Raisonnement sur les sous-espaces stables, racines carrées d'une matrice (non guidé)

Ces exercices vous apprennent à utiliser la stabilité des sous-espaces propres, par une matrice qui commute, pour résoudre une équation matricielle. Voir mon document *Méthodes* à la section 6.1.4 pour des exercices analogues. Le cas d'une matrice triangulaire est en vérité le plus facile : notez que si vous prenez un vecteur propre en premier vecteur, alors peu importe le deuxième vecteur que vous choisissez pour avoir une nouvelle base, vous obtenez une matrice de la bonne forme.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 19 & 16 \\ -22 & -19 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 3M = A$. → page 7

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 7

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 9

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} -20 & -22 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 10

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 11

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 18 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 12

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 14

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 14

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 15

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 16

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 18

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 6M = A$. → page 19

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 20

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 22

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 23

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 24

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -20 & -6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 25

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 26

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 28

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 29

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 30

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 30

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 31

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 3M = A$. → page 32

Exercice 25. Soit $A = \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ -14 & -17 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 41M = A$. → page 34

Exercice 26. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 35

Exercice 27. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 36

Exercice 28. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 37

Exercice 29. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 39

Exercice 30. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 14 & -11 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 40

Exercice 31. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & -20 \\ 8 & -16 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 41

Exercice 32. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 14M = A$. → page 42

Exercice 33. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 43

Exercice 34. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 44

Exercice 35. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 6M = A$. → page 46

Exercice 36. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 47

Exercice 37. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 48

Exercice 38. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 49

Exercice 39. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 50

Exercice 40. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 52

Exercice 41. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 52

Exercice 42. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 53

Exercice 43. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 42M = A$. → page 54

Exercice 44. Soit $A = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 56

Exercice 45. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 57

Exercice 46. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 58

Exercice 47. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 3M = A$. → page 59

Exercice 48. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 61

Exercice 49. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 61

Exercice 50. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 5M = A$. → page 62

Exercice 51. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 63

Exercice 52. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 63

Exercice 53. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 63

Exercice 54. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 65

Exercice 55. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 14M = A$. → page 66

Exercice 56. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 67

Exercice 57. Soit $A = \begin{pmatrix} -13 & -12 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 67

Exercice 58. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 68

Exercice 59. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 69

Exercice 60. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 70

Exercice 61. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 71

Exercice 62. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -24 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 72

Exercice 63. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 24 & -14 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 3M = A$. → page 73

Exercice 64. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 20 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 74

Exercice 65. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 75

Exercice 66. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 5M = A$. → page 75

Exercice 67. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 76

Exercice 68. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 77

Exercice 69. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 78

Exercice 70. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 79

Exercice 71. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -18 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 80

Exercice 72. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 44M = A$. → page 81

Exercice 73. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 5M = A$. → page 82

Exercice 74. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 83

Exercice 75. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -18 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 84

Exercice 76. Soit $A = \begin{pmatrix} -18 & -16 \\ 17 & 15 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 85

Exercice 77. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 87

Exercice 78. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 88

Exercice 79. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 89

Exercice 80. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 90

Exercice 81. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 6M = A$. → page 92

Exercice 82. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 92

Exercice 83. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 6M = A$. → page 94

Exercice 84. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 6M = A$. → page 95

Exercice 85. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 96

Exercice 86. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 97

Exercice 87. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -8 & -13 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 97

Exercice 88. Soit $A = \begin{pmatrix} -20 & 19 \\ -21 & 20 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 99

Exercice 89. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 100

Exercice 90. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 4M = A$. → page 101

Exercice 91. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 102

Exercice 92. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 104

Exercice 93. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 105

Exercice 94. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 106

Exercice 95. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 107

Exercice 96. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 108

Exercice 97. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 108

Exercice 98. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -24 & -9 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 109

Exercice 99. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 2M = A$. → page 111

Exercice 100. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 111

Corrigé 1. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3,-3\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A-3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{8}{11}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}-\frac{8}{11}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix}-1&-\frac{8}{11}\\1&1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2+3M = A$, on a : $AM = \left(M^2+3M\right)\cdot M = M^3+3M^2 = M\cdot\left(M^2+3M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A-3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2+3M = A &\iff P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2P^{-1} + 3P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix}a^2+3\,a&0\\0&b^2+3\,b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2+3\,a = 3,\\ b^2+3\,b = -3.\end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2+3\,X-3$ et $X^2+3\,X+3$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 21$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+3M = A$.

Corrigé 2. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A-2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A-\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - 2M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - 2M\right) \cdot M = M^3 - 2M^2 = M \cdot \left(M^2 - 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - 2\,a & = & 2, \\ b^2 - 2\,b & = & 1. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 2\,X - 2$ et $X^2 - 2\,X - 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 12$, et : $\Delta_2 = 8$. Les racines du premier polynôme sont donc $\sqrt{3} + 1$ et $-\sqrt{3} + 1$, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{2} + 1$ et $-\sqrt{2} + 1$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(\sqrt{3} + 1, \sqrt{2} + 1\right), \ \left(-\sqrt{3} + 1, \sqrt{2} + 1\right), \ \left(-\sqrt{3} + 1, -\sqrt{2} + 1\right), \ \text{ et : } \left(\sqrt{3} + 1, -\sqrt{2} + 1\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a + 2\,b & -2\,a + 2\,b \\ a - b & 2\,a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - 2M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1 & -2\sqrt{3}+2\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2\sqrt{2}+1 & 2\sqrt{3}+2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}-\sqrt{2} & -2\sqrt{3}-\sqrt{2}+1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2\sqrt{2}+1 & 2\sqrt{3}-2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{2} & -2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1 & -2\sqrt{3}-2\sqrt{2} \\ \sqrt{3}+\sqrt{2} & 2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - 2M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 3. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = -2. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right),\ \left(-\sqrt{2}, i\sqrt{2}\right),\ \left(\sqrt{2}, i\sqrt{2}\right),\ \text{ et : }\ \left(-\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b & \frac{3}{4}\,a - \frac{3}{4}\,b \\ -a + b & -\frac{1}{2}\,a + \frac{3}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}\right)\sqrt{2} & \left(\frac{3}{4}i + \frac{3}{4}\right)\sqrt{2} \\ -\left(i+1\right)\sqrt{2} & -\left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}\right)\sqrt{2} & -\left(\frac{3}{4}i + \frac{3}{4}\right)\sqrt{2} \\ \left(i+1\right)\sqrt{2} & \left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}\right)\sqrt{2} & -\left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}\right)\sqrt{2} \\ \left(i-1\right)\sqrt{2} & \left(\frac{3}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}\right)\sqrt{2} & \left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}\right)\sqrt{2} \\ -\left(i-1\right)\sqrt{2} & -\left(\frac{3}{2}i - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 4. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{11}{10} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 2, \\ b^2 &= 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{2}, 0\right), \quad \text{et :} \quad \left(\sqrt{2}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{11}{10} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -10\,a + 11\,b & -11\,a + 11\,b \\ 10\,a - 10\,b & 11\,a - 10\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 10\sqrt{2} & 11\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & -11\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \text{et :}\ M_2 = \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} & -11\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} & 11\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 5. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-5)\cdot(X-4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{4, 5\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation

à résoudre. Comme : $M^2 - M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - M\right) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a = 5, \\ b^2 - b = 4. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 5$ et $X^2 - X - 4$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 21$, et : $\Delta_2 = 17$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right), \text{ et : } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -5\,a + 6\,b & 6\,a - 6\,b \\ -5\,a + 5\,b & 6\,a - 5\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{21} - 3\sqrt{17} + \frac{1}{2} & -3\sqrt{21} + 3\sqrt{17} \\ \frac{5}{2}\sqrt{21} - \frac{5}{2}\sqrt{17} & -3\sqrt{21} + \frac{5}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{21} - 3\sqrt{17} + \frac{1}{2} & 3\sqrt{21} + 3\sqrt{17} \\ -\frac{5}{2}\sqrt{21} - \frac{5}{2}\sqrt{17} & 3\sqrt{21} + \frac{5}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{21} + 3\sqrt{17} + \frac{1}{2} & 3\sqrt{21} - 3\sqrt{17} \\ -\frac{5}{2}\sqrt{21} + \frac{5}{2}\sqrt{17} & 3\sqrt{21} - \frac{5}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{21} + 3\sqrt{17} + \frac{1}{2} & -3\sqrt{21} - 3\sqrt{17} \\ \frac{5}{2}\sqrt{21} + \frac{5}{2}\sqrt{17} & -3\sqrt{21} - \frac{5}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 6. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice ← page 1

diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-4,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A+\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2\cdot M = M^3 = M\cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & -1, \\ b^2 & = & -4. \end{array}\right.$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(-i,-2i),\ (i,2i),\ (-i,2i),\ \text{ et : }\ (i,-2i).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -a+2\,b & -\frac{1}{3}\,a+\frac{1}{3}\,b \\ 6\,a-6\,b & 2\,a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3i & -\frac{1}{3}i \\ 6i & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1}{3}i \\ -6i & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 5i & i \\ -18i & -4i \end{pmatrix},\ \text{et} : M_4 = \begin{pmatrix} -5i & -i \\ 18i & 4i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 7. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que l'on a : $M^2 = A$. Alors : $\det(A) = \det\left(M^2\right) = (\det(M))^2 \geqslant 0$ car $\det(M) \in \mathbb{R}$ et un réel au carré est positif. Or un calcul direct montre que l'on a : $\det(A) = -2 < 0$: contradiction. Par l'absurde, on a montré qu'il n'existe pas de solution à l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. ← page 1

Corrigé 8. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-4)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 4\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(2, 0), \quad \text{et} : \quad (-2, 0).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\,a + \frac{3}{4}\,b & \frac{1}{4}\,a - \frac{1}{4}\,b \\ \frac{3}{4}\,a - \frac{3}{4}\,b & \frac{3}{4}\,a + \frac{1}{4}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \text{ et} : M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 9. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 4) \cdot (X - 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 4\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage. Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(-2, 1)\,,\ (2, -1)\,,\ (2, 1)\,,\quad \text{et :}\quad (-2, -1)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a + 2\,b & -2\,a + 2\,b \\ a - b & 2\,a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 10. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 10) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{10, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) =$

