Raisonnement sur les sous-espaces stables, racines carrées d'une matrice (guidé)

> Ces exercices vous apprennent à utiliser la stabilité des sous-espaces propres, par une matrice qui commute, pour résoudre une équation matricielle. Voir mon document *Méthodes* à la section 6.1.4 pour des exercices analogues. Le cas d'une matrice triangulaire est en vérité le plus facile : notez que si vous prenez un vecteur propre en premier vecteur, alors peu importe le deuxième vecteur que vous choisissez pour avoir une nouvelle base, vous obtenez une matrice de la bonne forme.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 19

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 20

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 21

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -22 & 11 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 22

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -18 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 22

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 24

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & -18 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 25

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 26

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 4M = A$. → page 27

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 4M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 28

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 29

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 30

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -8 & -14 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 32

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 33

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 34

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 2M = A$. → page 35

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 36

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.

3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 37

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} -18 & -20 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 38

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 39

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 41

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -14 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 42

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -22 & 21 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 43

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 44

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 25. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -18 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 3M = A$. → page 45

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 3M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 26. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 46

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 27. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 47

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 28. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 48

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 29. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 49

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 30. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 50

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 31. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 51

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 32. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 53

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 33. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -19 & -19 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 54

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 34. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 55

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 35. Soit $A = \begin{pmatrix} -14 & -9 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 56

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 36. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 57

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 37. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 58

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 38. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 59

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 39. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 60

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 40. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 62

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 41. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 63

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 42. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 65

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 43. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 66

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 44. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -14 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 67

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 45. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 68

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 46. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 69

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.

3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 47. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 70

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 48. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 14 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 71

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 49. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 73

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 50. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 14 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 13M = A$. → page 74

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 13M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 51. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 75

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 52. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 76

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 53. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 77

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 54. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 78

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 55. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -15 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 80

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 56. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 81

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 57. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 82

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 58. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 83

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 59. Soit $A = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -14 & 7 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 84

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 60. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 85

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 61. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 86

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 62. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 88

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 63. Soit $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 88

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 64. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 90

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 65. Soit $A = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 2M = A$. → page 91

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 66. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 92

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in M_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 67. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 93

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 68. Soit $A = \begin{pmatrix} -23 & -22 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 94

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 69. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 2M = A$. → page 95

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 70. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 15 & -8 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 96

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 71. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 98

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 72. Soit $A = \begin{pmatrix} 22 & -22 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 99

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 73. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 100

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 74. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$. → page 101

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 - M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 75. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 102

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.

3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 76. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 58M = A$. → page 103

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + 58M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 77. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & -18 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 104

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 78. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 105

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 79. Soit $A = \begin{pmatrix} -19 & 22 \\ -20 & 23 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 106

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 80. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 107

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 81. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 108

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 82. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 19M = A$. → page 109

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 19M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 83. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 111

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 84. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -22 & -12 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 112

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 85. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 12 & -10 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 113

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 86. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 114

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 87. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 115

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 88. Soit $A = \begin{pmatrix} -15 & -20 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 116

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 89. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 117

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 90. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 119

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 91. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 2M = A$. → page 120

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 92. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 121

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 93. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 122

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 94. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$. → page 123

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 + M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 95. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 125

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 96. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$. → page 126

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 97. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -11 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 127

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 98. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 129

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 99. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$. → page 130

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 - 2M = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Exercice 100. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$. → page 131

1. Déterminer les éléments propres de A, puis expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice qui convient. Montrer que A et M commutent, et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où la matrice P est la même que dans la question précédente.
3. Conclure : déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$, et les expliciter si c'est le cas.

Corrigé 1. ← page 1

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2 & 0\\0 & b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1, \\ b^2 & = & -1. \end{array}\right.$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(-1,-i)\,,\ (-1,i)\,,\ (1,-i)\,,\ \text{ et : }\ (1,i)\,.$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -a+2\,b & 2\,a-2\,b \\ -a+b & 2\,a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2i+1 & 2i-2 \\ -i+1 & i-2 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 2i+1 & -2i-2 \\ i+1 & -i-2 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2i-1 & 2i+2 \\ -i-1 & i+2 \end{pmatrix}, \ \text{et} : M_4 = \begin{pmatrix} 2i-1 & -2i+2 \\ i-1 & -i+2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 2. ← page 1

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 - 2M\right) \cdot M = M^3 - 2M^2 = M \cdot \left(M^2 - 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - 2M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - 2\,a & = & 0, \\ b^2 - 2\,b & = & -1. \end{array} \right.$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = 2$, et la seconde se résout en notant que : $b^2 - 2\,b + 1 = (b-1)^2$, de sorte que : $b^2 - 2\,b + 1 = 0 \Longleftrightarrow b = 1$. Les couples (a, b) solutions du système ci-dessus sont donc :

$$(0{,}1), \text{ et} : (2{,}1).$$

Corrigé 3. ← page 1

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right)\cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + a & = & 1, \\ b^2 + b & = & 0. \end{array} \right.$$
La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = -1$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 5$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.

Corrigé 4. ← page 1

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{6}{11} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{6}{11} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$
Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 5. ← page 1

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1) \cdot (X+4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-4, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \big(M^2 - M\big) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \big(M^2 - M\big) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a = -1, \\ b^2 - b = -4. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X + 1$ et $X^2 - X + 4$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = -3$, et : $\Delta_2 = -15$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}i\sqrt{15} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{15} + \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{15} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{15} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{15} + \frac{1}{2}\right), \text{ et : } \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{15} + \frac{1}{2}\right)$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 3\,a - 2\,b & -6\,a + 6\,b \\ a - b & -2\,a + 3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} i\sqrt{15} - \frac{3}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -3i\sqrt{15} + 3i\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}i\sqrt{15} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} & -\frac{3}{2}i\sqrt{15} + i\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{15} + \frac{3}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -3i\sqrt{15} - 3i\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}i\sqrt{15} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} & -\frac{3}{2}i\sqrt{15} - i\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{15} + \frac{3}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2} & 3i\sqrt{15} - 3i\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{15} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} & \frac{3}{2}i\sqrt{15} - i\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \text{et} : M_4 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{15} - \frac{3}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2} & 3i\sqrt{15} + 3i\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{15} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} & \frac{3}{2}i\sqrt{15} + i\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 6. ← page 1

