice 6. Calculer le module, la partie imaginaire et un argument de : → page 12

$$\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 7. Calculer un argument et la partie réelle de : → page 12

$$\frac{-i}{-\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 8. Calculer le module, la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 12

$$\frac{-\sqrt{3}-i}{13+i}.$$

Exercice 9. Calculer le module de : → page 12

$$\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+2i}.$$

Exercice 10. Calculer le module et un argument de : → page 12

$$\frac{1}{\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 11. Calculer le module de : → page 13

$$\frac{-1+4i}{1+9i\sqrt{3}}.$$

Exercice 12. Calculer le module, la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 13

$$\frac{-1}{-1+i}.$$

Exercice 13. Calculer le module, la partie imaginaire et un argument de : → page 13

$$\frac{10\sqrt{2}+10i\sqrt{2}}{-2+2i\sqrt{3}}.$$

Exercice 14. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 14

$$\frac{-1+i}{10-2i}.$$

Exercice 15. Calculer le module et un argument de : → page 14

$$\frac{-2}{3\sqrt{3}-3i}.$$

Exercice 16. Calculer un argument de : → page 14

$$\frac{2}{\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 17. Calculer le module, la partie imaginaire et un argument de : → page 14

$$\frac{2i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}.$$

Exercice 18. Calculer le module et la partie réelle de : → page 14

$$\frac{4+6i}{3\sqrt{3}+9i}.$$

Exercice 19. Calculer un argument et la partie réelle de : → page 15

$$\frac{5\sqrt{3}+5i}{i}.$$

Exercice 20. Calculer la partie imaginaire de : → page 15

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-2i}.$$

Exercice 21. Calculer la partie imaginaire de : → page 15

$$\frac{i}{-1+8i\sqrt{3}}.$$

Exercice 22. Calculer le module et la partie réelle de : → page 15

$$\frac{-2\sqrt{3}+i}{-i}.$$

Exercice 23. Calculer le module de : → page 16

$$\frac{3-8i\sqrt{3}}{-1+2i}.$$

Exercice 24. Calculer la partie réelle de : → page 16

$$\frac{-3-i}{3i}.$$

Exercice 25. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 16

$$\frac{-2+i}{2-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 26. Calculer la partie imaginaire de : → page 16

$$\frac{2i}{9+i}.$$

Exercice 27. Calculer le module, un argument et la partie réelle de : → page 16

$$\frac{\sqrt{3}+i}{-2\sqrt{3}+2i}.$$

Exercice 28. Calculer le module de : → page 17

$$\frac{1+2i}{1-7i}.$$

Exercice 29. Calculer la partie réelle de : → page 17

$$\frac{-1+3i}{-13-6i\sqrt{3}}.$$

Exercice 30. Calculer le module, un argument et la partie réelle de : → page 17

$$\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}.$$

Exercice 31. Calculer la partie réelle de : → page 17

$$\frac{-2+i}{-8-i}.$$

Exercice 32. Calculer le module, la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 18

$$\frac{\sqrt{3}-i}{302-302i\sqrt{3}}.$$

Exercice 33. Calculer la partie imaginaire et un argument de : → page 18

$$\frac{2\sqrt{3}+2i}{i}.$$

Exercice 34. Calculer le module de : → page 18

$$\frac{7\sqrt{3}+96i}{1-12i}.$$

Exercice 35. Calculer le module, la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 18

$$\frac{2\sqrt{3}+2i}{3+3i\sqrt{3}}.$$

Exercice 36. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 18

$$\frac{1+i}{5\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 37. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 19

$$\frac{-1}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}.$$

Exercice 38. Calculer le module et la partie réelle de : → page 19

$$\frac{-3-5i}{-10\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 39. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 19

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}.$$

Exercice 40. Calculer le module, un argument et la partie réelle de : → page 20

$$\frac{-1}{-2\sqrt{3}+2i}.$$

Exercice 41. Calculer le module et la partie réelle de : → page 20

$$\frac{1+i}{1+5i}.$$

Exercice 42. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 20

$$\frac{2}{-6\sqrt{3}-6i}.$$

Exercice 43. Calculer la partie réelle de : → page 20

$$\frac{11i}{6+i\sqrt{3}}.$$

Exercice 44. Calculer le module, la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 21

$$\frac{1+4i}{1+2i}.$$

Exercice 45. Calculer un argument de : → page 21

$$\frac{26\sqrt{3}+26i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}.$$

Exercice 46. Calculer le module de : → page 21

$$\frac{-1+3i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 47. Calculer le module, un argument et la partie réelle de : → page 21

$$\frac{i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}.$$

Exercice 48. Calculer le module et la partie imaginaire de : → page 21

$$\frac{-1-i}{1-i}.$$

Exercice 49. Calculer la partie imaginaire de : → page 22

$$\frac{2-3i\sqrt{3}}{6-4i}.$$

Exercice 50. Calculer le module et la partie imaginaire de : → page 22

$$\frac{-15i\sqrt{3}}{2-i}.$$

Exercice 51. Calculer le module de : → page 22

$$\frac{-11+9i\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 52. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 22

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 53. Calculer la partie imaginaire de : → page 23

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}+5i}.$$

Exercice 54. Calculer un argument et la partie réelle de : → page 23

$$\frac{1}{-2-2i\sqrt{3}}.$$

Exercice 55. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 23

$$\frac{4-8i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}.$$

Exercice 56. Calculer le module de : → page 23

$$\frac{11-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 57. Calculer le module et la partie réelle de : → page 24

$$\frac{1}{1-7i\sqrt{3}}.$$

Exercice 58. Calculer le module et la partie imaginaire de : → page 24

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{3+2i}.$$

Exercice 59. Calculer le module et un argument de : → page 24

$$\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 60. Calculer le module, la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 24

$$\frac{-3+i}{-26-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 61. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 25

$$\frac{9i}{-22\sqrt{3}-22i}.$$

Exercice 62. Calculer la partie réelle de : → page 25

$$\frac{-1}{-\sqrt{3}+2i}.$$

Exercice 63. Calculer le module et un argument de : → page 25

$$\frac{-24\sqrt{3}+24i}{-4-4i\sqrt{3}}.$$

Exercice 64. Calculer le module, la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 25

$$\frac{-12i}{-7+2i\sqrt{3}}.$$

Exercice 65. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 26

$$\frac{1}{5+5i\sqrt{3}}.$$

Exercice 66. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 26

$$\frac{-1+2i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 67. Calculer le module et un argument de : → page 26

$$\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{i}.$$

Exercice 68. Calculer le module et la partie imaginaire de : → page 26

$$\frac{-24i}{1-i}.$$

Exercice 69. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 26

$$\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}}.$$

Exercice 70. Calculer le module, la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 27

$$\frac{-1-3i}{1-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 71. Calculer le module et un argument de : → page 27

$$\frac{37\sqrt{2}+37i\sqrt{2}}{-2i}.$$

Exercice 72. Calculer le module et la partie réelle de : → page 27

$$\frac{-i}{-2\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 73. Calculer la partie imaginaire et un argument de : → page 27

$$\frac{-2}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}.$$

Exercice 74. Calculer un argument et la partie réelle de : → page 27

$$\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 75. Calculer le module, la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 28

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}.$$

Exercice 76. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 28

$$\frac{-2i}{-1+225i\sqrt{3}}.$$

Exercice 77. Calculer le module et la partie imaginaire de : → page 29

$$\frac{-3+4i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 78. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 29

$$\frac{-52\sqrt{2}+52i\sqrt{2}}{-1-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 79. Calculer la partie imaginaire et un argument de : → page 29

$$\frac{-6}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}.$$

Exercice 80. Calculer le module et la partie réelle de : → page 30

$$\frac{2+i\sqrt{3}}{1-19i}.$$

Exercice 81. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 30

$$\frac{-\sqrt{3}-3i}{1+5i}.$$

Exercice 82. Calculer le module, la partie imaginaire et un argument de : → page 30

$$\frac{\sqrt{3}-i}{i}.$$

Exercice 83. Calculer la partie imaginaire de : → page 30

$$\frac{-2\sqrt{3}+2i}{1-2i\sqrt{3}}.$$

Exercice 84. Calculer le module, la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 31

$$\frac{3}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}.$$

Exercice 85. Calculer le module, la partie imaginaire et un argument de : → page 31

$$\frac{1}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}.$$

Exercice 86. Calculer le module de : → page 31

$$\frac{-1 - i}{2 - 6i}.$$

Exercice 87. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 31

$$\frac{1 - 2i\sqrt{3}}{1 + 3i}.$$

Exercice 88. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 31

$$\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{-2\sqrt{3} + 2i}.$$

Exercice 89. Calculer la partie imaginaire, un argument et la partie réelle de : → page 32

$$\frac{\sqrt{3} - i}{i}.$$

Exercice 90. Calculer le module, la partie imaginaire et un argument de : → page 32

$$\frac{-4\sqrt{3} + 4i}{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}.$$