$AX_1 = 10X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{9}{10} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 10\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 10\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 10\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 10, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{10}, -i\right), \ \left(-\sqrt{10}, -i\right), \ \left(\sqrt{10}, i\right), \ \text{ et : } \ \left(-\sqrt{10}, i\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{9}{10} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{11} & -\frac{9}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{20}{11}a - \frac{9}{11}b & -\frac{18}{11}a + \frac{18}{11}b \\ \frac{10}{11}a - \frac{10}{11}b & -\frac{9}{11}a + \frac{20}{11}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{20}{11}\sqrt{10} + \frac{9}{11}i & -\frac{18}{11}\sqrt{10} - \frac{18}{11}i \\ \frac{10}{11}\sqrt{10} + \frac{10}{11}i & -\frac{9}{11}\sqrt{10} - \frac{20}{11}i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{20}{11}\sqrt{10} + \frac{9}{11}i & \frac{18}{11}\sqrt{10} - \frac{18}{11}i \\ -\frac{10}{11}\sqrt{10} + \frac{10}{11}i & \frac{9}{11}\sqrt{10} - \frac{20}{11}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{20}{11}\sqrt{10} - \frac{9}{11}i & -\frac{18}{11}\sqrt{10} + \frac{18}{11}i \\ \frac{10}{11}\sqrt{10} - \frac{10}{11}i & -\frac{9}{11}\sqrt{10} + \frac{20}{11}i \end{pmatrix}, \text{ et}: M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{20}{11}\sqrt{10} - \frac{9}{11}i & \frac{18}{11}\sqrt{10} + \frac{18}{11}i \\ -\frac{10}{11}\sqrt{10} - \frac{10}{11}i & \frac{9}{11}\sqrt{10} + \frac{20}{11}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 11. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -4\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -4. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(0, 2i), \quad \text{et}: \quad (0, -2i).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}\,a + \frac{9}{4}\,b & \frac{9}{4}\,a - \frac{9}{4}\,b \\ -\frac{5}{4}\,a + \frac{5}{4}\,b & \frac{9}{4}\,a - \frac{5}{4}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}i & -\frac{9}{2}i \\ \frac{5}{2}i & -\frac{5}{2}i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}i & \frac{9}{2}i \\ -\frac{5}{2}i & \frac{5}{2}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 12. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X+5)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -5\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{15}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{15}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -5X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{15}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 6M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + 6M\right)\cdot M = M^3 + 6M^2 = M\cdot\left(M^2 + 6M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2+6M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 6P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 6\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+6\,a & 0 \\ 0 & b^2+6\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+6\,a & = & 3, \\ b^2+6\,b & = & -5. \end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2+6\,X-3$ et $X^2+6\,X+5$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 48$, et : $\Delta_2 = 16$. Les racines du premier polynôme sont donc $2\sqrt{3}-3$ et $-2\sqrt{3}-3$, tandis que les racines du second polynôme sont -1 et -5. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-2\sqrt{3}-3,-1\right),\ \left(-2\sqrt{3}-3,-5\right),\ \left(2\sqrt{3}-3,-1\right),\quad \text{et :}\quad \left(2\sqrt{3}-3,-5\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{15}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{15}{8} \\ -\frac{7}{8} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8}\,a + \frac{15}{8}\,b & -\frac{15}{8}\,a + \frac{15}{8}\,b \\ \frac{7}{8}\,a - \frac{7}{8}\,b & \frac{15}{8}\,a - \frac{7}{8}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2+6M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{4} & \frac{15}{4}\sqrt{3}+\frac{15}{4} \\ -\frac{7}{4}\sqrt{3}-\frac{7}{4} & -\frac{15}{4}\sqrt{3}-\frac{19}{4} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4}\sqrt{3}-\frac{27}{4} & \frac{15}{4}\sqrt{3}-\frac{15}{4} \\ -\frac{7}{4}\sqrt{3}+\frac{7}{4} & -\frac{15}{4}\sqrt{3}-\frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{4} & -\frac{15}{4}\sqrt{3}+\frac{15}{4} \\ \frac{7}{4}\sqrt{3}-\frac{7}{4} & \frac{15}{4}\sqrt{3}-\frac{19}{4} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}\sqrt{3}-\frac{27}{4} & -\frac{15}{4}\sqrt{3}-\frac{15}{4} \\ \frac{7}{4}\sqrt{3}+\frac{7}{4} & \frac{15}{4}\sqrt{3}-\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2+6M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 13. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A-3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A+\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + a & = & 3, \\ b^2 + b & = & -1. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + X - 3$ et $X^2 + X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 13$, et : $\Delta_2 = -3$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right), \ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right), \ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right), \ \text{et :} \ \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, donc :
$M = \begin{pmatrix} -a + 2\,b & -a + b \\ 2\,a - 2\,b & 2\,a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 + M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{13} - i\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ \sqrt{13} + i\sqrt{3} & \sqrt{13} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{13} + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ -\sqrt{13} - i\sqrt{3} & -\sqrt{13} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{13} - i\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ -\sqrt{13} + i\sqrt{3} & -\sqrt{13} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \text{et :} \ M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{13} + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ \sqrt{13} - i\sqrt{3} & \sqrt{13} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 14. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{2}, -i\right), \quad \left(-\sqrt{2}, -i\right), \quad \left(\sqrt{2}, i\right), \quad \text{et :} \quad \left(-\sqrt{2}, i\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M =$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b & \frac{1}{3}\,a - \frac{1}{3}\,b \\ \frac{2}{3}\,a - \frac{2}{3}\,b & \frac{2}{3}\,a + \frac{1}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i & \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}i \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}i \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}i \\ -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i & \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}i \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}i \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}i \\ -\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 15. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la deuxième colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_1 + 2X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ c^2 = 2, \\ ab + bc = -1. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ c = \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}b = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ c = -\sqrt{2} \\ 0 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\sqrt{2}, \\ c = \sqrt{2} \\ 0 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\sqrt{2}, \\ c = -\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}b = -1 \end{cases}$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a, b, c) qui conviennent : $(a, b, c) = \left(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ et $(a, b, c) = \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{3}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{3}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 16. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 1

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - M\right) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A

et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A-\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a &= 1, \\ b^2 - b &= -1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 1$ et $X^2 - X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 5$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M = A$.

Corrigé 17. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré

par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & -1, \\ b^2 & = & -2. \end{array} \right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(i, -i\sqrt{2}\right), \quad \left(i, i\sqrt{2}\right), \quad \left(-i, -i\sqrt{2}\right), \quad \text{et :} \quad \left(-i, i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 5\,a - 4\,b & a - b \\ -20\,a + 20\,b & -4\,a + 5\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4i\sqrt{2} + 5i & i\sqrt{2} + i \\ -20i\sqrt{2} - 20i & -5i\sqrt{2} - 4i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -4i\sqrt{2} + 5i & -i\sqrt{2} + i \\ 20i\sqrt{2} - 20i & 5i\sqrt{2} - 4i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 4i\sqrt{2} - 5i & i\sqrt{2} - i \\ -20i\sqrt{2} + 20i & -5i\sqrt{2} + 4i \end{pmatrix}, \quad \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -4i\sqrt{2} - 5i & -i\sqrt{2} - i \\ 20i\sqrt{2} + 20i & 5i\sqrt{2} + 4i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 18. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 4) \cdot (X - 3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, 4\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) =$

$AX_1 = 4X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - M\right) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - a & = & 4, \\ b^2 - b & = & 3. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 4$ et $X^2 - X - 3$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 17$, et : $\Delta_2 = 13$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right), \text{ et : } \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 3\,a - 2\,b & -6\,a + 6\,b \\ a - b & -2\,a + 3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{17} - \sqrt{13} + \frac{1}{2} & 3\sqrt{17} + 3\sqrt{13} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}\sqrt{13} & \sqrt{17} + \frac{3}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{17} + \sqrt{13} + \frac{1}{2} & 3\sqrt{17} - 3\sqrt{13} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\sqrt{13} & \sqrt{17} - \frac{3}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{17}+\sqrt{13}+\frac{1}{2} & -3\sqrt{17}-3\sqrt{13} \\ \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\sqrt{13} & -\sqrt{17}-\frac{3}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{17}-\sqrt{13}+\frac{1}{2} & -3\sqrt{17}+3\sqrt{13} \\ \frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{1}{2}\sqrt{13} & -\sqrt{17}+\frac{3}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 19. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-15)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 15\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 15\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{15} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 15X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{15} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - M\right)\cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 15\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 15\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 15\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - a & = & 15, \\ b^2 - b & = & -1. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 15$ et $X^2 - X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 61$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M = A$.

Corrigé 20. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-5)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{5, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 5, \\ b^2 &= -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{5}, i\right), \ \left(\sqrt{5}, -i\right), \ \left(-\sqrt{5}, i\right), \ \text{et : } \left(-\sqrt{5}, -i\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{11}{6} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} \frac{11}{6}\,a - \frac{5}{6}\,b & \frac{11}{6}\,a - \frac{11}{6}\,b \\ -\frac{5}{6}\,a + \frac{5}{6}\,b & -\frac{5}{6}\,a + \frac{11}{6}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{6}\sqrt{5} - \frac{5}{6}i & \frac{11}{6}\sqrt{5} - \frac{11}{6}i \\ -\frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{5}{6}i & -\frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{11}{6}i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{6}\sqrt{5} + \frac{5}{6}i & \frac{11}{6}\sqrt{5} + \frac{11}{6}i \\ -\frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{5}{6}i & -\frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{11}{6}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{6}\sqrt{5} - \frac{5}{6}i & -\frac{11}{6}\sqrt{5} - \frac{11}{6}i \\ \frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{5}{6}i & \frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{11}{6}i \end{pmatrix}, \text{ et} : M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{6}\sqrt{5} + \frac{5}{6}i & -\frac{11}{6}\sqrt{5} + \frac{11}{6}i \\ \frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{5}{6}i & \frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{11}{6}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 21. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$. On remarque que A admet une valeur propre strictement négative, et cela suffira à démontrer qu'il ne peut pas exister $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = A$. En effet, soit M une telle matrice, dont on note λ et μ les valeurs propres complexes comptées avec multiplicités. En trigonalisant M (ce qui est toujours possible quitte à se placer sur $\mathbb{C}$), on montre aisément que les valeurs propres de M^2 sont λ^2 et μ^2. Or : $M^2 = A$, et les valeurs propres de A viennent d'être explicitées. Donc, quitte à échanger λ et μ, on a : $\lambda^2 = 0$, et : $\mu^2 = -1$. On en déduit : $\lambda \in \{0\}$, et : $\mu \in \{-i, i\}$. Mais c'est impossible : en effet, si une matrice *réelle* admet une valeur propre *complexe non réelle*, alors son conjugué doit aussi être valeur propre, et ce n'est pas le cas ici au vu des conditions sur λ et μ : les valeurs propres λ et μ ne peuvent pas être conjuguées. Cette absurdité démontre que M ne peut pas exister. ← page 2

Corrigé 22. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a = 3, \\ b^2 + b = -1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + X - 3$ et $X^2 + X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 13$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$.