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+3)\cdot(X+14)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-14, -3\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 14\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -14X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -3, \\ b^2 = -14. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(i\sqrt{3}, i\sqrt{14}\right),\ \left(i\sqrt{3}, -i\sqrt{14}\right),\ \left(-i\sqrt{3}, -i\sqrt{14}\right),\ \text{ et : } \left(-i\sqrt{3}, i\sqrt{14}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{8}{11}a + \frac{3}{11}b & \frac{8}{11}a - \frac{8}{11}b \\ \frac{3}{11}a - \frac{3}{11}b & \frac{3}{11}a + \frac{8}{11}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{11}i\sqrt{14} + \frac{8}{11}i\sqrt{3} & -\frac{8}{11}i\sqrt{14} + \frac{8}{11}i\sqrt{3} \\ -\frac{3}{11}i\sqrt{14} + \frac{3}{11}i\sqrt{3} & \frac{8}{11}i\sqrt{14} + \frac{3}{11}i\sqrt{3} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11}i\sqrt{14} + \frac{8}{11}i\sqrt{3} & \frac{8}{11}i\sqrt{14} + \frac{8}{11}i\sqrt{3} \\ \frac{3}{11}i\sqrt{14} + \frac{3}{11}i\sqrt{3} & -\frac{8}{11}i\sqrt{14} + \frac{3}{11}i\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11}i\sqrt{14} - \frac{8}{11}i\sqrt{3} & \frac{8}{11}i\sqrt{14} - \frac{8}{11}i\sqrt{3} \\ \frac{3}{11}i\sqrt{14} - \frac{3}{11}i\sqrt{3} & -\frac{8}{11}i\sqrt{14} - \frac{3}{11}i\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{11}i\sqrt{14} - \frac{8}{11}i\sqrt{3} & -\frac{8}{11}i\sqrt{14} - \frac{8}{11}i\sqrt{3} \\ -\frac{3}{11}i\sqrt{14} - \frac{3}{11}i\sqrt{3} & \frac{8}{11}i\sqrt{14} - \frac{3}{11}i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 7. ← page 2

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2+M\right)\cdot M = M^3 + M^2 = M\cdot\left(M^2+M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a &= 2, \\ b^2 + b &= -1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + X - 2$ et $X^2 + X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 9$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$.

Corrigé 8. ← page 2

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la deuxième colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 - X_2.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc

$(b,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & -1, \\ c^2 & = & -1, \\ ab+bc & = & 1. \end{array} \right.$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 9. ← page 2

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1) \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 4M = A$, on a $AM = \left(M^2 - 4M\right) \cdot M = M^3 - 4M^2 = M \cdot \left(M^2 - 4M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - 4M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 4M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 4P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 4 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 4\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 4\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 4\,a = 1, \\ b^2 - 4\,b = -1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 4\,X - 1$ et $X^2 - 4\,X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 20$, et : $\Delta_2 = 12$. Les racines du premier polynôme sont donc $\sqrt{5} + 2$ et $-\sqrt{5} + 2$, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{3} + 2$ et $-\sqrt{3} + 2$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\sqrt{5}+2, \sqrt{3}+2\right), \quad \left(-\sqrt{5}+2, -\sqrt{3}+2\right), \quad \left(\sqrt{5}+2, -\sqrt{3}+2\right), \quad \text{et : } \left(\sqrt{5}+2, \sqrt{3}+2\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,a + \frac{3}{2}\,b & -\frac{3}{2}\,a + \frac{3}{2}\,b \\ \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b & \frac{3}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - 4M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 & \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 & \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 & -\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 & -\frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - 4M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 10. ← page 2

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1) \cdot (X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ b^2 = -2. \end{cases}$$
Les couples (a, b) qui conviennent sont :
$$\left(i, -i\sqrt{2}\right), \ \left(i, i\sqrt{2}\right), \ \left(-i, -i\sqrt{2}\right), \ \text{ et : } \left(-i, i\sqrt{2}\right).$$
Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 8a - 7b & -8a + 8b \\ 7a - 7b & -7a + 8b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :
$$M_1 = \begin{pmatrix} 7i\sqrt{2} + 8i & -8i\sqrt{2} - 8i \\ 7i\sqrt{2} + 7i & -8i\sqrt{2} - 7i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -7i\sqrt{2} + 8i & 8i\sqrt{2} - 8i \\ -7i\sqrt{2} + 7i & 8i\sqrt{2} - 7i \end{pmatrix},$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 7i\sqrt{2} - 8i & -8i\sqrt{2} + 8i \\ 7i\sqrt{2} - 7i & -8i\sqrt{2} + 7i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} -7i\sqrt{2} - 8i & 8i\sqrt{2} + 8i \\ -7i\sqrt{2} - 7i & 8i\sqrt{2} + 7i \end{pmatrix}.$$
Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 11.

← page 2

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix}-1 & -\frac{3}{2}\\1 & 1\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 - 2M\right)\cdot M = M^3 - 2M^2 = M \cdot \left(M^2 - 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - 2M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}-1 & -\frac{3}{2}\\1 & 1\end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2 - 2M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2 - 2\,a & 0\\0 & b^2 - 2\,b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 2\,a = 1,\\ b^2 - 2\,b = 0.\end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = 2$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - 2\,X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 8$. Les racines de ce polynôme sont donc $\sqrt{2} + 1$ et $-\sqrt{2} + 1$.

Corrigé 12. ← page 3

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + a & = & 2, \\ b^2 + b & = & -2. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + X - 2$ et $X^2 + X + 2$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 9$, et : $\Delta_2 = -7$. Les racines du premier polynôme sont donc 1 et -2, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-2, \frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}\right), \quad \left(-2, -\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}\right), \quad \left(1, \frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}\right), \quad \text{et :} \quad \left(1, -\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\,a + \frac{3}{4}\,b & \frac{1}{4}\,a - \frac{1}{4}\,b \\ \frac{3}{4}\,a - \frac{3}{4}\,b & \frac{3}{4}\,a + \frac{1}{4}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 + M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{7}{8} & -\frac{1}{8}i\sqrt{7} - \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{9}{8} & \frac{1}{8}i\sqrt{7} - \frac{13}{8} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{7}{8} & \frac{1}{8}i\sqrt{7} - \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{9}{8} & -\frac{1}{8}i\sqrt{7} - \frac{13}{8} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{1}{8} & -\frac{1}{8}i\sqrt{7} + \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8}i\sqrt{7} + \frac{9}{8} & \frac{1}{8}i\sqrt{7} + \frac{5}{8} \end{pmatrix},\ \text{et}: M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{1}{8} & \frac{1}{8}i\sqrt{7} + \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8}i\sqrt{7} + \frac{9}{8} & -\frac{1}{8}i\sqrt{7} + \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 13. ← page 3