Exercice 91. Calculer le module, un argument et la partie réelle de : → page 33

$$\frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{-13 - 13i\sqrt{3}}.$$

Exercice 92. Calculer la partie imaginaire et la partie réelle de : → page 33

$$\frac{-4 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}.$$

Exercice 93. Calculer la partie imaginaire et un argument de : → page 33

$$\frac{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + 2i}.$$

Exercice 94. Calculer un argument et la partie réelle de : → page 33

$$\frac{\sqrt{3} - i}{i}.$$

Exercice 95. Calculer le module et un argument de : → page 34

$$\frac{-1}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}.$$

Exercice 96. Calculer le module, la partie imaginaire et un argument de : → page 34

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2}}.$$

Exercice 97. Calculer la partie imaginaire de : → page 34

$$\frac{2+i}{-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 98. Calculer un argument de : → page 34

$$\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}.$$

Exercice 99. Calculer le module de : → page 35

$$\frac{7-i}{-1+i}.$$

Exercice 100. Calculer le module, un argument et la partie réelle de : → page 35

$$\frac{6\sqrt{3}-6i}{\sqrt{3}+i}.$$

Corrigé 1. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{1}{6}i\pi}$, et : $-1-i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{2}{3}i\pi}$. Donc : ← page 1

$$\frac{\sqrt{3}+i}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{\frac{1}{6}i\pi}}{2e^{-\frac{2}{3}i\pi}} = 1e^{-\frac{7}{6}i\pi} = 1e^{\frac{5}{6}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-1-i\sqrt{3}}\right) \equiv \frac{5}{6}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 2. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$. Ici, cela donne : ← page 1

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{5-3i}{-1+i}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{5-3i}{-1+i} + \frac{3i+5}{-1-i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{(5-3i)(-1-i)+(3i+5)(-1+i)}{|-1+i|^2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{-16}{2}\\ &= -4,\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{5-3i}{-1+i}\right) = -4.$$

Corrigé 3. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $4+3i$. On obtient : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{-5+9i\sqrt{3}}{4+3i} &= \frac{(-5+9i\sqrt{3})(4-3i)}{|4+3i|^2}\\ &= \frac{(36i+27)\sqrt{3}+15i-20}{25}\\ &= \left(\frac{36}{25}i+\frac{27}{25}\right)\sqrt{3}+\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-5+9i\sqrt{3}}{4+3i}\right) = \frac{36}{25}\sqrt{3}+\frac{3}{5}, \qquad \left|\frac{-5+9i\sqrt{3}}{4+3i}\right| = \frac{2}{5}\sqrt{67}.$$

Corrigé 4. En utilisant le fait que $\dfrac{1}{i} = -i$, on a tout simplement : ← page 1

$$\frac{\sqrt{3}+i}{5i} = -\frac{1}{5}i\left(\sqrt{3}+i\right) = -\frac{1}{5}i\sqrt{3}+\frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{3}i\pi}$$

et on en déduit :

$$\left|\frac{\sqrt{3}+i}{5i}\right| = \frac{2}{5}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{5i}\right) \equiv -\frac{1}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 5. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $4i = 4e^{\frac{1}{2}i\pi}$, et : $\sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{3}i\pi}$. Donc : ← page 1

$$\frac{4i}{\sqrt{3}-3i} = \frac{4e^{\frac{1}{2}i\pi}}{2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{3}i\pi}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}e^{\frac{5}{6}i\pi} = \frac{1}{3}i\sqrt{3}-1.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{4i}{\sqrt{3}-3i}\right) = -1.$$

Corrigé 6. Remarquons que l'on a tout simplement : $-2\sqrt{3}-2i = -2i\left(1-i\sqrt{3}\right)$. On en déduit : ← page 1

$$\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i\sqrt{3}} = -2i.$$

On a donc immédiatement :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i\sqrt{3}}\right) = -2, \qquad \left|\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i\sqrt{3}}\right| = 2,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i\sqrt{3}}\right) \equiv -\frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 7. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-i = e^{-\frac{1}{2}i\pi}$, et : $-\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{5}{6}i\pi}$. Donc : ← page 1

$$\frac{-i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{e^{-\frac{1}{2}i\pi}}{2e^{\frac{5}{6}i\pi}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}i\pi} = \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i\pi} = \frac{1}{4}i\sqrt{3} - \frac{1}{4}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-i}{-\sqrt{3}+i}\right) = -\frac{1}{4}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{-i}{-\sqrt{3}+i}\right) \equiv \frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 8. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $13+i$. On obtient : ← page 1

$$\begin{aligned}\frac{-\sqrt{3}-i}{13+i} &= \frac{(-\sqrt{3}-i)(13-i)}{|13+i|^2}\\ &= \frac{(i-13)\sqrt{3}-13i-1}{170}\\ &= \left(\frac{1}{170}i - \frac{13}{170}\right)\sqrt{3} - \frac{13}{170}i - \frac{1}{170}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{13+i}\right) = -\frac{13}{170}\sqrt{3} - \frac{1}{170}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{13+i}\right) = \frac{1}{170}\sqrt{3} - \frac{13}{170}, \quad \left|\frac{-\sqrt{3}-i}{13+i}\right| = \sqrt{\frac{2}{85}}.$$

Corrigé 9. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 1

$$\left|\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+2i}\right| = \frac{\left|-1-i\sqrt{3}\right|}{|-1+2i|} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}},$$

et donc :

$$\left|\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+2i}\right| = 2\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Corrigé 10. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis ← page 1

sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{1}{6}i\,\pi}$. Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{2e^{\frac{1}{6}i\,\pi}} = \frac{1}{2}e^{\frac{11}{6}i\,\pi} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{6}i\,\pi}.$$

On en déduit :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{3}+i}\right| = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+i}\right) \equiv -\frac{1}{6}\,\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 11. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 2

$$\left|\frac{-1+4i}{1+9i\,\sqrt{3}}\right| = \frac{|-1+4i|}{\left|1+9i\,\sqrt{3}\right|} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{244}},$$

et donc :

$$\left|\frac{-1+4i}{1+9i\,\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{61}}.$$

Corrigé 12. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-1 = e^{i\,\pi}$, et : $-1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}$. Donc : ← page 2

$$\frac{-1}{-1+i} = \frac{e^{i\,\pi}}{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}i\,\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}i\,\pi} = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-1}{-1+i}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{-1}{-1+i}\right) = \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{-1}{-1+i}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Corrigé 13. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-2+2i\,\sqrt{3}$. On obtient : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{10\,\sqrt{2}+10i\,\sqrt{2}}{-2+2i\,\sqrt{3}} &= \frac{(10\,\sqrt{2}+10i\,\sqrt{2})(-2-2i\,\sqrt{3})}{\left|-2+2i\,\sqrt{3}\right|^2}\\ &= \frac{-\,(20i-20)\,\sqrt{3}\sqrt{2}-(20i+20)\,\sqrt{2}}{16}\\ &= -\left(\frac{5}{4}i-\frac{5}{4}\right)\,\sqrt{3}\sqrt{2}-\left(\frac{5}{4}i+\frac{5}{4}\right)\,\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $10\,\sqrt{2}+10i\,\sqrt{2} = 20e^{\frac{1}{4}i\,\pi}$, et : $-2+2i\,\sqrt{3} = 4e^{\frac{2}{3}i\,\pi}$. Donc :

$$\frac{10\,\sqrt{2}+10i\,\sqrt{2}}{-2+2i\,\sqrt{3}} = \frac{20e^{\frac{1}{4}i\,\pi}}{4e^{\frac{2}{3}i\,\pi}} = 5e^{-\frac{5}{12}i\,\pi}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{10\,\sqrt{2}+10i\,\sqrt{2}}{-2+2i\,\sqrt{3}}\right) = -\frac{5}{4}\,\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{5}{4}\,\sqrt{2}, \quad \left|\frac{10\,\sqrt{2}+10i\,\sqrt{2}}{-2+2i\,\sqrt{3}}\right| = 5,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{10\,\sqrt{2}+10i\,\sqrt{2}}{-2+2i\,\sqrt{3}}\right) \equiv -\frac{5}{12}\,\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 14. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $10-2i$. On obtient : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{-1+i}{10-2i} &= \frac{(-1+i)(10+2i)}{|10-2i|^2}\\ &= \frac{8i-12}{104}\\ &= \frac{1}{13}i-\frac{3}{26}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-1+i}{10-2i}\right) = -\frac{3}{26},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{-1+i}{10-2i}\right) = \frac{1}{13}.$$