Corrigé 23. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-5)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 5\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 5, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{5}, -1\right), \ \left(\sqrt{5}, 1\right), \ \left(\sqrt{5}, -1\right), \ \text{ et : } \ \left(-\sqrt{5}, 1\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a+2\,b & a-b \\ -2\,a+2\,b & 2\,a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-2 & -\sqrt{5}+1 \\ 2\sqrt{5}-2 & -2\sqrt{5}+1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}+2 & \sqrt{5}-1 \\ -2\sqrt{5}+2 & 2\sqrt{5}-1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}-2 & \sqrt{5}+1 \\ -2\sqrt{5}-2 & 2\sqrt{5}+1 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}+2 & -\sqrt{5}-1 \\ 2\sqrt{5}+2 & -2\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 24. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-5)\cdot(X-3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, 5\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par

un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2+3M=A$, on a : $AM=\left(M^2+3M\right)\cdot M=M^3+3M^2=M\cdot\left(M^2+3M\right)=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1\in\ker(A-5\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-5\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-5\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1)=aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2)=bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M=P\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A=P\begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2+3M=A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^2P^{-1}+3P\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}\\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^2+3\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+3\,a & 0\\ 0 & b^2+3\,b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2+3\,a &= 5,\\ b^2+3\,b &= 3.\end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2+3\,X-5$ et $X^2+3\,X-3$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1=29$, et : $\Delta_2=21$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{3}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{3}{2}$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\right),\ \text{et :}\ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\right).$$

Alors, la relation $M=P\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$, donc : $M=\begin{pmatrix} \frac{5}{2}\,a-\frac{3}{2}\,b & -\frac{5}{2}\,a+\frac{5}{2}\,b\\ \frac{3}{2}\,a-\frac{3}{2}\,b & -\frac{3}{2}\,a+\frac{5}{2}\,b\end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2+3M=A$ sont :

$$M_1=\begin{pmatrix} -\frac{5}{4}\sqrt{29}-\frac{3}{4}\sqrt{21}-\frac{3}{2} & \frac{5}{4}\sqrt{29}+\frac{5}{4}\sqrt{21}\\ -\frac{3}{4}\sqrt{29}-\frac{3}{4}\sqrt{21} & \frac{3}{4}\sqrt{29}+\frac{5}{4}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{29}+\frac{3}{4}\sqrt{21}-\frac{3}{2} & -\frac{5}{4}\sqrt{29}-\frac{5}{4}\sqrt{21}\\ \frac{3}{4}\sqrt{29}+\frac{3}{4}\sqrt{21} & -\frac{3}{4}\sqrt{29}-\frac{5}{4}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{29}-\frac{3}{4}\sqrt{21}-\frac{3}{2} & -\frac{5}{4}\sqrt{29}+\frac{5}{4}\sqrt{21}\\ \frac{3}{4}\sqrt{29}-\frac{3}{4}\sqrt{21} & -\frac{3}{4}\sqrt{29}+\frac{5}{4}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\end{pmatrix},\ \text{et :}\ M_4=\begin{pmatrix} -\frac{5}{4}\sqrt{29}+\frac{3}{4}\sqrt{21}-\frac{3}{2} & \frac{5}{4}\sqrt{29}-\frac{5}{4}\sqrt{21}\\ -\frac{3}{4}\sqrt{29}+\frac{3}{4}\sqrt{21} & \frac{3}{4}\sqrt{29}-\frac{5}{4}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2+3M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 25. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -3\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 41M = A$, on a : $AM = \big(M^2 + 41M\big)\cdot M = M^3 + 41M^2 = M \cdot \big(M^2 + 41M\big) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + 41M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 41P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 41 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 41\,a & 0 \\ 0 & b^2 + 41\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + 41\,a &= 1, \\ b^2 + 41\,b &= -3. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + 41\,X - 1$ et $X^2 + 41\,X + 3$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 1685$, et : $\Delta_2 = 1669$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{1685} - \frac{41}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{1685} - \frac{41}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{1669} - \frac{41}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{1669} - \frac{41}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1685} - \frac{41}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{1669} - \frac{41}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{1685} - \frac{41}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{1669} - \frac{41}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{1685} - \frac{41}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{1669} - \frac{41}{2}\right), \text{ et : } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{1685} - \right.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}\,a - \frac{7}{2}\,b & \frac{9}{2}\,a - \frac{9}{2}\,b \\ -\frac{7}{2}\,a + \frac{7}{2}\,b & -\frac{7}{2}\,a + \frac{9}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 + 41M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4}\sqrt{1685} + \frac{7}{4}\sqrt{1669} - \frac{41}{2} & -\frac{9}{4}\sqrt{1685} + \frac{9}{4}\sqrt{1669} \\ \frac{7}{4}\sqrt{1685} - \frac{7}{4}\sqrt{1669} & \frac{7}{4}\sqrt{1685} - \frac{9}{4}\sqrt{1669} - \frac{41}{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4}\sqrt{1685} + \frac{7}{4}\sqrt{1669} - \frac{41}{2} & \frac{9}{4}\sqrt{1685} + \frac{9}{4}\sqrt{1669} \\ -\frac{7}{4}\sqrt{1685} - \frac{7}{4}\sqrt{1669} & -\frac{7}{4}\sqrt{1685} - \frac{9}{4}\sqrt{1669} - \frac{41}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4}\sqrt{1685} - \frac{7}{4}\sqrt{1669} - \frac{41}{2} & \frac{9}{4}\sqrt{1685} - \frac{9}{4}\sqrt{1669} \\ -\frac{7}{4}\sqrt{1685} + \frac{7}{4}\sqrt{1669} & -\frac{7}{4}\sqrt{1685} + \frac{9}{4}\sqrt{1669} - \frac{41}{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4}\sqrt{1685} - \frac{7}{4}\sqrt{1669} - \frac{41}{2} & -\frac{9}{4}\sqrt{1685} - \frac{9}{4}\sqrt{1669} \\ \frac{7}{4}\sqrt{1685} + \frac{7}{4}\sqrt{1669} & \frac{7}{4}\sqrt{1685} + \frac{9}{4}\sqrt{1669} - \frac{41}{2} \end{pmatrix}$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + 41M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 26. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -3\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3\end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 0, \\ b^2 & = & -3. \end{array}\right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(0, i\sqrt{3}\right), \quad \text{et : } \left(0, -i\sqrt{3}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}b & -\frac{4}{3}a + \frac{4}{3}b \\ \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b & -\frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b\end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}i\sqrt{3} & \frac{4}{3}i\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}i\sqrt{3} & \frac{4}{3}i\sqrt{3}\end{pmatrix}, \quad \text{et : } M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i\sqrt{3} & -\frac{4}{3}i\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}i\sqrt{3} & -\frac{4}{3}i\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 27. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1, 0)\,, \quad \text{et :} \quad (-1, 0)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 2\,a - b & a - b \\ -2\,a + 2\,b & -a + 2\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 28. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 2) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 2, \\ b^2 &= 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{2}, 0\right), \quad \text{et :} \quad \left(\sqrt{2}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b & -\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b \\ \frac{3}{2}\,a - \frac{3}{2}\,b & -\frac{1}{2}\,a + \frac{3}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{et :}\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 29. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-16)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{16, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 16\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A-\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{7}{8}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}-\frac{7}{8}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 16X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}16 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}16 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix}1 & -\frac{7}{8}\\1 & 1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix}16 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - M = A$, on a : $AM = \left(M^2-M\right)\cdot M = M^3 - M^2 = M\cdot\left(M^2-M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A-16\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-16\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-16\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix}16 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} - P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}16 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2-a & 0\\0 & b^2-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2-a & = & 16,\\ b^2-b & = & 1.\end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 16$ et $X^2 - X - 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 65$, et : $\Delta_2 = 5$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{65}+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{65}+\frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{65}+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{65}+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{65}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right), \text{ et : } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{65}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix}1 & -\frac{7}{8}\\1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{8}{15} & \frac{7}{15}\\-\frac{8}{15} & \frac{8}{15}\end{pmatrix}$, donc : $M =$

$\begin{pmatrix} \frac{8}{15}\,a+\frac{7}{15}\,b & \frac{7}{15}\,a-\frac{7}{15}\,b \\ \frac{8}{15}\,a-\frac{8}{15}\,b & \frac{7}{15}\,a+\frac{8}{15}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2-M=A$ sont :

$$M_1=\begin{pmatrix} -\frac{4}{15}\sqrt{65}-\frac{7}{30}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{7}{30}\sqrt{65}+\frac{7}{30}\sqrt{5} \\ -\frac{4}{15}\sqrt{65}+\frac{4}{15}\sqrt{5} & -\frac{7}{30}\sqrt{65}-\frac{4}{15}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix} \frac{4}{15}\sqrt{65}-\frac{7}{30}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & \frac{7}{30}\sqrt{65}+\frac{7}{30}\sqrt{5} \\ \frac{4}{15}\sqrt{65}+\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{7}{30}\sqrt{65}-\frac{4}{15}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{pmatrix} \frac{4}{15}\sqrt{65}+\frac{7}{30}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & \frac{7}{30}\sqrt{65}-\frac{7}{30}\sqrt{5} \\ \frac{4}{15}\sqrt{65}-\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{7}{30}\sqrt{65}+\frac{4}{15}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \text{et} : M_4=\begin{pmatrix} -\frac{4}{15}\sqrt{65}+\frac{7}{30}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{7}{30}\sqrt{65}-\frac{7}{30}\sqrt{5} \\ -\frac{4}{15}\sqrt{65}-\frac{4}{15}\sqrt{5} & -\frac{7}{30}\sqrt{65}+\frac{4}{15}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2-M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 30. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X-1)\cdot(X+4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{1,-4\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A-\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\1\end{pmatrix}\right),\quad \ker(A+4\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=X_1$ et $f_A(X_2)=AX_2=-4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix}\frac{6}{7}&\frac{1}{2}\\1&1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2+M=A$, on a : $AM=\left(M^2+M\right)\cdot M=M^3+M^2=M\cdot\left(M^2+M\right)=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1)=aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2)=bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2+M=A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2P^{-1}+P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2+a&0\\0&b^2+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2+a &= 1, \\ b^2+b &= -4. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes X^2+X-1 et X^2+X+4. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 5$, et : $\Delta_2 = -15$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}i\sqrt{15}-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{15}-\frac{1}{2}$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{15}-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{15}-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{15}-\frac{1}{2}\right),\ \text{ et : }\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{15}-\frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{14}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{12}{5}a-\frac{7}{5}b & -\frac{6}{5}a+\frac{6}{5}b \\ \frac{14}{5}a-\frac{14}{5}b & -\frac{7}{5}a+\frac{12}{5}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2+M=A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{10}i\sqrt{15}+\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{5}i\sqrt{15}-\frac{3}{5}\sqrt{5} \\ \frac{7}{5}i\sqrt{15}+\frac{7}{5}\sqrt{5} & -\frac{6}{5}i\sqrt{15}-\frac{7}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{10}i\sqrt{15}-\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{5}i\sqrt{15}+\frac{3}{5}\sqrt{5} \\ \frac{7}{5}i\sqrt{15}-\frac{7}{5}\sqrt{5} & -\frac{6}{5}i\sqrt{15}+\frac{7}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10}i\sqrt{15}-\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & \frac{3}{5}i\sqrt{15}+\frac{3}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{7}{5}i\sqrt{15}-\frac{7}{5}\sqrt{5} & \frac{6}{5}i\sqrt{15}+\frac{7}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10}i\sqrt{15}+\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & \frac{3}{5}i\sqrt{15}-\frac{3}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{7}{5}i\sqrt{15}+\frac{7}{5}\sqrt{5} & \frac{6}{5}i\sqrt{15}-\frac{7}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2+M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 31. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X\cdot(X+6)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,-6\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right),\quad \ker(A+6\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2-2M = A$, on a : $AM = (M^2-2M)\cdot M = M^3-2M^2 = M\cdot(M^2-2M) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En

reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 2\,a = 0, \\ b^2 - 2\,b = -6. \end{cases}$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = 2$. Pour déterminer les valeurs de b vérifiant la seconde équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - 2\,X + 6$. Son discriminant est : $\Delta = -20$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - 2M = A$.