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+7)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 7\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -7X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{7}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{7}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = -7. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{2}, i\sqrt{7}\right),\ \left(\sqrt{2}, i\sqrt{7}\right),\ \left(-\sqrt{2}, -i\sqrt{7}\right),\ \text{ et : }\ \left(\sqrt{2}, -i\sqrt{7}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{7}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{16}{9}a - \frac{7}{9}b & \frac{14}{9}a - \frac{14}{9}b \\ -\frac{8}{9}a + \frac{8}{9}b & -\frac{7}{9}a + \frac{16}{9}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9}i\sqrt{7} - \frac{16}{9}\sqrt{2} & -\frac{14}{9}i\sqrt{7} - \frac{14}{9}\sqrt{2} \\ \frac{8}{9}i\sqrt{7} + \frac{8}{9}\sqrt{2} & \frac{16}{9}i\sqrt{7} + \frac{7}{9}\sqrt{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9}i\sqrt{7} + \frac{16}{9}\sqrt{2} & -\frac{14}{9}i\sqrt{7} + \frac{14}{9}\sqrt{2} \\ \frac{8}{9}i\sqrt{7} - \frac{8}{9}\sqrt{2} & \frac{16}{9}i\sqrt{7} - \frac{7}{9}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{9}i\sqrt{7} - \frac{16}{9}\sqrt{2} & \frac{14}{9}i\sqrt{7} - \frac{14}{9}\sqrt{2} \\ -\frac{8}{9}i\sqrt{7} + \frac{8}{9}\sqrt{2} & -\frac{16}{9}i\sqrt{7} + \frac{7}{9}\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{9}i\sqrt{7} + \frac{16}{9}\sqrt{2} & \frac{14}{9}i\sqrt{7} + \frac{14}{9}\sqrt{2} \\ -\frac{8}{9}i\sqrt{7} - \frac{8}{9}\sqrt{2} & -\frac{16}{9}i\sqrt{7} - \frac{7}{9}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 14. ← page 3

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

   Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

   avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

   où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a &= 0, \\ b^2 + b &= -1. \end{cases}$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = -1$. Pour déterminer les valeurs de b vérifiant la seconde équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + X + 1$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$.

Corrigé 15. ← page 3

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première

question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2+M=A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1}+P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2+a & 0 \\ 0 & b^2+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2+a &= 1, \\ b^2+b &= -1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes X^2+X-1 et X^2+X+1. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1=5$, et : $\Delta_2=-3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+M=A$.

Corrigé 16. ← page 3

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X-1)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{1,-2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A-\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+2\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=X_1$ et $f_A(X_2)=AX_2=-2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2+2M=A$, on a $AM=\left(M^2+2M\right)\cdot M=M^3+2M^2=M\cdot\left(M^2+2M\right)=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1)=aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2)=bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2+2M=A$, alors il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $M=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première

question. On en déduit :

$$M^2+2M=A \Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1}+2P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+2\,a & 0 \\ 0 & b^2+2\,b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2+2\,a &= 1, \\ b^2+2\,b &= -2. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2+2\,X-1$ et $X^2+2\,X+2$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1=8$, et : $\Delta_2=-4$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+2M=A$.

Corrigé 17. ← page 3

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A-\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=X_1$ et $f_A(X_2)=AX_2=0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2=A$, on a $AM=M^2\cdot M=M^3=M\cdot M^2=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1)=aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2)=bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2=A$, alors il existe $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que : $M=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$M^2=A \Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1, \\ b^2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(1,0)\,,\quad \text{et} :\quad (-1,0)\,.$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a+2\,b & -2\,a+2\,b \\ a-b & 2\,a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \text{et} : M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 18. ← page 4

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \left(M^2 - M\right)\cdot M = M^3 - M^2 = M\cdot\left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a &= 1, \\ b^2 - b &= 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = 1$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 5$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$.

Corrigé 19. ← page 4

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+2)\cdot(X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3,-2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \left(M^2 - M\right)\cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la

première question. On en déduit :

$$M^2 - M = A \Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a &= -2, \\ b^2 - b &= -3. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X + 2$ et $X^2 - X + 3$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = -7$, et : $\Delta_2 = -11$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}i\sqrt{11} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{11} + \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(\frac{1}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{11} + \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{11} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{11} + \frac{1}{2}\right), \text{ et : } \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{11} + \frac{1}{2}\right)$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -15\,a + 16\,b & -20\,a + 20\,b \\ 12\,a - 12\,b & 16\,a - 15\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -8i\sqrt{11} - \frac{15}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2} & -10i\sqrt{11} - 10i\sqrt{7} \\ 6i\sqrt{11} + 6i\sqrt{7} & \frac{15}{2}i\sqrt{11} + 8i\sqrt{7} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 8i\sqrt{11} + \frac{15}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2} & 10i\sqrt{11} + 10i\sqrt{7} \\ -6i\sqrt{11} - 6i\sqrt{7} & -\frac{15}{2}i\sqrt{11} - 8i\sqrt{7} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 8i\sqrt{11} - \frac{15}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2} & 10i\sqrt{11} - 10i\sqrt{7} \\ -6i\sqrt{11} + 6i\sqrt{7} & -\frac{15}{2}i\sqrt{11} + 8i\sqrt{7} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} -8i\sqrt{11} + \frac{15}{2}i\sqrt{7} + \frac{1}{2} & -10i\sqrt{11} + 10i\sqrt{7} \\ 6i\sqrt{11} - 6i\sqrt{7} & \frac{15}{2}i\sqrt{11} - 8i\sqrt{7} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 20. ← page 4

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 2) \cdot (X - 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{7}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \left(M^2 - M\right) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{7}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a &= 2, \\ b^2 - b &= 1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 2$ et $X^2 - X - 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 9$, et : $\Delta_2 = 5$. Les racines du premier polynôme sont donc 2 et -1, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(2, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right), \ \left(2, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right), \ \left(-1, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right), \ \text{ et : } \ \left(-1, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{7}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -6\,a + 7\,b & -7\,a + 7\,b \\ 6\,a - 6\,b & 7\,a - 6\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}\sqrt{5} - \frac{17}{2} & \frac{7}{2}\sqrt{5} - \frac{21}{2} \\ -3\sqrt{5} + 9 & -3\sqrt{5} + 11 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}\sqrt{5} - \frac{17}{2} & -\frac{7}{2}\sqrt{5} - \frac{21}{2} \\ 3\sqrt{5} + 9 & 3\sqrt{5} + 11 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}\sqrt{5} + \frac{19}{2} & \frac{7}{2}\sqrt{5} + \frac{21}{2} \\ -3\sqrt{5} - 9 & -3\sqrt{5} - 10 \end{pmatrix}, \ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}\sqrt{5} + \frac{19}{2} & -\frac{7}{2}\sqrt{5} + \frac{21}{2} \\ 3\sqrt{5} - 9 & 3\sqrt{5} - 10 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 21. ← page 4

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$
Les couples (a,b) qui conviennent sont :
$$(1,0), \quad \text{et :} \quad (-1,0).$$
Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -3\,a+4\,b & a-b \\ -12\,a+12\,b & 4\,a-3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 22. ← page 4

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-6)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 6\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 6\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 6X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \left(M^2 - M\right)\cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 6\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 6\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 6\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2-a & = & 6, \\ b^2-b & = & 1. \end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes X^2-X-6 et X^2-X-1. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1=25$, et : $\Delta_2=5$. Les racines du premier polynôme sont donc 3 et -2, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(3,\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right),\ \left(-2,\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right),\ \left(-2,-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right),\ \text{ et : }\ \left(3,-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P=\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$, donc : $M=\begin{pmatrix} -\frac{2}{5}a+\frac{7}{5}b & -\frac{14}{5}a+\frac{14}{5}b \\ \frac{1}{5}a-\frac{1}{5}b & \frac{7}{5}a-\frac{2}{5}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2-M=A$ sont :

$$M_1=\begin{pmatrix} \frac{7}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & \frac{7}{5}\sqrt{5}-7 \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}+4 \end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix} \frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{3}{2} & \frac{7}{5}\sqrt{5}+7 \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}-3 \end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{pmatrix} -\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{3}{2} & -\frac{7}{5}\sqrt{5}+7 \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5}-3 \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4=\begin{pmatrix} -\frac{7}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & -\frac{7}{5}\sqrt{5}-7 \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5}+4 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2-M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 23. ← page 4