Corrigé 15. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-2 = 2e^{i\pi}$, et : $3\sqrt{3}-3i = 6e^{-\frac{1}{6}i\pi}$. Donc : ← page 2

$$\frac{-2}{3\sqrt{3}-3i} = \frac{2e^{i\pi}}{6e^{-\frac{1}{6}i\pi}} = \frac{1}{3}e^{\frac{7}{6}i\pi} = \frac{1}{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\left|\frac{-2}{3\sqrt{3}-3i}\right| = \frac{1}{3},\quad \operatorname{Arg}\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}-3i}\right) \equiv -\frac{5}{6}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 16. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{1}{6}i\pi}$. Donc : ← page 2

$$\frac{2}{\sqrt{3}+i} = \frac{2}{2e^{\frac{1}{6}i\pi}} = 1e^{\frac{11}{6}i\pi} = 1e^{-\frac{1}{6}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right) \equiv -\frac{1}{6}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 17. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $2i = 2e^{\frac{1}{2}i\pi}$, et : $-\sqrt{2}-i\sqrt{2} = 2e^{-\frac{3}{4}i\pi}$. Donc : ← page 2

$$\frac{2i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{2e^{\frac{1}{2}i\pi}}{2e^{-\frac{3}{4}i\pi}} = 1e^{\frac{5}{4}i\pi} = 1e^{-\frac{3}{4}i\pi} = -\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \left|\frac{2i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right| = 1,$$
$$\operatorname{Arg}\left(\frac{2i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right) \equiv -\frac{3}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 18. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $3\sqrt{3}+9i$. On obtient : ← page 2

$$\begin{aligned}\frac{4+6i}{3\sqrt{3}+9i} &= \frac{(4+6i)(3\sqrt{3}-9i)}{\left|3\sqrt{3}+9i\right|^2}\\ &= \frac{(18i+12)\sqrt{3}-36i+54}{108}\\ &= \left(\frac{1}{6}i+\frac{1}{9}\right)\sqrt{3}-\frac{1}{3}i+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{4+6i}{3\sqrt{3}+9i}\right)=\frac{1}{9}\sqrt{3}+\frac{1}{2},\qquad \left|\frac{4+6i}{3\sqrt{3}+9i}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Corrigé 19. En utilisant le fait que $\frac{1}{i}=-i$, on a tout simplement : ← page 2

$$\frac{5\sqrt{3}+5i}{i}=-i\left(5\sqrt{3}+5i\right)=-5i\sqrt{3}+5=10\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)=10e^{-\frac{1}{3}i\pi}$$

et on en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{5\sqrt{3}+5i}{i}\right)=5,\quad \operatorname{Arg}\left(\frac{5\sqrt{3}+5i}{i}\right)\equiv-\frac{1}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 20. On a : $\forall z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$. Ici, cela donne : ← page 2

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-2i}\right)&=\frac{1}{2i}\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-2i}-\frac{-i+1}{\sqrt{3}+2i}\right)\\&=\frac{1}{2i}\frac{(1+i)(\sqrt{3}+2i)-(-i+1)(\sqrt{3}-2i)}{\left|\sqrt{3}-2i\right|^2}\\&=\frac{1}{2i}\frac{2i\sqrt{3}+4i}{7}\\&=\frac{1}{7}\sqrt{3}+\frac{2}{7},\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-2i}\right)=\frac{1}{7}\sqrt{3}+\frac{2}{7}.$$

Corrigé 21. On a : $\forall z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$. Ici, cela donne : ← page 2

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{i}{-1+8i\sqrt{3}}\right)&=\frac{1}{2i}\left(\frac{i}{-1+8i\sqrt{3}}-\frac{-i}{-1-8i\sqrt{3}}\right)\\&=\frac{1}{2i}\frac{(i)(-1-8i\sqrt{3})-(-i)(-1+8i\sqrt{3})}{\left|-1+8i\sqrt{3}\right|^2}\\&=\frac{1}{2i}\frac{-2i}{193}\\&=-\frac{1}{193},\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{i}{-1+8i\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{193}.$$

Corrigé 22. En utilisant le fait que $\frac{1}{i}=-i$, on a tout simplement : ← page 3

$$\frac{-2\sqrt{3}+i}{-i}=i\left(-2\sqrt{3}+i\right)=-2i\sqrt{3}-1$$

et on en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-2\sqrt{3}+i}{-i}\right)=-1,\quad \left|\frac{-2\sqrt{3}+i}{-i}\right|=\sqrt{13}.$$

Corrigé 23. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 3

$$\left|\frac{3-8i\sqrt{3}}{-1+2i}\right| = \frac{\left|3-8i\sqrt{3}\right|}{|-1+2i|} = \frac{\sqrt{201}}{\sqrt{5}},$$

et donc :

$$\left|\frac{3-8i\sqrt{3}}{-1+2i}\right| = \sqrt{\frac{201}{5}}.$$

Corrigé 24. En utilisant le fait que $\frac{1}{i} = -i$, on a tout simplement : ← page 3

$$\frac{-3-i}{3i} = -\frac{1}{3}i\,(-3-i) = i - \frac{1}{3}$$

et on en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{-3-i}{3i}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Corrigé 25. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $2-i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 3

$$\begin{aligned}\frac{-2+i}{2-i\sqrt{3}} &= \frac{(-2+i)(2+i\sqrt{3})}{\left|2-i\sqrt{3}\right|^2}\\ &= \frac{-(2i+1)\sqrt{3}+2i-4}{7}\\ &= -\left(\frac{2}{7}i+\frac{1}{7}\right)\sqrt{3}+\frac{2}{7}i-\frac{4}{7}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{-2+i}{2-i\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{7}\sqrt{3}-\frac{4}{7}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{-2+i}{2-i\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{7}\sqrt{3}+\frac{2}{7}.$$

Corrigé 26. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Ici, cela donne : ← page 3

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{2i}{9+i}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{2i}{9+i}-\frac{-2i}{9-i}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\frac{(2i)(9-i)-(-2i)(9+i)}{|9+i|^2}\\ &= \frac{1}{2i}\frac{36i}{82}\\ &= \frac{9}{41},\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2i}{9+i}\right) = \frac{9}{41}.$$

Corrigé 27. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{1}{6}i\pi}$, et : $-2\sqrt{3}+2i = 4e^{\frac{5}{6}i\pi}$. Donc : ← page 3

$$\frac{\sqrt{3}+i}{-2\sqrt{3}+2i} = \frac{2e^{\frac{1}{6}i\pi}}{4e^{\frac{5}{6}i\pi}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}i\pi} = -\frac{1}{4}i\sqrt{3}-\frac{1}{4}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-2\sqrt{3}+2i}\right) = -\frac{1}{4}, \quad \left|\frac{\sqrt{3}+i}{-2\sqrt{3}+2i}\right| = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-2\sqrt{3}+2i}\right) \equiv -\frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 28. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 3

$$\left|\frac{1+2i}{1-7i}\right| = \frac{|1+2i|}{|1-7i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{50}},$$

et donc :

$$\left|\frac{1+2i}{1-7i}\right| = \sqrt{\frac{1}{10}}.$$

Corrigé 29. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$. Ici, cela donne : ← page 3