Corrigé 32. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - 14M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - 14M\right) \cdot M = M^3 - 14M^2 = M \cdot \left(M^2 - 14M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$

tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 14M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 14P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 14 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - 14\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 14\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 14\,a &= 2, \\ b^2 - 14\,b &= 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = 14$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - 14\,X - 2$. Son discriminant est : $\Delta = 204$. Les racines de ce polynôme sont donc $\sqrt{51} + 7$ et $-\sqrt{51} + 7$.

Corrigé 33. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X + 1) \cdot (X + 2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ b^2 = -2. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(i, -i\sqrt{2}\right), \quad \left(i, i\sqrt{2}\right), \quad \left(-i, -i\sqrt{2}\right), \quad \text{et : } \left(-i, i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 2a - b & -2a + 2b \\ a - b & -a + 2b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} + 2i & -2i\sqrt{2} - 2i \\ i\sqrt{2} + i & -2i\sqrt{2} - i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} + 2i & 2i\sqrt{2} - 2i \\ -i\sqrt{2} + i & 2i\sqrt{2} - i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} - 2i & -2i\sqrt{2} + 2i \\ i\sqrt{2} - i & -2i\sqrt{2} + i \end{pmatrix}, \quad \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} - 2i & 2i\sqrt{2} + 2i \\ -i\sqrt{2} - i & 2i\sqrt{2} + i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 34. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 2

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5X_1 + X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose alors : $T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ c^2 = 1, \\ ab + bc = -5. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\begin{cases} a = 1, \\ c = 1 \\ 2b = -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1, \\ c = -1 \\ 0 = -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1, \\ c = 1 \\ 0 = -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1, \\ c = -1 \\ -2b = -5 \end{cases}$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a, b, c) qui conviennent : $(a, b, c) = \left(1, -\frac{5}{2}, 1\right)$ et $(a, b, c) = \left(-1, \frac{5}{2}, -1\right)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 35. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,3\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A-3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A-\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2+6M = A$, on a : $AM = \left(M^2+6M\right)\cdot M = M^3+6M^2 = M\cdot\left(M^2+6M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1\in\ker(A-3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2+6M = A &\iff P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2P^{-1}+6P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2+6\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}a^2+6\,a&0\\0&b^2+6\,b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2+6\,a = 3,\\ b^2+6\,b = 1.\end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2+6\,X-3$ et $X^2+6\,X-1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 48$, et : $\Delta_2 = 40$. Les racines du premier polynôme sont donc $2\sqrt{3}-3$ et $-2\sqrt{3}-3$, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{10}-3$ et $-\sqrt{10}-3$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(2\sqrt{3}-3,\sqrt{10}-3\right),\ \left(2\sqrt{3}-3,-\sqrt{10}-3\right),\ \left(-2\sqrt{3}-3,\sqrt{10}-3\right),\ \text{ et : }\ \left(-2\sqrt{3}-3,-\sqrt{10}-3\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, donc : $M =$

$\begin{pmatrix} -a+2\,b & -2\,a+2\,b \\ a-b & 2\,a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2+6M=A$ sont :

$$M_1=\begin{pmatrix} 2\sqrt{10}-2\sqrt{3}-3 & 2\sqrt{10}-4\sqrt{3} \\ -\sqrt{10}+2\sqrt{3} & -\sqrt{10}+4\sqrt{3}-3 \end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix} -2\sqrt{10}-2\sqrt{3}-3 & -2\sqrt{10}-4\sqrt{3} \\ \sqrt{10}+2\sqrt{3} & \sqrt{10}+4\sqrt{3}-3 \end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{pmatrix} 2\sqrt{10}+2\sqrt{3}-3 & 2\sqrt{10}+4\sqrt{3} \\ -\sqrt{10}-2\sqrt{3} & -\sqrt{10}-4\sqrt{3}-3 \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4=\begin{pmatrix} -2\sqrt{10}+2\sqrt{3}-3 & -2\sqrt{10}+4\sqrt{3} \\ \sqrt{10}-2\sqrt{3} & \sqrt{10}-4\sqrt{3}-3 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2+6M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 36. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X\cdot(X+4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,-4\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right),\quad \ker(A+4\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=0$ et $f_A(X_2)=AX_2=-4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix}0&0\\0&-4\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix}0&0\\0&-4\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{3}\\1&1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D=\begin{pmatrix}0&0\\0&-4\end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2=A$, on a : $AM=M^2\cdot M=M^3=M\cdot M^2=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1\in\ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1)=aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2)=bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A=P\begin{pmatrix}0&0\\0&-4\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2=A &\iff P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2P^{-1}=P\begin{pmatrix}0&0\\0&-4\end{pmatrix}P^{-1}\\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&-4\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-4\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 0, \\ b^2 &= -4. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(0, 2i), \quad \text{et :} \quad (0, -2i).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b & \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b \\ \frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b & \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{3}{2}i & \frac{3}{2}i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \\ \frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 37. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 1, \\ b^2 & = & -1. \end{array} \right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(-1, -i)\,,\ (-1, i)\,,\ (1, -i)\,,\quad \text{et :}\quad (1, i)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b & -\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b \\ \frac{3}{2}\,a - \frac{3}{2}\,b & -\frac{1}{2}\,a + \frac{3}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}i - \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}i + \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i - \frac{3}{2} & \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}i - \frac{3}{2} & \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}i + \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}i - \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i + \frac{3}{2} & \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}i + \frac{3}{2} & \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 38. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par

un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(1,0), \quad \text{et :} \quad (-1,0).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -8\,a + 9\,b & 4\,a - 4\,b \\ -18\,a + 18\,b & 9\,a - 8\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 18 & -9 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 39. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que

$f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{2}, -i\right), \ \left(-\sqrt{2}, -i\right), \ \left(\sqrt{2}, i\right), \ \text{ et : } \left(-\sqrt{2}, i\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b & \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b \\ \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b & \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i \\ \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}i \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3}i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}i \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 40. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$. On remarque que A admet une valeur propre strictement négative, et cela suffira à démontrer qu'il ne peut pas exister $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = A$. En effet, soit M une telle matrice, dont on note λ et μ les valeurs propres complexes comptées avec multiplicités. En trigonalisant M (ce qui est toujours possible quitte à se placer sur $\mathbb{C}$), on montre aisément que les valeurs propres de M^2 sont λ^2 et μ^2. Or : $M^2 = A$, et les valeurs propres de A viennent d'être explicitées. Donc, quitte à échanger λ et μ, on a : $\lambda^2 = -1$, et : $\mu^2 = 0$. On en déduit : $\lambda \in \{-i, i\}$, et : $\mu \in \{0\}$. Mais c'est impossible : en effet, si une matrice *réelle* admet une valeur propre *complexe non réelle*, alors son conjugué doit aussi être valeur propre, et ce n'est pas le cas ici au vu des conditions sur λ et μ : les valeurs propres λ et μ ne peuvent pas être conjuguées. Cette absurdité démontre que M ne peut pas exister. ← page 3

Corrigé 41. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+a & 0 \\ 0 & b^2+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a &= 1, \\ b^2 + b &= -1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + X - 1$ et $X^2 + X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 5$, et : $\Delta_2 = -3$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right),\ \text{ et : } \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -2\,a + 3\,b & 4\,a - 4\,b \\ -\frac{3}{2}\,a + \frac{3}{2}\,b & 3\,a - 2\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 + M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} - \frac{3}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -2\sqrt{5} + 2i\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}\sqrt{5} - \frac{3}{4}i\sqrt{3} & -\frac{3}{2}\sqrt{5} + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} - \frac{3}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} & 2\sqrt{5} + 2i\sqrt{3} \\ -\frac{3}{4}\sqrt{5} - \frac{3}{4}i\sqrt{3} & \frac{3}{2}\sqrt{5} + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} + \frac{3}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -2\sqrt{5} - 2i\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}i\sqrt{3} & -\frac{3}{2}\sqrt{5} - i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} + \frac{3}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} & 2\sqrt{5} - 2i\sqrt{3} \\ -\frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}i\sqrt{3} & \frac{3}{2}\sqrt{5} - i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 42. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4X_1 - X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose alors : $T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$.
Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & ab + bc + b \\ 0 & c^2 + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + a & = & -1, \\ c^2 + c & = & -1, \\ ab + bc + b & = & 4. \end{array} \right.$$

Déterminons d'abord les solutions de la première équation (qui donne aussi les solutions de la seconde). Cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + X + 1$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$.

Corrigé 43. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot (X + 2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - 42M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - 42M\right) \cdot M = M^3 - 42M^2 = M \cdot \left(M^2 - 42M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 42M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 42P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 42 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 42\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 42\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 42\,a &= 1, \\ b^2 - 42\,b &= -2. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 42\,X - 1$ et $X^2 - 42\,X + 2$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 1768$, et : $\Delta_2 = 1756$. Les racines du premier polynôme sont donc $\sqrt{442} + 21$ et $-\sqrt{442} + 21$, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{439} + 21$ et $-\sqrt{439} + 21$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\sqrt{442} + 21, \sqrt{439} + 21\right), \ \left(-\sqrt{442} + 21, -\sqrt{439} + 21\right), \ \left(\sqrt{442} + 21, \sqrt{439} + 21\right), \ \text{ et : } \ \left(\sqrt{442} + 21, -\sqrt{439} + 21\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} 2\,a - b & a - b \\ -2\,a + 2\,b & -a + 2\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - 42M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{442} - \sqrt{439} + 21 & -\sqrt{442} - \sqrt{439} \\ 2\sqrt{442} + 2\sqrt{439} & \sqrt{442} + 2\sqrt{439} + 21 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{442} + \sqrt{439} + 21 & -\sqrt{442} + \sqrt{439} \\ 2\sqrt{442} - 2\sqrt{439} & \sqrt{442} - 2\sqrt{439} + 21 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{442} - \sqrt{439} + 21 & \sqrt{442} - \sqrt{439} \\ -2\sqrt{442} + 2\sqrt{439} & -\sqrt{442} + 2\sqrt{439} + 21 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{442} + \sqrt{439} + 21 & \sqrt{442} + \sqrt{439} \\ -2\sqrt{442} - 2\sqrt{439} & -\sqrt{442} - 2\sqrt{439} + 21 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - 42M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 44. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-7)\cdot(X-4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{4, 7\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{5}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 7\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 7\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 7\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 7, \\ b^2 = 4. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{7}, -2\right), \ \left(-\sqrt{7}, 2\right), \ \left(\sqrt{7}, 2\right), \ \text{ et : } \left(-\sqrt{7}, -2\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{5}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\,a - \frac{5}{3}\,b & \frac{10}{3}\,a - \frac{10}{3}\,b \\ -\frac{4}{3}\,a + \frac{4}{3}\,b & -\frac{5}{3}\,a + \frac{8}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\sqrt{7} + \frac{10}{3} & \frac{10}{3}\sqrt{7} + \frac{20}{3} \\ -\frac{4}{3}\sqrt{7} - \frac{8}{3} & -\frac{5}{3}\sqrt{7} - \frac{16}{3} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3}\sqrt{7} - \frac{10}{3} & -\frac{10}{3}\sqrt{7} - \frac{20}{3} \\ \frac{4}{3}\sqrt{7} + \frac{8}{3} & \frac{5}{3}\sqrt{7} + \frac{16}{3} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\sqrt{7} - \frac{10}{3} & \frac{10}{3}\sqrt{7} - \frac{20}{3} \\ -\frac{4}{3}\sqrt{7} + \frac{8}{3} & -\frac{5}{3}\sqrt{7} + \frac{16}{3} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3}\sqrt{7} + \frac{10}{3} & -\frac{10}{3}\sqrt{7} + \frac{20}{3} \\ \frac{4}{3}\sqrt{7} - \frac{8}{3} & \frac{5}{3}\sqrt{7} - \frac{16}{3} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 45. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1 + X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose alors : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - M\right) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2)

(comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage. Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - a & ab + bc - b \\ 0 & c^2 - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - a & = & 1, \\ c^2 - c & = & 1, \\ ab + bc - b & = & 1. \end{array} \right.$$

Déterminons d'abord les solutions de la première équation (qui donne aussi les solutions de la seconde). Cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 5$. On en déduit que les solutions de la première équation sont $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$. De même pour c. Les couples (a,c) qui vérifient les deux premières équations sont donc : $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$ et : $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$. On remarque cependant que quand a et c sont distincts, la dernière équation du système linéaire ci-dessus équivaut à : $0 = 1$, ce qui n'admet pas de solution. Il faut donc exclure les couples de solutions distinctes, et ce système linéaire équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \\ c & = & \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ \sqrt{5}b & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{ou :} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \\ c & = & -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ -\sqrt{5}b & = & 1 \end{array} \right.$$

Nous avons donc deux triplets (a,b,c) qui conviennent : $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$ et $(a,b,c) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 - M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} & -\frac{4}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{9}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et :

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} & \frac{4}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{9}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 46. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que

$f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a = 1, \\ b^2 + b = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = -1$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 5$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.