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X-10)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{1,10\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A-10\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A-\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{10}{11} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} \frac{10}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=10X_1$ et $f_A(X_2)=AX_2=X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}})=P\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{10}{11} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2-2M=A$, on a $AM=\left(M^2-2M\right)\cdot M=M^3-2M^2=M\cdot\left(M^2-2M\right)=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1\in\ker(A-10\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-10\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-10\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus

haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - 2M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{10}{11} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 2\,a &= 10, \\ b^2 - 2\,b &= 1. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 2\,X - 10$ et $X^2 - 2\,X - 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 44$, et : $\Delta_2 = 8$. Les racines du premier polynôme sont donc $\sqrt{11}+1$ et $-\sqrt{11}+1$, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{2}+1$ et $-\sqrt{2}+1$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(\sqrt{11}+1, \sqrt{2}+1\right), \ \left(-\sqrt{11}+1, \sqrt{2}+1\right), \ \left(-\sqrt{11}+1, -\sqrt{2}+1\right), \ \text{ et : } \left(\sqrt{11}+1, -\sqrt{2}+1\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{10}{11} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{22}{9} & \frac{20}{9} \\ \frac{22}{9} & -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{11}{9}\,a + \frac{20}{9}\,b & \frac{10}{9}\,a - \frac{10}{9}\,b \\ -\frac{22}{9}\,a + \frac{22}{9}\,b & \frac{20}{9}\,a - \frac{11}{9}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - 2M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{9}\sqrt{11} + \frac{20}{9}\sqrt{2} + 1 & \frac{10}{9}\sqrt{11} - \frac{10}{9}\sqrt{2} \\ -\frac{22}{9}\sqrt{11} + \frac{22}{9}\sqrt{2} & \frac{20}{9}\sqrt{11} - \frac{11}{9}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{9}\sqrt{11} + \frac{20}{9}\sqrt{2} + 1 & -\frac{10}{9}\sqrt{11} - \frac{10}{9}\sqrt{2} \\ \frac{22}{9}\sqrt{11} + \frac{22}{9}\sqrt{2} & -\frac{20}{9}\sqrt{11} - \frac{11}{9}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{11}{9}\sqrt{11} - \frac{20}{9}\sqrt{2} + 1 & -\frac{10}{9}\sqrt{11} + \frac{10}{9}\sqrt{2} \\ \frac{22}{9}\sqrt{11} - \frac{22}{9}\sqrt{2} & -\frac{20}{9}\sqrt{11} + \frac{11}{9}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}, \ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{9}\sqrt{11} - \frac{20}{9}\sqrt{2} + 1 & \frac{10}{9}\sqrt{11} + \frac{10}{9}\sqrt{2} \\ -\frac{22}{9}\sqrt{11} - \frac{22}{9}\sqrt{2} & \frac{20}{9}\sqrt{11} + \frac{11}{9}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - 2M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 24. ← page 5

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+2) \cdot (X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -2, \\ b^2 = -3. \end{cases}$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 25. ← page 5

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X + 1) \cdot (X + 8)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-8, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 8\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -8X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + 3M = A$, on a $AM = \left(M^2 + 3M\right) \cdot M = M^3 + 3M^2 = M \cdot \left(M^2 + 3M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 + 3M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 + 3M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 3P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 3 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + 3\,a & 0 \\ 0 & b^2 + 3\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 + 3\,a &= -1, \\ b^2 + 3\,b &= -8. \end{cases}$$
Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + 3\,X + 1$ et $X^2 + 3\,X + 8$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 5$, et : $\Delta_2 = -23$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + 3M = A$.

Corrigé 26. ← page 5

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 2) \cdot (X - 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en

déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 2, \\ b^2 &= 1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{2}, 1\right), \ \left(\sqrt{2}, -1\right), \ \left(-\sqrt{2}, -1\right), \quad \text{et :} \quad \left(-\sqrt{2}, 1\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 5\,a - 4\,b & 2\,a - 2\,b \\ -10\,a + 10\,b & -4\,a + 5\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} - 4 & 2\sqrt{2} - 2 \\ -10\sqrt{2} + 10 & -4\sqrt{2} + 5 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} + 4 & 2\sqrt{2} + 2 \\ -10\sqrt{2} - 10 & -4\sqrt{2} - 5 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} + 4 & -2\sqrt{2} + 2 \\ 10\sqrt{2} - 10 & 4\sqrt{2} - 5 \end{pmatrix}, \ \text{et :}\ M_4 = \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} - 4 & -2\sqrt{2} - 2 \\ 10\sqrt{2} + 10 & 4\sqrt{2} + 5 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 27. ← page 5

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 28. ← page 5

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(0, -i)\,, \quad \text{et :} \quad (0, i)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a + 2\,b & -2\,a + 2\,b \\ a - b & 2\,a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2i & -2i \\ i & i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 2i & 2i \\ -i & -i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 29. ← page 5

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = (M^2 + M) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot (M^2 + M) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a = 1, \\ b^2 + b = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = -1$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 5$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.

Corrigé 30. ← page 6

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2)

est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 31. ← page 6

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3X_1 + X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 1, \\ c^2 & = & 1, \\ ab + bc & = & 3. \end{array} \right.$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1, \\ c & = & 1 \\ 2b & = & 3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1, \\ c & = & -1 \\ 0 & = & 3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1, \\ c & = & 1 \\ 0 & = & 3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1, \\ c & = & -1 \\ -2b & = & 3 \end{array} \right.$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a, b, c) qui conviennent : $(a, b, c) = \left(1, \frac{3}{2}, 1\right)$ et $(a, b, c) = \left(-1, -\frac{3}{2}, -1\right)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 32. ← page 6

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+2)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -2X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_1 - 2X_2.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & -2, \\ c^2 & = & -2, \\ ab + bc & = & -1. \end{array}\right.$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & i\sqrt{2}, \\ c & = & i\sqrt{2} \\ 2i\sqrt{2}b & = & -1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & i\sqrt{2}, \\ c & = & -i\sqrt{2} \\ 0 & = & -1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -i\sqrt{2}, \\ c & = & i\sqrt{2} \\ 0 & = & -1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -i\sqrt{2}, \\ c & = & -i\sqrt{2} \\ -2i\sqrt{2}b & = & -1 \end{array}\right.$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a,b,c) qui conviennent : $(a,b,c) = \left(i\sqrt{2}, \frac{1}{4}i\sqrt{2}, i\sqrt{2}\right)$ et $(a,b,c) = \left(-i\sqrt{2}, -\frac{1}{4}i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right)$. Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sqrt{2} & \frac{1}{4}i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}i\sqrt{2} & -\frac{1}{4}i\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}i\sqrt{2} & \frac{5}{4}i\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & -\frac{1}{4}i\sqrt{2} \\ 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}i\sqrt{2} & \frac{1}{4}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}i\sqrt{2} & -\frac{5}{4}i\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 33. ← page 6

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+22)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -22\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 22\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{19} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{19} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -22X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -22 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -22 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{19} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -22 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \left(M^2 - M\right) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{19} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -22 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première

question. On en déduit :

$$M^2 - M = A \iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -22 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -22 \end{pmatrix},$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a &= 0, \\ b^2 - b &= -22. \end{cases}$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = 1$. Pour déterminer les valeurs de b vérifiant la seconde équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - X + 22$. Son discriminant est : $\Delta = -87$. Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{1}{2}i\sqrt{87} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{87} + \frac{1}{2}$.