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{-1+3i}{-13-6i\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1+3i}{-13-6i\sqrt{3}} + \frac{-3i-1}{-13+6i\sqrt{3}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{(-1+3i)(-13+6i\sqrt{3}) + (-3i-1)(-13-6i\sqrt{3})}{\left|-13-6i\sqrt{3}\right|^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{-36\sqrt{3}+26}{277}\\
&= -\frac{18}{277}\sqrt{3} + \frac{13}{277},
\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-1+3i}{-13-6i\sqrt{3}}\right) = -\frac{18}{277}\sqrt{3} + \frac{13}{277}.$$

Corrigé 30. Remarquons que l'on a tout simplement : $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2} = i\left(2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}\right)$. On en déduit : ← page 3

$$\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}} = i.$$

On a donc immédiatement :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right) = 0, \quad \left|\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right| = 1,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right) \equiv \frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 31. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$. Ici, cela donne : ← page 3

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{-2+i}{-8-i}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{-2+i}{-8-i} + \frac{-i-2}{-8+i}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{(-2+i)(-8+i) + (-i-2)(-8-i)}{|-8-i|^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{30}{65}\\
&= \frac{3}{13},
\end{aligned}$$

d'où le résultat :
$$\mathrm{Re}\left(\frac{-2+i}{-8-i}\right) = \frac{3}{13}.$$

Corrigé 32. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $\sqrt{3}-i = 2e^{-\frac{1}{6}i\pi}$, et : $302-302i\sqrt{3} = 604e^{-\frac{1}{3}i\pi}$. Donc : ← page 3

$$\frac{\sqrt{3}-i}{302-302i\sqrt{3}} = \frac{2e^{-\frac{1}{6}i\pi}}{604e^{-\frac{1}{3}i\pi}} = \frac{1}{302}e^{\frac{1}{6}i\pi} = \frac{1}{604}\sqrt{3} + \frac{1}{604}i.$$

On en déduit :
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{302-302i\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{604}\sqrt{3}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{302-302i\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{604}, \quad \left|\frac{\sqrt{3}-i}{302-302i\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{302},$$
$$\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{302-302i\sqrt{3}}\right) \equiv \frac{1}{6}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 33. En utilisant le fait que $\frac{1}{i} = -i$, on a tout simplement : ← page 3

$$\frac{2\sqrt{3}+2i}{i} = -i\left(2\sqrt{3}+2i\right) = -2i\sqrt{3}+2 = 4\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right) = 4e^{\frac{5}{3}i\pi}$$

et on en déduit :
$$\mathrm{Im}\left(\frac{2\sqrt{3}+2i}{i}\right) = -2\sqrt{3}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{2\sqrt{3}+2i}{i}\right) \equiv -\frac{1}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 34. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 4

$$\left|\frac{7\sqrt{3}+96i}{1-12i}\right| = \frac{\left|7\sqrt{3}+96i\right|}{|1-12i|} = \frac{\sqrt{9363}}{\sqrt{145}},$$

et donc :
$$\left|\frac{7\sqrt{3}+96i}{1-12i}\right| = \sqrt{\frac{9363}{145}}.$$

Corrigé 35. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $2\sqrt{3}+2i = 4e^{\frac{1}{6}i\pi}$, et : $3+3i\sqrt{3} = 6e^{\frac{1}{3}i\pi}$. Donc : ← page 4

$$\frac{2\sqrt{3}+2i}{3+3i\sqrt{3}} = \frac{4e^{\frac{1}{6}i\pi}}{6e^{\frac{1}{3}i\pi}} = \frac{2}{3}e^{-\frac{13}{6}i\pi} = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{6}i\pi} = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}i.$$

On en déduit :
$$\mathrm{Re}\left(\frac{2\sqrt{3}+2i}{3+3i\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{2\sqrt{3}+2i}{3+3i\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3}, \quad \left|\frac{2\sqrt{3}+2i}{3+3i\sqrt{3}}\right| = \frac{2}{3},$$
$$\mathrm{Arg}\left(\frac{2\sqrt{3}+2i}{3+3i\sqrt{3}}\right) \equiv -\frac{1}{6}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 36. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $5\sqrt{3}+i$. On obtient : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{5\sqrt{3}+i} &= \frac{(1+i)(5\sqrt{3}-i)}{\left|5\sqrt{3}+i\right|^2}\\ &= \frac{(5i+5)\sqrt{3}-i+1}{76}\\ &= \left(\frac{5}{76}i+\frac{5}{76}\right)\sqrt{3}-\frac{1}{76}i+\frac{1}{76}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{5\sqrt{3}+i}\right)=\frac{5}{76}\sqrt{3}+\frac{1}{76},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{1+i}{5\sqrt{3}+i}\right)=\frac{5}{76}\sqrt{3}-\frac{1}{76}.$$

Corrigé 37. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-1=e^{i\pi}$, et : $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=4e^{-\frac{1}{4}i\pi}$. Donc : ← page 4

$$\frac{-1}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}=\frac{e^{i\pi}}{4e^{-\frac{1}{4}i\pi}}=\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}i\pi}=-\left(\frac{1}{8}i+\frac{1}{8}\right)\sqrt{2}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{8}\sqrt{2},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{8}\sqrt{2},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right)\equiv-\frac{3}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 38. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-10\sqrt{3}+i$. On obtient : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{-3-5i}{-10\sqrt{3}+i} &= \frac{(-3-5i)(-10\sqrt{3}-i)}{\left|-10\sqrt{3}+i\right|^2}\\ &= \frac{(50i+30)\sqrt{3}+3i-5}{301}\\ &= \left(\frac{50}{301}i+\frac{30}{301}\right)\sqrt{3}+\frac{3}{301}i-\frac{5}{301}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-3-5i}{-10\sqrt{3}+i}\right)=\frac{30}{301}\sqrt{3}-\frac{5}{301},\quad \left|\frac{-3-5i}{-10\sqrt{3}+i}\right|=\sqrt{\frac{34}{301}}.$$

Corrigé 39. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. On obtient : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} &= \frac{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{\left|-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right|^2}\\ &= \frac{-(i-1)\sqrt{3}\sqrt{2}-(i+1)\sqrt{2}}{4}\\ &= -\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}-\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $-\sqrt{3}+i=2e^{\frac{5}{6}i\pi}$, et : $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2e^{-\frac{3}{4}i\pi}$. Donc :

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{2e^{\frac{5}{6}i\pi}}{2e^{-\frac{3}{4}i\pi}}=1e^{\frac{19}{12}i\pi}=1e^{-\frac{5}{12}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)\equiv-\frac{5}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 40. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-1=e^{i\pi}$, et : $-2\sqrt{3}+2i=4e^{\frac{5}{6}i\pi}$. Donc : ← page 4

$$\frac{-1}{-2\sqrt{3}+2i}=\frac{e^{i\pi}}{4e^{\frac{5}{6}i\pi}}=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{6}i\pi}=\frac{1}{8}\sqrt{3}+\frac{1}{8}i.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-1}{-2\sqrt{3}+2i}\right)=\frac{1}{8}\sqrt{3},\quad \left|\frac{-1}{-2\sqrt{3}+2i}\right|=\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-1}{-2\sqrt{3}+2i}\right)\equiv\frac{1}{6}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 41. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1+5i$. On obtient : ← page 4

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1+5i}&=\frac{(1+i)(1-5i)}{|1+5i|^2}\\&=\frac{-4i+6}{26}\\&=-\frac{2}{13}i+\frac{3}{13}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{1+5i}\right)=\frac{3}{13},\quad \left|\frac{1+i}{1+5i}\right|=\sqrt{\frac{1}{13}}.$$