Corrigé 47. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 3) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 3M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + 3M\right) \cdot M = M^3 + 3M^2 = M \cdot \left(M^2 + 3M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2 + 3M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 3P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 3 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 3\,a & 0 \\ 0 & b^2 + 3\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + 3\,a & = & 3, \\ b^2 + 3\,b & = & -1. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + 3\,X - 3$ et $X^2 + 3\,X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 21$, et : $\Delta_2 = 5$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right), \text{ et : } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, donc :
$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\,a + \frac{5}{4}\,b & -\frac{5}{4}\,a + \frac{5}{4}\,b \\ \frac{1}{4}\,a - \frac{1}{4}\,b & \frac{5}{4}\,a - \frac{1}{4}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 + 3M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\sqrt{21} + \frac{5}{8}\sqrt{5} - \frac{3}{2} & \frac{5}{8}\sqrt{21} + \frac{5}{8}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{8}\sqrt{21} - \frac{1}{8}\sqrt{5} & -\frac{5}{8}\sqrt{21} - \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}\sqrt{21} - \frac{5}{8}\sqrt{5} - \frac{3}{2} & -\frac{5}{8}\sqrt{21} - \frac{5}{8}\sqrt{5} \\ \frac{1}{8}\sqrt{21} + \frac{1}{8}\sqrt{5} & \frac{5}{8}\sqrt{21} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}\sqrt{21} + \frac{5}{8}\sqrt{5} - \frac{3}{2} & -\frac{5}{8}\sqrt{21} + \frac{5}{8}\sqrt{5} \\ \frac{1}{8}\sqrt{21} - \frac{1}{8}\sqrt{5} & \frac{5}{8}\sqrt{21} - \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\sqrt{21} - \frac{5}{8}\sqrt{5} - \frac{3}{2} & \frac{5}{8}\sqrt{21} - \frac{5}{8}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{8}\sqrt{21} + \frac{1}{8}\sqrt{5} & -\frac{5}{8}\sqrt{21} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2+3M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 48. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0\}$. Cela suffit déjà à conclure qu'il n'y a pas de solution à l'équation $M^2=A$. En effet la matrice A est nilpotente (le spectre nous permet de déduire que : $\chi_A = X^2$, donc : $\chi_A(A)=A^2=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton). Par conséquent, si $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant : $M^2=A$, alors $M^4=A^2=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, donc M est nilpotente. On en déduit d'une part que M n'est pas inversible (on a : $(\det(M))^4=\det(M^4)=\det\left(0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)=0$), donc 0 est valeur propre de M, et d'autre part le spectre (complexe) de M est inclus dans les racines complexes du polynôme annulateur X^4 trouvé, ce qui permet de conclure que l'unique valeur propre complexe de M est 0. Alors : $\chi_M=(X-0)^2=X^2$, et comme pour A on en déduit que $M^2=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Or $M^2=A\neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$: contradiction. Il n'y a donc pas de solution à l'équation $M^2=A$. ← page 3

Corrigé 49. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A-\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right),\quad \ker(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=X_1$ et $f_A(X_2)=AX_2=0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix}-2&-\frac{5}{3}\\1&1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2-M=A$, on a : $AM=\left(M^2-M\right)\cdot M=M^3-M^2=M\cdot\left(M^2-M\right)=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1)=aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2)=bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}M^2-M=A &\iff P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2P^{-1}-P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}\\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\ &\iff\begin{pmatrix}a^2-a&0\\0&b^2-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a &= 1, \\ b^2 - b &= 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = 1$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 5$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$.

Corrigé 50. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 3

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 5M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + 5M\right) \cdot M = M^3 + 5M^2 = M \cdot \left(M^2 + 5M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + 5M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 5P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 5 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 5a & 0 \\ 0 & b^2 + 5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + 5a &= 1, \\ b^2 + 5b &= -2. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + 5X - 1$ et $X^2 + 5X + 2$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 29$, et : $\Delta_2 = 17$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{5}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{5}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{5}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{5}{2}$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{5}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{5}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{5}{2}\right),\ \text{et : } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{5}{2}\right).$$

Alors, la relation $M=P\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, donc : $M=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b & \frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b\\ \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b & \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2+5M=A$ sont :

$$M_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{29}-\frac{1}{6}\sqrt{17}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{29}+\frac{1}{3}\sqrt{17}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{29}+\frac{1}{6}\sqrt{17} & -\frac{1}{6}\sqrt{29}-\frac{1}{3}\sqrt{17}-\frac{5}{2}\end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{29}-\frac{1}{6}\sqrt{17}-\frac{5}{2} & \frac{1}{3}\sqrt{29}+\frac{1}{3}\sqrt{17}\\ \frac{1}{6}\sqrt{29}+\frac{1}{6}\sqrt{17} & \frac{1}{6}\sqrt{29}-\frac{1}{3}\sqrt{17}-\frac{5}{2}\end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{29}+\frac{1}{6}\sqrt{17}-\frac{5}{2} & \frac{1}{3}\sqrt{29}-\frac{1}{3}\sqrt{17}\\ \frac{1}{6}\sqrt{29}-\frac{1}{6}\sqrt{17} & \frac{1}{6}\sqrt{29}+\frac{1}{3}\sqrt{17}-\frac{5}{2}\end{pmatrix},\ \text{et : } M_4=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{29}+\frac{1}{6}\sqrt{17}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{29}-\frac{1}{3}\sqrt{17}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{29}-\frac{1}{6}\sqrt{17} & -\frac{1}{6}\sqrt{29}+\frac{1}{3}\sqrt{17}-\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2+5M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 51. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A=X\cdot(X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,-3\}$. On remarque que A admet une valeur propre strictement négative, et cela suffira à démontrer qu'il ne peut pas exister $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2=A$. En effet, soit M une telle matrice, dont on note λ et μ les valeurs propres complexes comptées avec multiplicités. En trigonalisant M (ce qui est toujours possible quitte à se placer sur $\mathbb{C}$), on montre aisément que les valeurs propres de M^2 sont λ^2 et μ^2. Or : $M^2=A$, et les valeurs propres de A viennent d'être explicitées. Donc, quitte à échanger λ et μ, on a : $\lambda^2=0$, et : $\mu^2=-3$. On en déduit : $\lambda\in\{0\}$, et : $\mu\in\left\{i\sqrt{3},-i\sqrt{3}\right\}$. Mais c'est impossible : en effet, si une matrice *réelle* admet une valeur propre *complexe non réelle*, alors son conjugué doit aussi être valeur propre, et ce n'est pas le cas ici au vu des conditions sur λ et μ : les valeurs propres λ et μ ne peuvent pas être conjuguées. Cette absurdité démontre que M ne peut pas exister. ← page 3

Corrigé 52. Soit $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que l'on a : $M^2=A$. Alors : $\det(A)=\det\left(M^2\right)=(\det(M))^2\geqslant 0$ car $\det(M)\in\mathbb{R}$ et un réel au carré est positif. Or un calcul direct montre que l'on a : $\det(A)=-1<0$: contradiction. Par l'absurde, on a montré qu'il n'existe pas de solution à l'équation $M^2=A$ d'inconnue $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. ← page 3

Corrigé 53. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A+\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1,X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1,X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la deuxième colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=-X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2)=AX_2=\begin{pmatrix}4\\ -7\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=-6X_1-X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $T = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & -1, \\ c^2 & = & -1, \\ ab + bc & = & -6. \end{array} \right.$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & i, \\ c & = & i \\ 2i\, b & = & -6 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & i, \\ c & = & -i \\ 0 & = & -6 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -i, \\ c & = & i \\ 0 & = & -6 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -i, \\ c & = & -i \\ -2i\, b & = & -6 \end{array} \right.$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a, b, c) qui conviennent : $(a, b, c) = (i, 3i, i)$ et $(a, b, c) = (-i, -3i, -i)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 3i \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & -2i \\ \frac{9}{2}i & 4i \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -3i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 2i \\ -\frac{9}{2}i & -4i \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 54. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right),\quad \ker(A+\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=0$ et $f_A(X_2)=AX_2=-X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\1&1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2=A$, on a : $AM=M^2\cdot M=M^3=M\cdot M^2=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1\in\ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1)=aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2)=bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A=P\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}M^2=A&\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2P^{-1}=P\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\\&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\\&\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}a^2&=&0,\\ b^2&=&-1.\end{array}\right.$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(0,-i),\quad\text{et}:\quad(0,i).$$

Alors, la relation $M=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\1&1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-1\end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -a+2\,b & -a+b \\ 2\,a-2\,b & 2\,a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2i & -i \\ 2i & i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 2i & i \\ -2i & -i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 55. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 14M = A$, on a : $AM = \big(M^2+14M\big)\cdot M = M^3 + 14M^2 = M \cdot \big(M^2+14M\big) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + 14M = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 14P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 14\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2+14\,a & 0 \\ 0 & b^2+14\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + 14\,a &= 1, \\ b^2 + 14\,b &= 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = -14$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + 14\,X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 200$. Les racines de ce polynôme sont donc $5\sqrt{2} - 7$ et $-5\sqrt{2} - 7$.

Corrigé 56. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$. On remarque que A admet une valeur propre strictement négative, et cela suffira à démontrer qu'il ne peut pas exister $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = A$. En effet, soit M une telle matrice, dont on note λ et μ les valeurs propres complexes comptées avec multiplicités. En trigonalisant M (ce qui est toujours possible quitte à se placer sur $\mathbb{C}$), on montre aisément que les valeurs propres de M^2 sont λ^2 et μ^2. Or : $M^2 = A$, et les valeurs propres de A viennent d'être explicitées. Donc, quitte à échanger λ et μ, on a : $\lambda^2 = 0$, et : $\mu^2 = -1$. On en déduit : $\lambda \in \{0\}$, et : $\mu \in \{-i, i\}$. Mais c'est impossible : en effet, si une matrice *réelle* admet une valeur propre *complexe non réelle*, alors son conjugué doit aussi être valeur propre, et ce n'est pas le cas ici au vu des conditions sur λ et μ : les valeurs propres λ et μ ne peuvent pas être conjuguées. Cette absurdité démontre que M ne peut pas exister.