Corrigé 34. ← page 6

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 10) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 10\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 10\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 10X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{9} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 10\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 10\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 10\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{9} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$M^2 = A \iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & 10, \\ b^2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{10}, 0\right), \quad \text{et :} \quad \left(\sqrt{10}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{9} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}\,a + \frac{1}{10}\,b & -\frac{1}{10}\,a + \frac{1}{10}\,b \\ -\frac{9}{10}\,a + \frac{9}{10}\,b & \frac{1}{10}\,a + \frac{9}{10}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ \frac{9}{10}\sqrt{10} & -\frac{1}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}\sqrt{10} & -\frac{1}{10}\sqrt{10} \\ -\frac{9}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 35. ← page 7

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 5)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -5\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{9}{14} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{14} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -5X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{14} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{9}{14} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 0, \\ b^2 &= -5. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(0, i\sqrt{5}\right), \quad \text{et : } \left(0, -i\sqrt{5}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{9}{14} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{14}{5} \\ -\frac{14}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5}a + \frac{14}{5}b & -\frac{9}{5}a + \frac{9}{5}b \\ \frac{14}{5}a - \frac{14}{5}b & \frac{14}{5}a - \frac{9}{5}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{14}{5}i\sqrt{5} & \frac{9}{5}i\sqrt{5} \\ -\frac{14}{5}i\sqrt{5} & -\frac{9}{5}i\sqrt{5} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{14}{5}i\sqrt{5} & -\frac{9}{5}i\sqrt{5} \\ \frac{14}{5}i\sqrt{5} & \frac{9}{5}i\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 36. ← page 7

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\overset{(P^{-1}\times)}{\underset{(\times P)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & -1, \\ b^2 & = & -3. \end{array} \right.$$
Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 37. ← page 7

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il

existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 1, \\ b^2 &= 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1, 0), \quad \text{et :} \quad (-1, 0).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -8\,a + 9\,b & 9\,a - 9\,b \\ -8\,a + 8\,b & 9\,a - 8\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 38. ← page 7

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X + 1) \cdot (X + 7)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 7\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -7X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= -1, \\ b^2 &= -7. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(i, -i\sqrt{7}\right), \ \left(-i, -i\sqrt{7}\right), \ \left(-i, i\sqrt{7}\right), \quad \text{et :} \ \left(i, i\sqrt{7}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{11}{6} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} \frac{11}{6}a - \frac{5}{6}b & \frac{11}{6}a - \frac{11}{6}b \\ -\frac{5}{6}a + \frac{5}{6}b & -\frac{5}{6}a + \frac{11}{6}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}i\sqrt{7} + \frac{11}{6}i & \frac{11}{6}i\sqrt{7} + \frac{11}{6}i \\ -\frac{5}{6}i\sqrt{7} - \frac{5}{6}i & -\frac{11}{6}i\sqrt{7} - \frac{5}{6}i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}i\sqrt{7} - \frac{11}{6}i & \frac{11}{6}i\sqrt{7} - \frac{11}{6}i \\ -\frac{5}{6}i\sqrt{7} + \frac{5}{6}i & -\frac{11}{6}i\sqrt{7} + \frac{5}{6}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}i\sqrt{7} - \frac{11}{6}i & -\frac{11}{6}i\sqrt{7} - \frac{11}{6}i \\ \frac{5}{6}i\sqrt{7} + \frac{5}{6}i & \frac{11}{6}i\sqrt{7} + \frac{5}{6}i \end{pmatrix}, \ \text{et :} \ M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}i\sqrt{7} + \frac{11}{6}i & -\frac{11}{6}i\sqrt{7} + \frac{11}{6}i \\ \frac{5}{6}i\sqrt{7} - \frac{5}{6}i & \frac{11}{6}i\sqrt{7} - \frac{5}{6}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 39. ← page 7

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_1 - X_2.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ c^2 = -1, \\ ab + bc = -1. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& i, \\ c &=& i \\ 2i\,b &=& -1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& i, \\ c &=& -i \\ 0 &=& -1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -i, \\ c &=& i \\ 0 &=& -1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -i, \\ c &=& -i \\ -2i\,b &=& -1 \end{array}\right.$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a, b, c) qui conviennent : $(a, b, c) = \left(i, \frac{1}{2}i, i\right)$ et $(a, b, c) = \left(-i, -\frac{1}{2}i, -i\right)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & \frac{1}{2}i \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ \frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ -\frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 40. ← page 7

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 2) \cdot (X - 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première

question. On en déduit :

$$M^2 = A \Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 2, \\ b^2 &= 1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{2}, 1\right), \ \left(\sqrt{2}, -1\right), \ \left(-\sqrt{2}, -1\right), \quad \text{et :} \quad \left(-\sqrt{2}, 1\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a + 2\,b & -a + b \\ 2\,a - 2\,b & 2\,a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + 2 & -\sqrt{2} + 1 \\ 2\sqrt{2} - 2 & 2\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 2 & -\sqrt{2} - 1 \\ 2\sqrt{2} + 2 & 2\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} - 1 \\ -2\sqrt{2} + 2 & -2\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 2 & \sqrt{2} + 1 \\ -2\sqrt{2} - 2 & -2\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 41. ← page 8

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 4) \cdot (X - 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 4\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 - 2M\right) \cdot M = M^3 - 2M^2 = M \cdot \left(M^2 - 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - 2M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 - 2\,a &= 4, \\ b^2 - 2\,b &= 1. \end{cases}$$
Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 2\,X - 4$ et $X^2 - 2\,X - 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 20$, et : $\Delta_2 = 8$. Les racines du premier polynôme sont donc $\sqrt{5}+1$ et $-\sqrt{5}+1$, tandis que les racines du second polynôme sont $\sqrt{2}+1$ et $-\sqrt{2}+1$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :
$$\left(-\sqrt{5}+1, \sqrt{2}+1\right),\ \left(-\sqrt{5}+1, -\sqrt{2}+1\right),\ \left(\sqrt{5}+1, -\sqrt{2}+1\right),\ \text{ et : } \left(\sqrt{5}+1, \sqrt{2}+1\right).$$
Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\,a - \frac{2}{3}\,b & -\frac{1}{3}\,a + \frac{1}{3}\,b \\ \frac{10}{3}\,a - \frac{10}{3}\,b & -\frac{2}{3}\,a + \frac{5}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - 2M = A$ sont :
$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + 1 & \frac{1}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{10}{3}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{5}{3}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + 1 & \frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{10}{3}\sqrt{5} + \frac{10}{3}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{3}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix},$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + 1 & -\frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{10}{3}\sqrt{5} + \frac{10}{3}\sqrt{2} & -\frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{3}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + 1 & -\frac{1}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{10}{3}\sqrt{2} & -\frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{5}{3}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}.$$
Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - 2M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 42. ← page 8

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la deuxième colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6X_1 - X_2.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ c^2 = -1, \\ ab + bc = 6. \end{cases}$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 43.