Corrigé 42. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-6\sqrt{3}-6i=12e^{-\frac{5}{6}i\pi}$. Donc : ← page 4

$$\frac{2}{-6\sqrt{3}-6i}=\frac{2}{12e^{-\frac{5}{6}i\pi}}=\frac{1}{6}e^{\frac{5}{6}i\pi}=-\frac{1}{12}\sqrt{3}+\frac{1}{12}i.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2}{-6\sqrt{3}-6i}\right)=-\frac{1}{12}\sqrt{3},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{2}{-6\sqrt{3}-6i}\right)=\frac{1}{12},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{2}{-6\sqrt{3}-6i}\right)\equiv\frac{5}{6}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 43. On a : $\forall z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$. Ici, cela donne : ← page 4

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{11i}{6+i\sqrt{3}}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{11i}{6+i\sqrt{3}}+\frac{-11i}{6-i\sqrt{3}}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{(11i)(6-i\sqrt{3})+(-11i)(6+i\sqrt{3})}{\left|6+i\sqrt{3}\right|^2}\\&=\frac{1}{2}\frac{22\sqrt{3}}{39}\\&=\frac{11}{39}\sqrt{3},\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{11i}{6+i\sqrt{3}}\right) = \frac{11}{39}\sqrt{3}.$$

Corrigé 44. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1+2i$. On obtient : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{1+4i}{1+2i} &= \frac{(1+4i)(1-2i)}{|1+2i|^2}\\ &= \frac{2i+9}{5}\\ &= \frac{2}{5}i + \frac{9}{5}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+4i}{1+2i}\right) = \frac{9}{5}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1+4i}{1+2i}\right) = \frac{2}{5}, \quad \left|\frac{1+4i}{1+2i}\right| = \sqrt{\frac{17}{5}}.$$

Corrigé 45. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$. On obtient : ← page 5

$$\begin{aligned}\frac{26\sqrt{3}+26i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} &= \frac{(26\sqrt{3}+26i)(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{\left|\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right|^2}\\ &= \frac{-(26i-26)\sqrt{3}\sqrt{2}+(26i+26)\sqrt{2}}{4}\\ &= -\left(\frac{13}{2}i-\frac{13}{2}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\frac{13}{2}i+\frac{13}{2}\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{26\sqrt{3}+26i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right) \equiv -\frac{1}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 46. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 5

$$\left|\frac{-1+3i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}}\right| = \frac{\left|-1+3i\sqrt{3}\right|}{\left|-i\sqrt{3}\right|} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}},$$

et donc :

$$\left|\frac{-1+3i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}}\right| = 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Corrigé 47. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $i = e^{\frac{1}{2}i\pi}$, et : $\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{\frac{1}{4}i\pi}$. Donc : ← page 5

$$\frac{i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}i\pi}}{2e^{\frac{1}{4}i\pi}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{7}{4}i\pi} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}i\pi} = \left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2}, \quad \left|\frac{i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right) \equiv \frac{1}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 48. Remarquons que l'on a tout simplement : $-1-i = -i(1-i)$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{-1-i}{1-i} = -i.$$

On a donc immédiatement :
$$\operatorname{Im}\left(\frac{-1-i}{1-i}\right) = -1, \qquad \left|\frac{-1-i}{1-i}\right| = 1.$$

Corrigé 49. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. Ici, cela donne : ← page 5

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{2-3i\sqrt{3}}{6-4i}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{2-3i\sqrt{3}}{6-4i} - \frac{3i\sqrt{3}+2}{6+4i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(2-3i\sqrt{3})(6+4i)-(3i\sqrt{3}+2)(6-4i)}{|6-4i|^2} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{-36i\sqrt{3}+16i}{52} \\
&= -\frac{9}{26}\sqrt{3} + \frac{2}{13},
\end{aligned}$$

d'où le résultat :
$$\operatorname{Im}\left(\frac{2-3i\sqrt{3}}{6-4i}\right) = -\frac{9}{26}\sqrt{3} + \frac{2}{13}.$$

Corrigé 50. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $2-i$. On obtient : ← page 5

$$\begin{aligned}
\frac{-15i\sqrt{3}}{2-i} &= \frac{(-15i\sqrt{3})(2+i)}{|2-i|^2} \\
&= \frac{-(30i-15)\sqrt{3}}{5} \\
&= -(6i-3)\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

On en déduit :
$$\operatorname{Im}\left(\frac{-15i\sqrt{3}}{2-i}\right) = -6\sqrt{3}, \qquad \left|\frac{-15i\sqrt{3}}{2-i}\right| = 3\sqrt{15}.$$

Corrigé 51. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 5

$$\left|\frac{-11+9i\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}+i}\right| = \frac{\left|-11+9i\sqrt{3}\right|}{\left|-2\sqrt{3}+i\right|} = \frac{\sqrt{364}}{\sqrt{13}},$$

et donc :
$$\left|\frac{-11+9i\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}+i}\right| = 2\sqrt{7}.$$

Corrigé 52. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $4\sqrt{3}-i$. On obtient : ← page 5

$$\begin{aligned}
\frac{-1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-i} &= \frac{(-1+i\sqrt{3})(4\sqrt{3}+i)}{\left|4\sqrt{3}-i\right|^2} \\
&= \frac{-5\sqrt{3}+11i}{49} \\
&= -\frac{5}{49}\sqrt{3} + \frac{11}{49}i.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-i}\right) = -\frac{5}{49}\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-i}\right) = \frac{11}{49}.$$

Corrigé 53. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. Ici, cela donne : ← page 5

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}+5i}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}+5i} - \frac{-\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}-5i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\,\frac{(-\sqrt{3}+i)(2\sqrt{3}-5i)-(-\sqrt{3}-i)(2\sqrt{3}+5i)}{\left|2\sqrt{3}+5i\right|^2} \\
&= \frac{1}{2i}\,\frac{14i\sqrt{3}}{37} \\
&= \frac{7}{37}\sqrt{3},
\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}+5i}\right) = \frac{7}{37}\sqrt{3}.$$

Corrigé 54. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-2-2i\sqrt{3} = 4e^{-\frac{2}{3}i\pi}$. Donc : ← page 5

$$\frac{1}{-2-2i\sqrt{3}} = \frac{1}{4e^{-\frac{2}{3}i\pi}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{4}{3}i\pi} = \frac{1}{4}e^{\frac{2}{3}i\pi} = \frac{1}{8}i\sqrt{3} - \frac{1}{8}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{-2-2i\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{8}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{-2-2i\sqrt{3}}\right) \equiv \frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 55. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-3+i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 6

$$\begin{aligned}
\frac{4-8i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} &= \frac{(4-8i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{\left|-3+i\sqrt{3}\right|^2} \\
&= \frac{20i\sqrt{3}-36}{12} \\
&= \frac{5}{3}i\sqrt{3}-3.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{4-8i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}\right) = -3, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{4-8i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

Corrigé 56. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 6

$$\left|\frac{11-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right| = \frac{\left|11-i\sqrt{3}\right|}{\left|\sqrt{3}+i\right|} = \frac{\sqrt{124}}{\sqrt{4}},$$

et donc :

$$\left|\frac{11-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right| = \sqrt{31}.$$

Corrigé 57. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - 7i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-7i\sqrt{3}} &= \frac{(1)(1+7i\sqrt{3})}{\left|1-7i\sqrt{3}\right|^2}\\ &= \frac{7i\sqrt{3}+1}{148}\\ &= \frac{7}{148}i\sqrt{3} + \frac{1}{148}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-7i\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{148}, \quad \left|\frac{1}{1-7i\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{37}}.$$

Corrigé 58. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $3 + 2i$. On obtient : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{-\sqrt{3}+i}{3+2i} &= \frac{(-\sqrt{3}+i)(3-2i)}{|3+2i|^2}\\ &= \frac{(2i-3)\sqrt{3}+3i+2}{13}\\ &= \left(\frac{2}{13}i - \frac{3}{13}\right)\sqrt{3} + \frac{3}{13}i + \frac{2}{13}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{3+2i}\right) = \frac{2}{13}\sqrt{3} + \frac{3}{13}, \quad \left|\frac{-\sqrt{3}+i}{3+2i}\right| = 2\sqrt{\frac{1}{13}}.$$