← page 4

Corrigé 57. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 12) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{12, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

← page 4

$$\ker(A - 12\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 12X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 12\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 12\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 12\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+a & = & 12, \\ b^2+b & = & -1. \end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes X^2+X-12 et X^2+X+1. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 49$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+M=A$.

Corrigé 58. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A-\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A-\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A \iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ \underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1, \\ b^2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1, 0), \quad \text{et :} \quad (-1, 0).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a+2\,b & -2\,a+2\,b \\ a-b & 2\,a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 59. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{2}, 0\right), \quad \text{et :} \quad \left(\sqrt{2}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b & -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 60. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{8}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage. Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -2. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(0, -i\sqrt{2}\right), \quad \text{et :} \quad \left(0, i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{8}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -3\,a + 4\,b & -8\,a + 8\,b \\ \frac{3}{2}\,a - \frac{3}{2}\,b & 4\,a - 3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -4i\sqrt{2} & -8i\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}i\sqrt{2} & 3i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 4i\sqrt{2} & 8i\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}i\sqrt{2} & -3i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 61. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1) \cdot (X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3, -1\}$. On remarque que A admet une valeur propre strictement négative, et cela suffira à démontrer qu'il ne peut pas exister $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = A$. En effet, soit M une telle matrice, dont on note λ et μ les valeurs propres complexes comptées avec multiplicités. En trigonalisant M (ce qui est toujours possible quitte à se placer sur $\mathbb{C}$), on montre aisément que les valeurs propres de M^2 sont λ^2 et μ^2. Or : $M^2 = A$, et les valeurs propres de A viennent d'être explicitées. Donc, quitte à échanger λ et μ, on a : $\lambda^2 = -3$, et : $\mu^2 = -1$. On en déduit : $\lambda \in \left\{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\right\}$, et : $\mu \in \{-i, i\}$. Mais c'est impossible : en effet, si une matrice *réelle* admet une valeur propre *complexe non réelle*, alors son conjugué doit aussi être valeur propre, et ce n'est pas le cas ici au vu des conditions sur λ et μ : les valeurs propres λ et μ ne peuvent pas être conjuguées. Cette absurdité démontre que M ne peut pas exister. ← page 4

Corrigé 62. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,3\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A-3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A-\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - 2M = A$, on a : $AM = \left(M^2-2M\right)\cdot M = M^3 - 2M^2 = M\cdot\left(M^2-2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A-3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2-2\,a & 0 \\ 0 & b^2-2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 2\,a = 3, \\ b^2 - 2\,b = 1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 2\,X - 3$ et $X^2 - 2\,X - 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 16$, et : $\Delta_2 = 8$. Les racines du premier polynôme sont donc 3 et -1, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{2}+1$ et $-\sqrt{2}+1$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-1, \sqrt{2}+1\right), \ \left(3, \sqrt{2}+1\right), \ \left(3, -\sqrt{2}+1\right), \ \text{ et : } \ \left(-1, -\sqrt{2}+1\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} 3a-2b & \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \\ -12a+12b & -2a+3b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2-2M=A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}-5 & -\frac{1}{2}\sqrt{2}-1 \\ 12\sqrt{2}+24 & 3\sqrt{2}+5 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}+7 & -\frac{1}{2}\sqrt{2}+1 \\ 12\sqrt{2}-24 & 3\sqrt{2}-3 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+7 & \frac{1}{2}\sqrt{2}+1 \\ -12\sqrt{2}-24 & -3\sqrt{2}-3 \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-5 & \frac{1}{2}\sqrt{2}-1 \\ -12\sqrt{2}+24 & -3\sqrt{2}+5 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2-2M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 63. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+2)\cdot(X+4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-4,-2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A+2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A+4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2-3M=A$, on a : $AM = (M^2-3M)\cdot M = M^3-3M^2 = M\cdot(M^2-3M) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A+2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2-3M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 3P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2-3a & 0 \\ 0 & b^2-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 - 3\,a & = & -2, \\ b^2 - 3\,b & = & -4. \end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 3\,X + 2$ et $X^2 - 3\,X + 4$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 1$, et : $\Delta_2 = -7$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - 3M = A$.

Corrigé 64. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 3, \\ b^2 & = & -1. \end{array}\right.$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{3}, i\right),\ \left(-\sqrt{3}, -i\right),\ \left(\sqrt{3}, -i\right),\ \text{ et : }\ \left(\sqrt{3}, i\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ -5 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\,a + \frac{5}{2}\,b & -\frac{3}{4}\,a + \frac{3}{4}\,b \\ 5\,a - 5\,b & \frac{5}{2}\,a - \frac{3}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i & \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4}i \\ -5\sqrt{3} - 5i & -\frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}i & \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}i \\ -5\sqrt{3} + 5i & -\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}i & -\frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}i \\ 5\sqrt{3} + 5i & \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix},\ \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i & -\frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4}i \\ 5\sqrt{3} - 5i & \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 65. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$. On remarque que A admet une valeur propre strictement négative, et cela suffira à démontrer qu'il ne peut pas exister $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = A$. En effet, soit M une telle matrice, dont on note λ et μ les valeurs propres complexes comptées avec multiplicités. En trigonalisant M (ce qui est toujours possible quitte à se placer sur $\mathbb{C}$), on montre aisément que les valeurs propres de M^2 sont λ^2 et μ^2. Or : $M^2 = A$, et les valeurs propres de A viennent d'être explicitées. Donc, quitte à échanger λ et μ, on a : $\lambda^2 = -1$, et : $\mu^2 = 0$. On en déduit : $\lambda \in \{-i, i\}$, et : $\mu \in \{0\}$. Mais c'est impossible : en effet, si une matrice *réelle* admet une valeur propre *complexe non réelle*, alors son conjugué doit aussi être valeur propre, et ce n'est pas le cas ici au vu des conditions sur λ et μ : les valeurs propres λ et μ ne peuvent pas être conjuguées. Cette absurdité démontre que M ne peut pas exister. ← page 4

Corrigé 66. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - 5M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - 5M\right) \cdot M = M^3 - 5M^2 = M \cdot \left(M^2 - 5M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 5M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 5P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 5 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - 5\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 5\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 5\,a &= 0, \\ b^2 - 5\,b &= -1. \end{cases}$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = 5$. Pour déterminer les valeurs de b vérifiant la seconde équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - 5\,X + 1$. Son discriminant est : $\Delta = 21$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{5}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{5}{2}$.

Corrigé 67. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker\left(A - \mathrm{I}_2\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker\left(A\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré

par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage. Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1,0), \quad \text{et :} \quad (-1,0).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -3\,a + 4\,b & -a + b \\ 12\,a - 12\,b & 4\,a - 3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 68. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+6)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -6\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 6\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -6. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(0, -i\sqrt{6}\right), \quad \text{et :} \quad \left(0, i\sqrt{6}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\,a - \frac{1}{3}\,b & -\frac{1}{6}\,a + \frac{1}{6}\,b \\ \frac{8}{3}\,a - \frac{8}{3}\,b & -\frac{1}{3}\,a + \frac{4}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i\sqrt{6} & -\frac{1}{6}i\sqrt{6} \\ \frac{8}{3}i\sqrt{6} & -\frac{4}{3}i\sqrt{6} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}i\sqrt{6} & \frac{1}{6}i\sqrt{6} \\ -\frac{8}{3}i\sqrt{6} & \frac{4}{3}i\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 69. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$. On remarque que A admet une valeur propre strictement négative, et cela suffira à démontrer qu'il ne peut pas exister $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = A$. En effet, soit M une telle matrice, dont on note λ et μ les valeurs propres complexes comptées avec multiplicités. En trigonalisant M (ce qui est toujours ← page 4

possible quitte à se placer sur $\mathbb{C}$), on montre aisément que les valeurs propres de M^2 sont λ^2 et μ^2. Or : $M^2 = A$, et les valeurs propres de A viennent d'être explicitées. Donc, quitte à échanger λ et μ, on a : $\lambda^2 = 0$, et : $\mu^2 = -1$. On en déduit : $\lambda \in \{0\}$, et : $\mu \in \{-i, i\}$. Mais c'est impossible : en effet, si une matrice *réelle* admet une valeur propre *complexe non réelle*, alors son conjugué doit aussi être valeur propre, et ce n'est pas le cas ici au vu des conditions sur λ et μ : les valeurs propres λ et μ ne peuvent pas être conjuguées. Cette absurdité démontre que M ne peut pas exister.

Corrigé 70. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 4

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a &= -1, \\ b^2 + b &= -2. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + X + 1$ et $X^2 + X + 2$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = -3$, et : $\Delta_2 = -7$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$.

Corrigé 71. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-8)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{9} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 8\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 8\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 8\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 8, \\ b^2 &= 1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(2\sqrt{2}, -1\right), \quad \left(2\sqrt{2}, 1\right), \quad \left(-2\sqrt{2}, -1\right), \quad \text{et :} \quad \left(-2\sqrt{2}, 1\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{9} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{18}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} \frac{9}{7}\,a - \frac{2}{7}\,b & \frac{1}{7}\,a - \frac{1}{7}\,b \\ -\frac{18}{7}\,a + \frac{18}{7}\,b & -\frac{2}{7}\,a + \frac{9}{7}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{18}{7}\sqrt{2} + \frac{2}{7} & \frac{2}{7}\sqrt{2} + \frac{1}{7} \\ -\frac{36}{7}\sqrt{2} - \frac{18}{7} & -\frac{4}{7}\sqrt{2} - \frac{9}{7} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{18}{7}\sqrt{2} - \frac{2}{7} & \frac{2}{7}\sqrt{2} - \frac{1}{7} \\ -\frac{36}{7}\sqrt{2} + \frac{18}{7} & -\frac{4}{7}\sqrt{2} + \frac{9}{7} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{18}{7}\sqrt{2} + \frac{2}{7} & -\frac{2}{7}\sqrt{2} + \frac{1}{7} \\ \frac{36}{7}\sqrt{2} - \frac{18}{7} & \frac{4}{7}\sqrt{2} - \frac{9}{7} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{18}{7}\sqrt{2} - \frac{2}{7} & -\frac{2}{7}\sqrt{2} - \frac{1}{7} \\ \frac{36}{7}\sqrt{2} + \frac{18}{7} & \frac{4}{7}\sqrt{2} + \frac{9}{7} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 72. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 44M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + 44M\right) \cdot M = M^3 + 44M^2 = M \cdot \left(M^2 + 44M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + 44M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 44P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 44 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + 44\,a & 0 \\ 0 & b^2 + 44\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+44\,a &=& 1,\\ b^2+44\,b &=& -1.\end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2+44\,X-1$ et $X^2+44\,X+1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1=1940$, et : $\Delta_2=1932$. Les racines du premier polynôme sont donc $\sqrt{485}-22$ et $-\sqrt{485}-22$, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{483}-22$ et $-\sqrt{483}-22$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\sqrt{485}-22,\sqrt{483}-22\right),\ \left(-\sqrt{485}-22,-\sqrt{483}-22\right),\ \left(\sqrt{485}-22,-\sqrt{483}-22\right),\ \text{et : } \left(\sqrt{485}-22,\sqrt{483}-22\right).$$