← page 8

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 1, \\ b^2 & = & 0. \end{array} \right.$$
Les couples (a,b) qui conviennent sont :
$$(1,0), \quad \text{et :} \quad (-1,0).$$
Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} 3\,a - 2\,b & -a + b \\ 6\,a - 6\,b & -2\,a + 3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 44. ← page 8

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -3\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \left(M^2 - M\right) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a & = & 2, \\ b^2 - b & = & -3. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 2$ et $X^2 - X + 3$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 9$, et : $\Delta_2 = -11$. Les racines du premier polynôme sont donc 2 et -1, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2} i\sqrt{11} + \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} i\sqrt{11} + \frac{1}{2}$. Les couples (a, b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-1, -\frac{1}{2} i\sqrt{11} + \frac{1}{2}\right), \quad \left(-1, \frac{1}{2} i\sqrt{11} + \frac{1}{2}\right), \quad \left(2, -\frac{1}{2} i\sqrt{11} + \frac{1}{2}\right), \quad \text{et : } \left(2, \frac{1}{2} i\sqrt{11} + \frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} a - \frac{2}{5} b & -\frac{14}{5} a + \frac{14}{5} b \\ \frac{1}{5} a - \frac{1}{5} b & -\frac{2}{5} a + \frac{7}{5} b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} i\sqrt{11} - \frac{8}{5} & -\frac{7}{5} i\sqrt{11} + \frac{21}{5} \\ \frac{1}{10} i\sqrt{11} - \frac{3}{10} & -\frac{7}{10} i\sqrt{11} + \frac{11}{10} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} i\sqrt{11} - \frac{8}{5} & \frac{7}{5} i\sqrt{11} + \frac{21}{5} \\ -\frac{1}{10} i\sqrt{11} - \frac{3}{10} & \frac{7}{10} i\sqrt{11} + \frac{11}{10} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} i\sqrt{11} + \frac{13}{5} & -\frac{7}{5} i\sqrt{11} - \frac{21}{5} \\ \frac{1}{10} i\sqrt{11} + \frac{3}{10} & -\frac{7}{10} i\sqrt{11} - \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} i\sqrt{11} + \frac{13}{5} & \frac{7}{5} i\sqrt{11} - \frac{21}{5} \\ -\frac{1}{10} i\sqrt{11} + \frac{3}{10} & \frac{7}{10} i\sqrt{11} - \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 45. ← page 8

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5X_1.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1, X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 0, \\ c^2 & = & 0, \\ ab + bc & = & 5. \end{array} \right.$$
Ce système linéaire équivaut à $a = c = 0$, et $0 = 5$: c'est impossible. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.
Remarque. La matrice A est nilpotente (on a trouvé que : $\chi_A = X^2$, donc : $\chi_A(A) = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton). Donc, toujours en utilisant ce théorème de Cayley-Hamilton, on peut démontrer aisément que M n'existe pas, sans passer par la réduction à des sous-espaces stables : si $M^2 = A$, alors $M^4 = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, donc M est nilpotente. On en déduit, par un argument classique, que son unique valeur propre complexe est 0, donc $\chi_M = (X - 0)^2 = X^2$, et comme pour A on en déduit que $M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Or $M^2 = A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$: contradiction.

Corrigé 46. ← page 8

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 &= 1, \\ b^2 &= 0. \end{cases}$$
Les couples (a, b) qui conviennent sont :
$$(1, 0), \quad \text{et : } \quad (-1, 0).$$
Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 2\,a - b & a - b \\ -2\,a + 2\,b & -a + 2\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :
$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 47. ← page 9

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 3) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = (M^2 - M) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot (M^2 - M) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - a & = & 3, \\ b^2 - b & = & -1. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 3$ et $X^2 - X + 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 13$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M = A$.

Corrigé 48. ← page 9

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 4) \cdot (X - 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 4\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(-2, 1)\,,\ (2, -1)\,,\ (2, 1)\,,\quad \text{et :}\quad (-2, -1)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}\,a - \frac{4}{3}\,b & -\frac{2}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b \\ \frac{14}{3}\,a - \frac{14}{3}\,b & -\frac{4}{3}\,a + \frac{7}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -14 & 5 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 14 & -5 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{14}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 49. ← page 9

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2,3\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A-2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\1&1\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2\cdot M = M^3 = M\cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A-3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\1&1\end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned}M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2P^{-1} = P\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}P^{-1}\\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix},\end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 = 3,\\ b^2 = 2.\end{cases}$$
Les couples (a,b) qui conviennent sont :
$$\left(-\sqrt{3},\sqrt{2}\right),\ \left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right),\ \left(-\sqrt{3},-\sqrt{2}\right),\ \text{ et : } \left(\sqrt{3},-\sqrt{2}\right).$$
Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\1&1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix}-2&2\\2&-1\end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -a+2b & a-b \\ -2a+2b & 2a-b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2\sqrt{2} & -\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3}+2\sqrt{2} & -2\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}+2\sqrt{2} & \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ -2\sqrt{3}+2\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2\sqrt{2} & -\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3}-2\sqrt{2} & -2\sqrt{3}+\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \text{et} : M_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}-2\sqrt{2} & \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -2\sqrt{3}-2\sqrt{2} & 2\sqrt{3}+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 50. ← page 9

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1,-2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A+\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 13M = A$, on a $AM = (M^2-13M)\cdot M = M^3 - 13M^2 = M\cdot(M^2-13M) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - 13M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 13M = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 13P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 13\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2-13a & 0 \\ 0 & b^2-13b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2-13\,a & = & -1, \\ b^2-13\,b & = & -2. \end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2-13\,X+1$ et $X^2-13\,X+2$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1=165$, et : $\Delta_2=161$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{165}+\frac{13}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{165}+\frac{13}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2}$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{165}+\frac{13}{2},\frac{1}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{165}+\frac{13}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{165}+\frac{13}{2},\frac{1}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2}\right),\ \text{et : } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{165}+\frac{13}{2},\right.$$