Corrigé 59. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $\sqrt{3} + i$. On obtient : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i} &= \frac{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{\left|\sqrt{3}+i\right|^2}\\ &= \frac{(i-1)\sqrt{3}\sqrt{2}+(i+1)\sqrt{2}}{4}\\ &= \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\sqrt{3}\sqrt{2} + \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left|\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right| = 1, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right) \equiv \frac{7}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 60. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-26 - i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 6

$$\begin{aligned}\frac{-3+i}{-26-i\sqrt{3}} &= \frac{(-3+i)(-26+i\sqrt{3})}{\left|-26-i\sqrt{3}\right|^2}\\ &= \frac{-(3i+1)\sqrt{3}-26i+78}{679}\\ &= -\left(\frac{3}{679}i + \frac{1}{679}\right)\sqrt{3} - \frac{26}{679}i + \frac{78}{679}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-3+i}{-26-i\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{679}\sqrt{3} + \frac{78}{679}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{-3+i}{-26-i\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{679}\sqrt{3} - \frac{26}{679}, \quad \left|\frac{-3+i}{-26-i\sqrt{3}}\right| = \sqrt{\frac{10}{679}}.$$

Corrigé 61. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $9i = 9e^{\frac{1}{2}i\pi}$, et : $-22\sqrt{3} - 22i = 44e^{-\frac{5}{6}i\pi}$. Donc : ← page 6

$$\frac{9i}{-22\sqrt{3} - 22i} = \frac{9e^{\frac{1}{2}i\pi}}{44e^{-\frac{5}{6}i\pi}} = \frac{9}{44}e^{-\frac{2}{3}i\pi} = -\frac{9}{88}i\sqrt{3} - \frac{9}{88}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{9i}{-22\sqrt{3} - 22i}\right) = -\frac{9}{88}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{9i}{-22\sqrt{3} - 22i}\right) = -\frac{9}{88}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{9i}{-22\sqrt{3} - 22i}\right) \equiv -\frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 62. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$. Ici, cela donne : ← page 6

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3} + 2i}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3} + 2i} + \frac{-1}{-\sqrt{3} - 2i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(-1)(-\sqrt{3} - 2i) + (-1)(-\sqrt{3} + 2i)}{\left|-\sqrt{3} + 2i\right|^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}}{7} \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{3},
\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3} + 2i}\right) = \frac{1}{7}\sqrt{3}.$$

Corrigé 63. Remarquons que l'on a tout simplement : $-24\sqrt{3} + 24i = -6i\left(-4 - 4i\sqrt{3}\right)$. On en déduit : ← page 6

$$\frac{-24\sqrt{3} + 24i}{-4 - 4i\sqrt{3}} = -6i.$$

On a donc immédiatement :

$$\left|\frac{-24\sqrt{3} + 24i}{-4 - 4i\sqrt{3}}\right| = 6, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{-24\sqrt{3} + 24i}{-4 - 4i\sqrt{3}}\right) \equiv -\frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 64. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-7 + 2i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 6

$$\begin{aligned}
\frac{-12i}{-7 + 2i\sqrt{3}} &= \frac{(-12i)(-7 - 2i\sqrt{3})}{\left|-7 + 2i\sqrt{3}\right|^2} \\
&= \frac{-24\sqrt{3} + 84i}{61} \\
&= -\frac{24}{61}\sqrt{3} + \frac{84}{61}i.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-12i}{-7 + 2i\sqrt{3}}\right) = -\frac{24}{61}\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{-12i}{-7 + 2i\sqrt{3}}\right) = \frac{84}{61}, \quad \left|\frac{-12i}{-7 + 2i\sqrt{3}}\right| = 12\sqrt{\frac{1}{61}}.$$

Corrigé 65. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $5+5i\sqrt{3} = 10e^{\frac{1}{3}i\pi}$. Donc : ← page 6

$$\frac{1}{5+5i\sqrt{3}} = \frac{1}{10e^{\frac{1}{3}i\pi}} = \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{3}i\pi} = -\frac{1}{20}i\sqrt{3} + \frac{1}{20}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{5+5i\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{20}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{5+5i\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{20}\sqrt{3},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{5+5i\sqrt{3}}\right) \equiv -\frac{1}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 66. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $\sqrt{3}-i$. On obtient : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{-1+2i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} &= \frac{(-1+2i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{\left|\sqrt{3}-i\right|^2} \\ &= \frac{-3\sqrt{3}+5i}{4} \\ &= -\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{5}{4}i.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{-1+2i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{3}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{-1+2i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right) = \frac{5}{4}.$$

Corrigé 67. En utilisant le fait que $\dfrac{1}{i} = -i$, on a tout simplement : ← page 7

$$\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{i} = -i\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) = -(i+1)\sqrt{2} = 2\left(-\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\right) = 2e^{-\frac{3}{4}i\pi}$$

et on en déduit :

$$\left|\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{i}\right| = 2, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{i}\right) \equiv -\frac{3}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 68. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-24i = 24e^{-\frac{1}{2}i\pi}$, et : $1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}i\pi}$. Donc : ← page 7

$$\frac{-24i}{1-i} = \frac{24e^{-\frac{1}{2}i\pi}}{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}i\pi}} = 12\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}i\pi} = -12i+12.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{-24i}{1-i}\right) = -12, \quad \left|\frac{-24i}{1-i}\right| = 12\sqrt{2}.$$

Corrigé 69. Remarquons que l'on a tout simplement : $-\sqrt{2}-i\sqrt{2} = -\frac{1}{4}i\left(4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}\right)$. On en déduit : ← page 7

$$\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}i.$$

On a donc immédiatement :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}}\right) = 0, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}}\right) \equiv -\frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 70. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{-1-3i}{1-i\sqrt{3}} &= \frac{(-1-3i)(1+i\sqrt{3})}{\left|1-i\sqrt{3}\right|^2}\\ &= \frac{-(i-3)\sqrt{3}-3i-1}{4}\\ &= -\left(\frac{1}{4}i-\frac{3}{4}\right)\sqrt{3}-\frac{3}{4}i-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-1-3i}{1-i\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{4}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{-1-3i}{1-i\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{3}{4}, \quad \left|\frac{-1-3i}{1-i\sqrt{3}}\right| = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Corrigé 71. En utilisant le fait que $\frac{1}{i} = -i$, on a tout simplement : ← page 7

$$\frac{37\sqrt{2}+37i\sqrt{2}}{-2i} = \frac{1}{2}i\left(37\sqrt{2}+37i\sqrt{2}\right) = \left(\frac{37}{2}i-\frac{37}{2}\right)\sqrt{2} = 37\left(\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\right) = 37e^{\frac{3}{4}i\pi}$$

et on en déduit :

$$\left|\frac{37\sqrt{2}+37i\sqrt{2}}{-2i}\right| = 37, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{37\sqrt{2}+37i\sqrt{2}}{-2i}\right) \equiv \frac{3}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 72. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-2\sqrt{3}+i$. On obtient : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{-i}{-2\sqrt{3}+i} &= \frac{(-i)(-2\sqrt{3}-i)}{\left|-2\sqrt{3}+i\right|^2}\\ &= \frac{2i\sqrt{3}-1}{13}\\ &= \frac{2}{13}i\sqrt{3}-\frac{1}{13}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-i}{-2\sqrt{3}+i}\right) = -\frac{1}{13}, \quad \left|\frac{-i}{-2\sqrt{3}+i}\right| = \sqrt{\frac{1}{13}}.$$

Corrigé 73. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-2 = 2e^{i\pi}$, et : $-\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{\frac{3}{4}i\pi}$. Donc : ← page 7

$$\frac{-2}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{2e^{i\pi}}{2e^{\frac{3}{4}i\pi}} = 1e^{\frac{1}{4}i\pi} = \left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-2}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{-2}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right) \equiv \frac{1}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 74. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $\sqrt{3}-i$. On obtient : ← page 7

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i} &= \frac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{3}+i)}{\left|\sqrt{3}-i\right|^2} \\
&= \frac{-(i-1)\sqrt{3}\sqrt{2}+(i+1)\sqrt{2}}{4} \\
&= -\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2e^{-\frac{1}{4}i\pi}$, et : $\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{1}{6}i\pi}$. Donc :

$$\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i}=\frac{2e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{2e^{-\frac{1}{6}i\pi}}=1e^{-\frac{1}{12}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i}\right)\equiv-\frac{1}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 75. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$. On obtient : ← page 7