Alors, la relation $M=P\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, donc : $M=\begin{pmatrix} 2\,a-b & -a+b\\ 2\,a-2\,b & -a+2\,b\end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2+44M=A$ sont :

$$M_1=\begin{pmatrix} -2\sqrt{485}-\sqrt{483}-22 & \sqrt{485}+\sqrt{483}\\ -2\sqrt{485}-2\sqrt{483} & \sqrt{485}+2\sqrt{483}-22\end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix} -2\sqrt{485}+\sqrt{483}-22 & \sqrt{485}-\sqrt{483}\\ -2\sqrt{485}+2\sqrt{483} & \sqrt{485}-2\sqrt{483}-22\end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{pmatrix} 2\sqrt{485}+\sqrt{483}-22 & -\sqrt{485}-\sqrt{483}\\ 2\sqrt{485}+2\sqrt{483} & -\sqrt{485}-2\sqrt{483}-22\end{pmatrix},\ \text{et : } M_4=\begin{pmatrix} 2\sqrt{485}-\sqrt{483}-22 & -\sqrt{485}+\sqrt{483}\\ 2\sqrt{485}-2\sqrt{483} & -\sqrt{485}+2\sqrt{483}-22\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2+44M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 73. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X-7)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,7\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A-7\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right),\quad \ker(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=7X_1$ et $f_A(X_2)=AX_2=0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 7 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix} 7 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D=\begin{pmatrix} 7 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2-5M=A$, on a : $AM=\left(M^2-5M\right)\cdot M=M^3-5M^2=M\cdot\left(M^2-5M\right)=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1\in\ker(A-7\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-7\mathrm{I}_2)$ également.

Or $\ker(A - 7\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 5M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 5P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 5 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 5\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 5\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 5\,a &= 7, \\ b^2 - 5\,b &= 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = 5$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - 5\,X - 7$. Son discriminant est : $\Delta = 53$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{53} + \frac{5}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{53} + \frac{5}{2}$.

Corrigé 74. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-8)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{8, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - 8\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 8X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 8\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 8\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 8\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 8, \\ b^2 &= -2. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(2\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right), \ \left(-2\sqrt{2}, i\sqrt{2}\right), \ \left(-2\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right), \ \text{ et : } \left(2\sqrt{2}, i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}\,a + \frac{1}{10}\,b & \frac{9}{10}\,a - \frac{9}{10}\,b \\ \frac{1}{10}\,a - \frac{1}{10}\,b & \frac{1}{10}\,a + \frac{9}{10}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{10}i - \frac{9}{5}\right)\sqrt{2} & \left(\frac{9}{10}i + \frac{9}{5}\right)\sqrt{2} \\ \left(\frac{1}{10}i + \frac{1}{5}\right)\sqrt{2} & -\left(\frac{9}{10}i - \frac{1}{5}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{10}i - \frac{9}{5}\right)\sqrt{2} & -\left(\frac{9}{10}i + \frac{9}{5}\right)\sqrt{2} \\ -\left(\frac{1}{10}i + \frac{1}{5}\right)\sqrt{2} & \left(\frac{9}{10}i - \frac{1}{5}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{10}i + \frac{9}{5}\right)\sqrt{2} & \left(\frac{9}{10}i - \frac{9}{5}\right)\sqrt{2} \\ \left(\frac{1}{10}i - \frac{1}{5}\right)\sqrt{2} & -\left(\frac{9}{10}i + \frac{1}{5}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{10}i + \frac{9}{5}\right)\sqrt{2} & -\left(\frac{9}{10}i - \frac{9}{5}\right)\sqrt{2} \\ -\left(\frac{1}{10}i - \frac{1}{5}\right)\sqrt{2} & \left(\frac{9}{10}i + \frac{1}{5}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 75. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -3\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par

un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -3. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(0, i\sqrt{3}\right), \quad \text{et :} \quad \left(0, -i\sqrt{3}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a+2b & \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b \\ -6a+6b & 2a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2i\sqrt{3} & -\frac{1}{3}i\sqrt{3} \\ 6i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -2i\sqrt{3} & \frac{1}{3}i\sqrt{3} \\ -6i\sqrt{3} & i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 76. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{16}{17} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{16}{17} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que

$f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{16}{17} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= -1, \\ b^2 &= -2. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(i, -i\sqrt{2}\right), \ \left(i, i\sqrt{2}\right), \ \left(-i, -i\sqrt{2}\right), \ \text{ et : } \ \left(-i, i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{16}{17} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 17 \\ -17 & -16 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -16\,a + 17\,b & -16\,a + 16\,b \\ 17\,a - 17\,b & 17\,a - 16\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -17i\sqrt{2} - 16i & -16i\sqrt{2} - 16i \\ 17i\sqrt{2} + 17i & 16i\sqrt{2} + 17i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 17i\sqrt{2} - 16i & 16i\sqrt{2} - 16i \\ -17i\sqrt{2} + 17i & -16i\sqrt{2} + 17i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -17i\sqrt{2}+16i & -16i\sqrt{2}+16i \\ 17i\sqrt{2}-17i & 16i\sqrt{2}-17i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} 17i\sqrt{2}+16i & 16i\sqrt{2}+16i \\ -17i\sqrt{2}-17i & -16i\sqrt{2}-17i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 77. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A-2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A-2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 2, \\ b^2 &= -1. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{2},-i\right), \; \left(-\sqrt{2},-i\right), \; \left(\sqrt{2},i\right), \; \text{ et : } \left(-\sqrt{2},i\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\,a + \frac{5}{3}\,b & -\frac{2}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b \\ \frac{5}{3}\,a - \frac{5}{3}\,b & \frac{5}{3}\,a - \frac{2}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i \\ \frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}i & \frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i \end{pmatrix},\quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i \\ -\frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}i & -\frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i \\ \frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3}i & \frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i \end{pmatrix},\quad \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i \\ -\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3}i & -\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 78. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 1, \\ b^2 &= 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1, 0), \quad \text{et} : \quad (-1, 0).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a + 2\,b & -a + b \\ 2\,a - 2\,b & 2\,a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et} : M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 79. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - I_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - I_2)$ également. Or $\ker(A - I_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1, 0), \quad \text{et :} \quad (-1, 0).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 4\,a - 3\,b & 4\,a - 4\,b \\ -3\,a + 3\,b & -3\,a + 4\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 80. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 2)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - 2I_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_1 + 2X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose alors : $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 2, \\ c^2 &= 2, \\ ab + bc &= -1. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\begin{cases} a &= \sqrt{2}, \\ c &= \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}b &= -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= \sqrt{2}, \\ c &= -\sqrt{2} \\ 0 &= -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= -\sqrt{2}, \\ c &= \sqrt{2} \\ 0 &= -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= -\sqrt{2}, \\ c &= -\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}b &= -1 \end{cases}$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a, b, c) qui conviennent : $(a, b, c) = \left(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ et $(a, b, c) = \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{9}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{7}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{9}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{7}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 81. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 6M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + 6M\right) \cdot M = M^3 + 6M^2 = M \cdot \left(M^2 + 6M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + 6M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 6P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 6 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 6\,a & 0 \\ 0 & b^2 + 6\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + 6\,a & = & 2, \\ b^2 + 6\,b & = & 0. \end{array} \right.$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = -6$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + 6\,X - 2$. Son discriminant est : $\Delta = 44$. Les racines de ce polynôme sont donc $\sqrt{11} - 3$ et $-\sqrt{11} - 3$.

Corrigé 82. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice ← page 5

diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{lll} a^2 & = & 1, \\ b^2 & = & 0. \end{array} \right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1,0), \quad \text{et :} \quad (-1,0).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} 3\,a - 2\,b & 3\,a - 3\,b \\ -2\,a + 2\,b & -2\,a + 3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ et} : M_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 83. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - 6M = A$, on a : $AM = \big(M^2 - 6M\big) \cdot M = M^3 - 6M^2 = M \cdot \big(M^2 - 6M\big) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2 - 6M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 6P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 6 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a^2 - 6\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 6\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 6\,a = 0, \\ b^2 - 6\,b = -1. \end{cases}$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = 6$. Pour déterminer les valeurs de b vérifiant la seconde équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - 6\,X + 1$. Son discriminant est : $\Delta = 32$. Les racines de ce polynôme sont donc $2\sqrt{2} + 3$ et $-2\sqrt{2} + 3$.

Corrigé 84. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 7) \cdot (X - 6)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{6, 7\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - 7\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - 6\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 7X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 6X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - 6M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - 6M\right) \cdot M = M^3 - 6M^2 = M \cdot \left(M^2 - 6M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 7\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 7\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 7\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 6M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 6P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 6 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - 6\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 6\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - 6\,a & = & 7, \\ b^2 - 6\,b & = & 6. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 6\,X - 7$ et $X^2 - 6\,X - 6$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 64$, et : $\Delta_2 = 60$. Les racines du premier polynôme sont donc 7 et -1, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{15} + 3$ et $-\sqrt{15} + 3$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(7, -\sqrt{15} + 3\right), \ \left(-1, -\sqrt{15} + 3\right), \ \left(-1, \sqrt{15} + 3\right), \quad \text{et :} \ \left(7, \sqrt{15} + 3\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -5\,a+6\,b & -10\,a+10\,b \\ 3\,a-3\,b & 6\,a-5\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2-6M=A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6\sqrt{15}-17 & -10\sqrt{15}-40 \\ 3\sqrt{15}+12 & 5\sqrt{15}+27 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -6\sqrt{15}+23 & -10\sqrt{15}+40 \\ 3\sqrt{15}-12 & 5\sqrt{15}-21 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 6\sqrt{15}+23 & 10\sqrt{15}+40 \\ -3\sqrt{15}-12 & -5\sqrt{15}-21 \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} 6\sqrt{15}-17 & 10\sqrt{15}-40 \\ -3\sqrt{15}+12 & -5\sqrt{15}+27 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2-6M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 85. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A-\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2\cdot M = M^3 = M\cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A-\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 1, \\ b^2 &= 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1, 0)\,, \quad \text{et :} \quad (-1, 0)\,.$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -2\,a + 3\,b & -6\,a + 6\,b \\ a - b & 3\,a - 2\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 86. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -2\}$. On remarque que A admet une valeur propre strictement négative, et cela suffira à démontrer qu'il ne peut pas exister $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = A$. En effet, soit M une telle matrice, dont on note λ et μ les valeurs propres complexes comptées avec multiplicités. En trigonalisant M (ce qui est toujours possible quitte à se placer sur $\mathbb{C}$), on montre aisément que les valeurs propres de M^2 sont λ^2 et μ^2. Or : $M^2 = A$, et les valeurs propres de A viennent d'être explicitées. Donc, quitte à échanger λ et μ, on a : $\lambda^2 = 0$, et : $\mu^2 = -2$. On en déduit : $\lambda \in \{0\}$, et : $\mu \in \left\{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right\}$. Mais c'est impossible : en effet, si une matrice *réelle* admet une valeur propre *complexe non réelle*, alors son conjugué doit aussi être valeur propre, et ce n'est pas le cas ici au vu des conditions sur λ et μ : les valeurs propres λ et μ ne peuvent pas être conjuguées. Cette absurdité démontre que M ne peut pas exister. ← page 5