Alors, la relation $M=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P=\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, donc : $M=\begin{pmatrix} -6\,a+7\,b & 14\,a-14\,b \\ -3\,a+3\,b & 7\,a-6\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2-13M=A$ sont :

$$M_1=\begin{pmatrix} 3\sqrt{165}+\frac{7}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2} & -7\sqrt{165}-7\sqrt{161} \\ \frac{3}{2}\sqrt{165}+\frac{3}{2}\sqrt{161} & -\frac{7}{2}\sqrt{165}-3\sqrt{161}+\frac{13}{2} \end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix} -3\sqrt{165}-\frac{7}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2} & 7\sqrt{165}+7\sqrt{161} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{165}-\frac{3}{2}\sqrt{161} & \frac{7}{2}\sqrt{165}+3\sqrt{161}+\frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_3=\begin{pmatrix} -3\sqrt{165}+\frac{7}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2} & 7\sqrt{165}-7\sqrt{161} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{165}+\frac{3}{2}\sqrt{161} & \frac{7}{2}\sqrt{165}-3\sqrt{161}+\frac{13}{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4=\begin{pmatrix} 3\sqrt{165}-\frac{7}{2}\sqrt{161}+\frac{13}{2} & -7\sqrt{165}+7\sqrt{161} \\ \frac{3}{2}\sqrt{165}-\frac{3}{2}\sqrt{161} & -\frac{7}{2}\sqrt{165}+3\sqrt{161}+\frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2-13M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 51. ← page 9

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X-1)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{1,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A-\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right),\quad \ker(A+\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=X_1$ et $f_A(X_2)=AX_2=-X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}})=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2=A$, on a $AM=M^2\cdot M=M^3=M\cdot M^2=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A-\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il

existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(-1,-i)\,,\ (-1,i)\,,\ (1,-i)\,,\quad \text{et :}\quad (1,i)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 2\,a - b & \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b \\ -4\,a + 4\,b & -a + 2\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} i-2 & \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \\ -4i+4 & -2i+1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -i-2 & -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \\ 4i+4 & 2i+1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} i+2 & \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} \\ -4i-4 & -2i-1 \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -i+2 & -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} \\ 4i-4 & 2i-1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 52. ← page 9

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1) \cdot (X+7)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 7\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -7X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \big(M^2 - M\big) \cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \big(M^2 - M\big) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a = 1, \\ b^2 - b = -7. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - X - 1$ et $X^2 - X + 7$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 5$, et : $\Delta_2 = -27$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M = A$.

Corrigé 53. ← page 10

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$
Les couples (a, b) qui conviennent sont :
$$(0, -i), \quad \text{et} : \ (0, i).$$
Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b \\ -a + b & 2a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :
$$M_1 = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ -i & i \end{pmatrix}, \text{ et} : M_2 = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ i & -i \end{pmatrix}.$$
Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 54. ← page 10

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 4) \cdot (X - 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 4\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(-2, 1)\,,\ (2, -1)\,,\ (2, 1)\,,\ \text{ et : }\ (-2, -1)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b & \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b \\ \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b & \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 55. ← page 10

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 0, \\ b^2 &= -1. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(0, -i), \quad \text{et : } \quad (0, i).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, donc :
$M = \begin{pmatrix} -5\,a+6\,b & -15\,a+15\,b \\ 2\,a-2\,b & 6\,a-5\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6i & -15i \\ 2i & 5i \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 6i & 15i \\ -2i & -5i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 56. ← page 10

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 - 2M\right)\cdot M = M^3 - 2M^2 = M \cdot \left(M^2 - 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - 2M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première

question. On en déduit :

$$M^2 - 2M = A \iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2 - 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 2\,a &= 1, \\ b^2 - 2\,b &= -2. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 2\,X - 1$ et $X^2 - 2\,X + 2$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 8$, et : $\Delta_2 = -4$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - 2M = A$.

Corrigé 57. ← page 10

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la deuxième colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -2X_1.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 0, \\ c^2 & = & 0, \\ ab+bc & = & -2. \end{array} \right.$$

Ce système linéaire équivaut à $a = c = 0$, et $0 = -2$: c'est impossible. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.
Remarque. La matrice A est nilpotente (on a trouvé que : $\chi_A = X^2$, donc : $\chi_A(A) = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton). Donc, toujours en utilisant ce théorème de Cayley-Hamilton, on peut démontrer aisément que M n'existe pas, sans passer par la réduction à des sous-espaces stables : si $M^2 = A$, alors $M^4 = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$, donc M est nilpotente. On en déduit, par un argument classique, que son unique valeur propre complexe est 0, donc $\chi_M = (X-0)^2 = X^2$, et comme pour A on en déduit que $M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$. Or $M^2 = A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$: contradiction.

Corrigé 58. ← page 10

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_1 - X_2.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité,

$f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & ab + bc + b \\ 0 & c^2 + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + a & = & -1, \\ c^2 + c & = & -1, \\ ab + bc + b & = & -1. \end{array} \right.$$

Déterminons d'abord les solutions de la première équation (qui donne aussi les solutions de la seconde). Cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + X + 1$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$.

Corrigé 59. ← page 11

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 5)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -5\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -5X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel

que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -5. \end{cases}$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 60. ← page 11

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(-1,-i)\,,\ (-1,i)\,,\ (1,-i)\,,\ \text{ et : }\ (1,i)\,.$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b & -\frac{3}{2}\,a + \frac{3}{2}\,b \\ \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b & -\frac{1}{2}\,a + \frac{3}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i - \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}i + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}i + \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i - \frac{3}{2} & \frac{3}{2}i + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} & \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}i - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}i - \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i + \frac{3}{2} & \frac{3}{2}i - \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} & \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 61. ← page 11

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_1 - X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ c^2 = -1, \\ ab + bc = -1. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\begin{cases} a = i, \\ c = i \\ 2i\,b = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = i, \\ c = -i \\ 0 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -i, \\ c = i \\ 0 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -i, \\ c = -i \\ -2i\,b = -1 \end{cases}$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a, b, c) qui conviennent : $(a, b, c) = \left(i, \frac{1}{2}i, i\right)$ et $(a, b, c) = \left(-i, -\frac{1}{2}i, -i\right)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & \frac{1}{2}i \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & \frac{3}{2}i \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & -\frac{3}{2}i \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 62. ← page 11

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+2)\cdot(X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3,-2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A+2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2\cdot M = M^3 = M\cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A+2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & -2,\\ b^2 & = & -3. \end{array}\right.$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 63. ← page 11

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A+\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= -1, \\ b^2 &= -3. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(i, -i\sqrt{3}\right), \ \left(-i, i\sqrt{3}\right), \ \left(-i, -i\sqrt{3}\right), \quad \text{et : } \left(i, i\sqrt{3}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -5\,a + 6\,b & 6\,a - 6\,b \\ -5\,a + 5\,b & 6\,a - 5\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6i\sqrt{3} - 5i & 6i\sqrt{3} + 6i \\ -5i\sqrt{3} - 5i & 5i\sqrt{3} + 6i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 6i\sqrt{3} + 5i & -6i\sqrt{3} - 6i \\ 5i\sqrt{3} + 5i & -5i\sqrt{3} - 6i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -6i\sqrt{3}+5i & 6i\sqrt{3}-6i \\ -5i\sqrt{3}+5i & 5i\sqrt{3}-6i \end{pmatrix}, \text{ et} : M_4 = \begin{pmatrix} 6i\sqrt{3}-5i & -6i\sqrt{3}+6i \\ 5i\sqrt{3}-5i & -5i\sqrt{3}+6i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 64. ← page 11