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{\left|\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right|^2} \\
&= \frac{-(i-1)\sqrt{3}\sqrt{2}+(i+1)\sqrt{2}}{4} \\
&= -\left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $\sqrt{3}+i=2e^{\frac{1}{6}i\pi}$, et : $\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2e^{\frac{1}{4}i\pi}$. Donc :

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{2e^{\frac{1}{6}i\pi}}{2e^{\frac{1}{4}i\pi}}=1e^{-\frac{1}{12}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2},\quad \left|\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right|=1,$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)\equiv-\frac{1}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 76. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-1+225i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 8

$$\begin{aligned}
\frac{-2i}{-1+225i\sqrt{3}} &= \frac{(-2i)(-1-225i\sqrt{3})}{\left|-1+225i\sqrt{3}\right|^2} \\
&= \frac{-450\sqrt{3}+2i}{151876} \\
&= -\frac{225}{75938}\sqrt{3}+\frac{1}{75938}i.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{-2i}{-1+225i\sqrt{3}}\right) = -\frac{225}{75938}\sqrt{3}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{-2i}{-1+225i\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{75938}.$$

Corrigé 77. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-\sqrt{3}-i$. On obtient : ← page 8

$$\begin{aligned}\frac{-3+4i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i} &= \frac{(-3+4i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{\left|-\sqrt{3}-i\right|^2}\\ &= \frac{-\sqrt{3}-15i}{4}\\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{15}{4}i.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{-3+4i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}\right) = -\frac{15}{4}, \quad \left|\frac{-3+4i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{57}.$$

Corrigé 78. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-1-i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 8

$$\begin{aligned}\frac{-52\sqrt{2}+52i\sqrt{2}}{-1-i\sqrt{3}} &= \frac{(-52\sqrt{2}+52i\sqrt{2})(-1+i\sqrt{3})}{\left|-1-i\sqrt{3}\right|^2}\\ &= \frac{-(52i+52)\sqrt{3}\sqrt{2}-(52i-52)\sqrt{2}}{4}\\ &= -(13i+13)\sqrt{3}\sqrt{2}-(13i-13)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $-52\sqrt{2}+52i\sqrt{2} = 104e^{\frac{3}{4}i\pi}$, et : $-1-i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{2}{3}i\pi}$. Donc :

$$\frac{-52\sqrt{2}+52i\sqrt{2}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{104e^{\frac{3}{4}i\pi}}{2e^{-\frac{2}{3}i\pi}} = 52e^{\frac{17}{12}i\pi} = 52e^{-\frac{7}{12}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{-52\sqrt{2}+52i\sqrt{2}}{-1-i\sqrt{3}}\right) = -13\sqrt{3}\sqrt{2}+13\sqrt{2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{-52\sqrt{2}+52i\sqrt{2}}{-1-i\sqrt{3}}\right) = -13\sqrt{3}\sqrt{2}-13\sqrt{2},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{-52\sqrt{2}+52i\sqrt{2}}{-1-i\sqrt{3}}\right) \equiv -\frac{7}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 79. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-6 = 6e^{i\pi}$, et : $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2} = 4e^{-\frac{1}{4}i\pi}$. Donc : ← page 8

$$\frac{-6}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}} = \frac{6e^{i\pi}}{4e^{-\frac{1}{4}i\pi}} = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{4}i\pi} = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi} = -\left(\frac{3}{4}i+\frac{3}{4}\right)\sqrt{2}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{-6}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{2}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{-6}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right) \equiv -\frac{3}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 80. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-19i$. On obtient : ← page 8

$$\begin{aligned}\frac{2+i\sqrt{3}}{1-19i} &= \frac{(2+i\sqrt{3})(1+19i)}{|1-19i|^2}\\ &= \frac{(i-19)\sqrt{3}+38i+2}{362}\\ &= \left(\frac{1}{362}i-\frac{19}{362}\right)\sqrt{3}+\frac{19}{181}i+\frac{1}{181}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2+i\sqrt{3}}{1-19i}\right) = -\frac{19}{362}\sqrt{3}+\frac{1}{181}, \qquad \left|\frac{2+i\sqrt{3}}{1-19i}\right| = \sqrt{\frac{7}{362}}.$$

Corrigé 81. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1+5i$. On obtient : ← page 8

$$\begin{aligned}\frac{-\sqrt{3}-3i}{1+5i} &= \frac{(-\sqrt{3}-3i)(1-5i)}{|1+5i|^2}\\ &= \frac{(5i-1)\sqrt{3}-3i-15}{26}\\ &= \left(\frac{5}{26}i-\frac{1}{26}\right)\sqrt{3}-\frac{3}{26}i-\frac{15}{26}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-\sqrt{3}-3i}{1+5i}\right) = -\frac{1}{26}\sqrt{3}-\frac{15}{26}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{-\sqrt{3}-3i}{1+5i}\right) = \frac{5}{26}\sqrt{3}-\frac{3}{26}.$$

Corrigé 82. En utilisant le fait que $\frac{1}{i}=-i$, on a tout simplement : ← page 8

$$\frac{\sqrt{3}-i}{i} = -i\left(\sqrt{3}-i\right) = -i\sqrt{3}-1 = 2\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{2}{3}i\pi}$$

et on en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right) = -\sqrt{3}, \qquad \left|\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right| = 2,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right) \equiv -\frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 83. On a : $\forall z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. Ici, cela donne : ← page 8

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{-2\sqrt{3}+2i}{1-2i\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{-2\sqrt{3}+2i}{1-2i\sqrt{3}}-\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1+2i\sqrt{3}}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\frac{(-2\sqrt{3}+2i)(1+2i\sqrt{3})-(-2\sqrt{3}-2i)(1-2i\sqrt{3})}{\left|1-2i\sqrt{3}\right|^2}\\ &= \frac{1}{2i}\frac{-20i}{13}\\ &= -\frac{10}{13},\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-2\sqrt{3}+2i}{1-2i\sqrt{3}}\right) = -\frac{10}{13}.$$

Corrigé 84. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2e^{-\frac{1}{4}i\pi}$. Donc : ← page 8

$$\frac{3}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{3}{2e^{-\frac{1}{4}i\pi}} = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{4}i\pi} = \left(\frac{3}{4}i + \frac{3}{4}\right)\sqrt{2}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{3}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{3}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2}, \quad \left|\frac{3}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right| = \frac{3}{2},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{3}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right) \equiv \frac{1}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 85. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2e^{\frac{1}{4}i\pi}$. Donc : ← page 8

$$\frac{1}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{1}{2e^{\frac{1}{4}i\pi}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}i\pi} = -\left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\sqrt{2}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}, \quad \left|\frac{1}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right) \equiv -\frac{1}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 86. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 9

$$\left|\frac{-1-i}{2-6i}\right| = \frac{|-1-i|}{|2-6i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{40}},$$

et donc :

$$\left|\frac{-1-i}{2-6i}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Corrigé 87. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 + 3i$. On obtient : ← page 9

$$\begin{aligned}\frac{1 - 2i\sqrt{3}}{1+3i} &= \frac{(1 - 2i\sqrt{3})(1-3i)}{|1+3i|^2} \\ &= \frac{-(2i+6)\sqrt{3} - 3i + 1}{10} \\ &= -\left(\frac{1}{5}i + \frac{3}{5}\right)\sqrt{3} - \frac{3}{10}i + \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1 - 2i\sqrt{3}}{1+3i}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{10}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1 - 2i\sqrt{3}}{1+3i}\right) = -\frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{3}{10}.$$

Corrigé 88. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-2\sqrt{3} + 2i$. On obtient : ← page 9