Corrigé 87. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -8X_1 - X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose alors : $T = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\overset{(P^{-1}\times)}{\underset{(\times P)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ c^2 = -1, \\ ab + bc = -8. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\begin{cases} a = i, \\ c = i \\ 2i\,b = -8 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = i, \\ c = -i \\ 0 = -8 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -i, \\ c = i \\ 0 = -8 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -i, \\ c = -i \\ -2i\,b = -8 \end{cases}$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a, b, c) qui conviennent : $(a, b, c) = (i, 4i, i)$ et $(a, b, c) = (-i, -4i, -i)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 4i \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5i & -9i \\ 4i & 7i \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -4i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5i & 9i \\ -4i & -7i \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 88. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 5

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{19}{21} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{19}{21} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{19}{21} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(-1, -i), \ (-1, i), \ (1, -i), \ \text{ et : } \ (1, i).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{19}{21} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{2} & \frac{21}{2} \\ \frac{21}{2} & -\frac{19}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{19}{2}\,a + \frac{21}{2}\,b & \frac{19}{2}\,a - \frac{19}{2}\,b \\ -\frac{21}{2}\,a + \frac{21}{2}\,b & \frac{21}{2}\,a - \frac{19}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{21}{2}i + \frac{19}{2} & \frac{19}{2}i - \frac{19}{2} \\ -\frac{21}{2}i + \frac{21}{2} & \frac{19}{2}i - \frac{21}{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{21}{2}i + \frac{19}{2} & -\frac{19}{2}i - \frac{19}{2} \\ \frac{21}{2}i + \frac{21}{2} & -\frac{19}{2}i - \frac{21}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{21}{2}i - \frac{19}{2} & \frac{19}{2}i + \frac{19}{2} \\ -\frac{21}{2}i - \frac{21}{2} & \frac{19}{2}i + \frac{21}{2} \end{pmatrix},\ \text{et} : M_4 = \begin{pmatrix} \frac{21}{2}i - \frac{19}{2} & -\frac{19}{2}i + \frac{19}{2} \\ \frac{21}{2}i - \frac{21}{2} & -\frac{19}{2}i + \frac{21}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 89. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+3)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la deuxième colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -3X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 - 3X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A + 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2)

(comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & ab + bc + b \\ 0 & c^2 + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + a & = & -3, \\ c^2 + c & = & -3, \\ ab + bc + b & = & 1. \end{array} \right.$$

Déterminons d'abord les solutions de la première équation (qui donne aussi les solutions de la seconde). Cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + X + 3$. Son discriminant est : $\Delta = -11$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$.

Corrigé 90. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X + 1) \cdot (X + 2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 4M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + 4M\right) \cdot M = M^3 + 4M^2 = M \cdot \left(M^2 + 4M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre

la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage. Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + 4M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 4P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 4 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + 4\,a & 0 \\ 0 & b^2 + 4\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + 4\,a = -1, \\ b^2 + 4\,b = -2. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + 4\,X + 1$ et $X^2 + 4\,X + 2$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 12$, et : $\Delta_2 = 8$. Les racines du premier polynôme sont donc $\sqrt{3} - 2$ et $-\sqrt{3} - 2$, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{2} - 2$ et $-\sqrt{2} - 2$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\sqrt{3} - 2, -\sqrt{2} - 2\right), \ \left(\sqrt{3} - 2, -\sqrt{2} - 2\right), \ \left(\sqrt{3} - 2, \sqrt{2} - 2\right), \ \text{ et : } \left(-\sqrt{3} - 2, \sqrt{2} - 2\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -6\,a + 7\,b & -3\,a + 3\,b \\ 14\,a - 14\,b & 7\,a - 6\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 + 4M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} - 7\sqrt{2} - 2 & 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ -14\sqrt{3} + 14\sqrt{2} & -7\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 7\sqrt{2} - 2 & -3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ 14\sqrt{3} + 14\sqrt{2} & 7\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 2 & -3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \\ 14\sqrt{3} - 14\sqrt{2} & 7\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}, \ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 2 & 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \\ -14\sqrt{3} - 14\sqrt{2} & -7\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + 4M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 91. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 2) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est :

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{8}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{2}, -i\right), \ \left(-\sqrt{2}, -i\right), \ \left(\sqrt{2}, i\right), \ \text{ et : } \ \left(-\sqrt{2}, i\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{8}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\,a + \frac{8}{3}\,b & -\frac{8}{3}\,a + \frac{8}{3}\,b \\ \frac{5}{3}\,a - \frac{5}{3}\,b & \frac{8}{3}\,a - \frac{5}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{3}i & -\frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{3}i \\ \frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}i & \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{3}i & \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{3}i \\ -\frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}i & -\frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\sqrt{2}+\frac{8}{3}i & -\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{8}{3}i \\ \frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{3}i & \frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{3}i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\sqrt{2}+\frac{8}{3}i & \frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{8}{3}i \\ -\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{3}i & -\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{3}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 92. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A-2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A-\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A-2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\overset{(P^{-1}\times)}{\underset{(\times P)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{2}, 1\right), \ \left(\sqrt{2}, -1\right), \ \left(-\sqrt{2}, -1\right), \ \text{ et : } \left(-\sqrt{2}, 1\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -3\,a+4\,b & 6\,a-6\,b \\ -2\,a+2\,b & 4\,a-3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}+4 & 6\sqrt{2}-6 \\ -2\sqrt{2}+2 & 4\sqrt{2}-3 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}-4 & 6\sqrt{2}+6 \\ -2\sqrt{2}-2 & 4\sqrt{2}+3 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}-4 & -6\sqrt{2}+6 \\ 2\sqrt{2}-2 & -4\sqrt{2}+3 \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}+4 & -6\sqrt{2}-6 \\ 2\sqrt{2}+2 & -4\sqrt{2}-3 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 93. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A+\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ b^2 = -2. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(i, -i\sqrt{2}\right), \ \left(i, i\sqrt{2}\right), \ \left(-i, -i\sqrt{2}\right), \ \text{ et : } \left(-i, i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -5\,a + 6\,b & 5\,a - 5\,b \\ -6\,a + 6\,b & 6\,a - 5\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6i\sqrt{2} - 5i & 5i\sqrt{2} + 5i \\ -6i\sqrt{2} - 6i & 5i\sqrt{2} + 6i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 6i\sqrt{2} - 5i & -5i\sqrt{2} + 5i \\ 6i\sqrt{2} - 6i & -5i\sqrt{2} + 6i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -6i\sqrt{2} + 5i & 5i\sqrt{2} - 5i \\ -6i\sqrt{2} + 6i & 5i\sqrt{2} - 6i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} 6i\sqrt{2} + 5i & -5i\sqrt{2} - 5i \\ 6i\sqrt{2} + 6i & -5i\sqrt{2} - 6i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 94. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - M = A$, on a : $AM = \big(M^2 - M\big) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \big(M^2 - M\big) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a = 1, \\ b^2 - b = -1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 1$ et $X^2 - X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 5$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M = A$.

Corrigé 95. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit

que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 & = & 0, \\ b^2 & = & -1. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(0,-i)\,, \quad \text{et :} \quad (0,i)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, donc :
$M = \begin{pmatrix} 6\,a - 5\,b & 6\,a - 6\,b \\ -5\,a + 5\,b & -5\,a + 6\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5i & 6i \\ -5i & -6i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -5i & -6i \\ 5i & 6i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 96. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$. Cela suffit déjà à conclure qu'il n'y a pas de solution à l'équation $M^2 = A$. En effet la matrice A est nilpotente (le spectre nous permet de déduire que : $\chi_A = X^2$, donc : $\chi_A(A) = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton). Par conséquent, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ est une matrice vérifiant : $M^2 = A$, alors $M^4 = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$, donc M est nilpotente. On en déduit d'une part que M n'est pas inversible (on a : $(\det(M))^4 = \det(M^4) = \det\left(0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}\right) = 0$), donc 0 est valeur propre de M, et d'autre part le spectre (complexe) de M est inclus dans les racines complexes du polynôme annulateur X^4 trouvé, ce qui permet de conclure que l'unique valeur propre complexe de M est 0. Alors : $\chi_M = (X-0)^2 = X^2$, et comme pour A on en déduit que $M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$. Or $M^2 = A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$: contradiction. Il n'y a donc pas de solution à l'équation $M^2 = A$. ← page 6

Corrigé 97. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice ← page 6

diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\1 & 1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$. On a réduit A.
Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 - M = A$, on a : $AM = \left(M^2 - M\right)\cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2 - M = A &\iff P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} - P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}a^2 - a & 0\\0 & b^2 - b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a = 3,\\ b^2 - b = -1.\end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 3$ et $X^2 - X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 13$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M = A$.

Corrigé 98. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{3}{8}\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 0, \\ b^2 & = & -1. \end{array} \right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(0, -i), \quad \text{et : } \quad (0, i).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & -8 \\ 24 & 9 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 9\,a - 8\,b & 3\,a - 3\,b \\ -24\,a + 24\,b & -8\,a + 9\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 8i & 3i \\ -24i & -9i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -8i & -3i \\ 24i & 9i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 99. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs : ← page 6

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 + 2M = A$, on a : $AM = \left(M^2 + 2M\right) \cdot M = M^3 + 2M^2 = M \cdot \left(M^2 + 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.
Ainsi on a : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + 2M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 2P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 + 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + 2\,a & = & 0, \\ b^2 + 2\,b & = & -2. \end{array} \right.$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = -2$. Pour déterminer les valeurs de b vérifiant la seconde équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + 2\,X + 2$. Son discriminant est : $\Delta = -4$. Les racines de ce polynôme sont donc $i - 1$ et $-i - 1$.

Corrigé 100. Réduisons d'abord A, afin de remplacer le membre de droite de l'équation à résoudre par une matrice ← page 6

diagonale ou triangulaire (ce qui simplifierait l'étude). Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,3\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Voici comment en déduire une version réduite de A : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$. On pose alors : $D = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. On a réduit A.

Déduisons-en si l'équation de l'énoncé admet des solutions. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de cette équation. Par un raisonnement convenable sur les sous-espaces stables, nous allons montrer que M peut être réduite avec la même matrice de passage que A (très important !). Ce qui permettra de simplifier les *deux* membres de l'équation à résoudre. Comme : $M^2 = A$, on a : $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations ci-dessus, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée plus haut. On a réduit M avec la même matrice de passage.

Ainsi on a : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, mais on a aussi : $A = P\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}a^2 & 0\\0 & b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 3,\\ b^2 = 0.\end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{3}, 0\right), \quad \text{et : } \left(\sqrt{3}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, donc : $M =$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b & -\frac{2}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b \\ -\frac{1}{3}\,a + \frac{1}{3}\,b & \frac{2}{3}\,a + \frac{1}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ et} : M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).