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-2\sqrt{3}+2i} &= \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(-2\sqrt{3}-2i)}{\left|-2\sqrt{3}+2i\right|^2}\\ &= \frac{-(2i+2)\ \sqrt{3}\sqrt{2}-(2i-2)\ \sqrt{2}}{16}\\ &= -\left(\frac{1}{8}i+\frac{1}{8}\right)\ \sqrt{3}\sqrt{2}-\left(\frac{1}{8}i-\frac{1}{8}\right)\ \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{\frac{1}{4}i\pi}$, et : $-2\sqrt{3}+2i = 4e^{\frac{5}{6}i\pi}$. Donc :

$$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-2\sqrt{3}+2i} = \frac{2e^{\frac{1}{4}i\pi}}{4e^{\frac{5}{6}i\pi}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{7}{12}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-2\sqrt{3}+2i}\right) = -\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\sqrt{2},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-2\sqrt{3}+2i}\right) = -\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{1}{8}\sqrt{2},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-2\sqrt{3}+2i}\right) \equiv -\frac{7}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 89. En utilisant le fait que $\frac{1}{i} = -i$, on a tout simplement : ← page 9

$$\frac{\sqrt{3}-i}{i} = -i\left(\sqrt{3}-i\right) = -i\sqrt{3}-1 = 2\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{2}{3}i\pi}$$

et on en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right) = -1,\quad \mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right) = -\sqrt{3},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right) \equiv -\frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 90. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$. On obtient : ← page 9

$$\begin{aligned}\frac{-4\sqrt{3}+4i}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}} &= \frac{(-4\sqrt{3}+4i)(2\sqrt{2}+2i\sqrt{2})}{\left|2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}\right|^2}\\ &= \frac{-(8i+8)\ \sqrt{3}\sqrt{2}+(8i-8)\ \sqrt{2}}{16}\\ &= -\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\ \sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right)\ \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $-4\sqrt{3}+4i = 8e^{\frac{5}{6}i\pi}$, et : $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2} = 4e^{-\frac{1}{4}i\pi}$. Donc :

$$\frac{-4\sqrt{3}+4i}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}} = \frac{8e^{\frac{5}{6}i\pi}}{4e^{-\frac{1}{4}i\pi}} = 2e^{\frac{13}{12}i\pi} = 2e^{-\frac{11}{12}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{-4\sqrt{3}+4i}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \left|\frac{-4\sqrt{3}+4i}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right| = 2,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-4\sqrt{3}+4i}{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}\right) \equiv -\frac{11}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 91. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-2+2i\sqrt{3} = 4e^{\frac{2}{3}i\pi}$, et : $-13-13i\sqrt{3} = 26e^{-\frac{2}{3}i\pi}$. Donc : ← page 9

$$\frac{-2+2i\sqrt{3}}{-13-13i\sqrt{3}} = \frac{4e^{\frac{2}{3}i\pi}}{26e^{-\frac{2}{3}i\pi}} = \frac{2}{13}e^{\frac{4}{3}i\pi} = \frac{2}{13}e^{-\frac{2}{3}i\pi} = -\frac{1}{13}i\sqrt{3} - \frac{1}{13}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-2+2i\sqrt{3}}{-13-13i\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{13}, \quad \left|\frac{-2+2i\sqrt{3}}{-13-13i\sqrt{3}}\right| = \frac{2}{13},$$
$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-2+2i\sqrt{3}}{-13-13i\sqrt{3}}\right) \equiv -\frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 92. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-i\sqrt{3}$. On obtient : ← page 9

$$\begin{aligned}\frac{-4-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} &= \frac{(-4-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{\left|1-i\sqrt{3}\right|^2}\\ &= \frac{-5i\sqrt{3}-1}{4}\\ &= -\frac{5}{4}i\sqrt{3} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-4-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{4}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{-4-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right) = -\frac{5}{4}\sqrt{3}.$$

Corrigé 93. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $2\sqrt{3}+2i$. On obtient : ← page 9

$$\begin{aligned}\frac{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2i} &= \frac{(-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2})(2\sqrt{3}-2i)}{\left|2\sqrt{3}+2i\right|^2}\\ &= \frac{(6i-6)\sqrt{3}\sqrt{2}+(6i+6)\sqrt{2}}{16}\\ &= \left(\frac{3}{8}i-\frac{3}{8}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\frac{3}{8}i+\frac{3}{8}\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2} = 6e^{\frac{3}{4}i\pi}$, et : $2\sqrt{3}+2i = 4e^{\frac{1}{6}i\pi}$. Donc :

$$\frac{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2i} = \frac{6e^{\frac{3}{4}i\pi}}{4e^{\frac{1}{6}i\pi}} = \frac{3}{2}e^{\frac{7}{12}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2i}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{3}{8}\sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2i}\right) \equiv \frac{7}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 94. En utilisant le fait que $\frac{1}{i} = -i$, on a tout simplement : ← page 9

$$\frac{\sqrt{3}-i}{i} = -i\left(\sqrt{3}-i\right) = -i\sqrt{3}-1 = 2\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{2}{3}i\pi}$$

et on en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right) = -1, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right) \equiv -\frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 95. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $-1 = e^{i\pi}$, et : $\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{\frac{1}{4}i\pi}$. Donc : ← page 9

$$\frac{-1}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{e^{i\pi}}{2e^{\frac{1}{4}i\pi}} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\left|\frac{-1}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right) \equiv \frac{3}{4}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 96. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2}$. On obtient : ← page 10

$$\begin{aligned}\frac{-1+i\sqrt{3}}{-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2}} &= \frac{(-1+i\sqrt{3})(-17\sqrt{2}+17i\sqrt{2})}{\left|-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2}\right|^2} \\ &= \frac{-(17i+17)\sqrt{3}\sqrt{2}-(17i-17)\sqrt{2}}{1156} \\ &= -\left(\frac{1}{68}i+\frac{1}{68}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}-\left(\frac{1}{68}i-\frac{1}{68}\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cette expression permet d'en déduire à peu de frais la partie réelle et la partie imaginaire, mais elle n'est pas forcément très pratique pour obtenir le module, et en aucun cas elle ne permet de reconnaître un argument usuel. Pour y parvenir, remarquons que le numérateur et le dénominateur de notre expression initiale se mettent aisément sous forme exponentielle. On a en effet : $-1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2}{3}i\pi}$, et : $-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2} = 34e^{-\frac{3}{4}i\pi}$. Donc :

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2}} = \frac{2e^{\frac{2}{3}i\pi}}{34e^{-\frac{3}{4}i\pi}} = \frac{1}{17}e^{-\frac{7}{12}i\pi}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{68}\sqrt{3}\sqrt{2}-\frac{1}{68}\sqrt{2}, \quad \left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{17},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{-17\sqrt{2}-17i\sqrt{2}}\right) \equiv -\frac{7}{12}\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 97. En utilisant le fait que $\frac{1}{i} = -i$, on a tout simplement : ← page 10

$$\frac{2+i}{-i\sqrt{3}} = \frac{1}{3}i\sqrt{3}\,(2+i) = \left(\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}$$

et on en déduit :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2+i}{-i\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Corrigé 98. Remarquons que l'on a tout simplement : $-\sqrt{2}+i\sqrt{2} = -i\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$. On en déduit : ← page 10

$$\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=-i.$$

On a donc immédiatement :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)\equiv-\frac{1}{2}\,\pi \bmod 2\pi.$$

Corrigé 99. Comme le module est multiplicatif, on a directement : ← page 10

$$\left|\frac{7-i}{-1+i}\right|=\frac{|7-i|}{|-1+i|}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}},$$

et donc :

$$\left|\frac{7-i}{-1+i}\right|=5.$$

Corrigé 100. Il est plus facile de simplifier un quotient de nombres complexes lorsqu'ils sont mis sous forme exponentielle (grâce aux propriétés mirifiques de cette fonction). Or ici on sait le faire explicitement à peu de frais. On a en effet : $6\sqrt{3}-6i=12e^{-\frac{1}{6}i\pi}$, et : $\sqrt{3}+i=2e^{\frac{1}{6}i\pi}$. Donc : ← page 10

$$\frac{6\sqrt{3}-6i}{\sqrt{3}+i}=\frac{12e^{-\frac{1}{6}i\pi}}{2e^{\frac{1}{6}i\pi}}=6e^{-\frac{1}{3}i\pi}=-3i\sqrt{3}+3.$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{6\sqrt{3}-6i}{\sqrt{3}+i}\right)=3,\quad\left|\frac{6\sqrt{3}-6i}{\sqrt{3}+i}\right|=6,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{6\sqrt{3}-6i}{\sqrt{3}+i}\right)\equiv-\frac{1}{3}\,\pi \bmod 2\pi.$$