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -4\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= 0, \\ b^2 &= -4. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$(0, 2i), \quad \text{et} : \ (0, -2i).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}, \text{ et} : M_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 65. ← page 12

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-4)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,4\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + 2M = A$, on a $AM = \left(M^2+2M\right)\cdot M = M^3 + 2M^2 = M\cdot\left(M^2+2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-4\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 + 2M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première

question. On en déduit :

$$M^2+2M=A \Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1}+2P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+2\,a & 0 \\ 0 & b^2+2\,b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+2\,a & = & 4, \\ b^2+2\,b & = & 0. \end{array}\right.$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b=0$ et $b=-2$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2+2\,X-4$. Son discriminant est : $\Delta=20$. Les racines de ce polynôme sont donc $\sqrt{5}-1$ et $-\sqrt{5}-1$.

Corrigé 66. ← page 12

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A=(X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker\left(A+\mathrm{I}_2\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1,X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1,X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1)=AX_1=-X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2)=AX_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=2X_1-X_2.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :
$$A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}})=P\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2=A$, on a $AM=M^2\cdot M=M^3=M\cdot M^2=MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1\in\ker(A+\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1)=aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1,X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b,c)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2)=bX_1+cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :
$$M=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}})=P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= -1, \\ c^2 &= -1, \\ ab+bc &= 2. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\begin{cases} a &= i, \\ c &= i \\ 2i\,b &= 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= i, \\ c &= -i \\ 0 &= 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= -i, \\ c &= i \\ 0 &= 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= -i, \\ c &= -i \\ -2i\,b &= 2 \end{cases}$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a,b,c) qui conviennent : $(a,b,c) = (i,-i,i)$ et $(a,b,c) = (-i,i,-i)$. Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 2i \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -2i \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 67. ← page 12

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 - 2M\right) \cdot M = M^3 - 2M^2 = M \cdot \left(M^2 - 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - 2M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 2\,a &= 0, \\ b^2 - 2\,b &= -1. \end{cases}$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = 2$, et la seconde se résout en notant que : $b^2 - 2\,b + 1 = (b - 1)^2$, de sorte que : $b^2 - 2\,b + 1 = 0 \iff b = 1$. Les couples (a, b) solutions du système ci-dessus sont donc :

$$(0{,}1), \text{ et : } (2{,}1).$$

Corrigé 68. ← page 12

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X + 1) \cdot (X + 21)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-21, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_2\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker\left(A + 21\mathrm{I}_2\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -21X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -21 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -21 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -21 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les

notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -21 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -21 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -21 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -21 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 &= -1, \\ b^2 &= -21. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-i, i\sqrt{21}\right), \quad \left(i, i\sqrt{21}\right), \quad \left(i, -i\sqrt{21}\right), \quad \text{et} : \quad \left(-i, -i\sqrt{21}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{11}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}a + \frac{11}{10}b & -\frac{11}{10}a + \frac{11}{10}b \\ \frac{1}{10}a - \frac{1}{10}b & \frac{11}{10}a - \frac{1}{10}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{10}i\sqrt{21} + \frac{1}{10}i & \frac{11}{10}i\sqrt{21} + \frac{11}{10}i \\ -\frac{1}{10}i\sqrt{21} - \frac{1}{10}i & -\frac{1}{10}i\sqrt{21} - \frac{11}{10}i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{10}i\sqrt{21} - \frac{1}{10}i & \frac{11}{10}i\sqrt{21} - \frac{11}{10}i \\ -\frac{1}{10}i\sqrt{21} + \frac{1}{10}i & -\frac{1}{10}i\sqrt{21} + \frac{11}{10}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10}i\sqrt{21} - \frac{1}{10}i & -\frac{11}{10}i\sqrt{21} - \frac{11}{10}i \\ \frac{1}{10}i\sqrt{21} + \frac{1}{10}i & \frac{1}{10}i\sqrt{21} + \frac{11}{10}i \end{pmatrix}, \quad \text{et} : M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10}i\sqrt{21} + \frac{1}{10}i & -\frac{11}{10}i\sqrt{21} + \frac{11}{10}i \\ \frac{1}{10}i\sqrt{21} - \frac{1}{10}i & \frac{1}{10}i\sqrt{21} - \frac{11}{10}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 69. ← page 12

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 + 2M\right) \cdot M = M^3 + 2M^2 = M \cdot \left(M^2 + 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + 2M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + 2M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 2P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 + 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + 2\,a &= 0, \\ b^2 + 2\,b &= -2. \end{cases}$$

La première équation a clairement pour solutions $a = 0$ et $a = -2$. Pour déterminer les valeurs de b vérifiant la seconde équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + 2\,X + 2$. Son discriminant est : $\Delta = -4$. Les racines de ce polynôme sont donc $i - 1$ et $-i - 1$.

Corrigé 70. ← page 13

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X + 2) \cdot (X + 3)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3, -2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -3X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base

(X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -2, \\ b^2 = -3. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-i\sqrt{2}, -i\sqrt{3}\right), \quad \left(-i\sqrt{2}, i\sqrt{3}\right), \quad \left(i\sqrt{2}, i\sqrt{3}\right), \quad \text{et : } \left(i\sqrt{2}, -i\sqrt{3}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} 6\,a - 5\,b & -2\,a + 2\,b \\ 15\,a - 15\,b & -5\,a + 6\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5i\sqrt{3} - 6i\sqrt{2} & -2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{2} \\ 15i\sqrt{3} - 15i\sqrt{2} & -6i\sqrt{3} + 5i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -5i\sqrt{3} - 6i\sqrt{2} & 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{2} \\ -15i\sqrt{3} - 15i\sqrt{2} & 6i\sqrt{3} + 5i\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -5i\sqrt{3} + 6i\sqrt{2} & 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{2} \\ -15i\sqrt{3} + 15i\sqrt{2} & 6i\sqrt{3} - 5i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} 5i\sqrt{3} + 6i\sqrt{2} & -2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{2} \\ 15i\sqrt{3} + 15i\sqrt{2} & -6i\sqrt{3} - 5i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 71. ← page 13

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-5)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{5, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 5, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{5}, i\right), \ \left(\sqrt{5}, -i\right), \ \left(-\sqrt{5}, i\right), \ \text{ et : } \left(-\sqrt{5}, -i\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\,a - \frac{2}{3}\,b & \frac{5}{6}\,a - \frac{5}{6}\,b \\ -\frac{4}{3}\,a + \frac{4}{3}\,b & -\frac{2}{3}\,a + \frac{5}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3}i & \frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{5}{6}i \\ -\frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{5}{3}i \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}i & \frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{5}{6}i \\ -\frac{4}{3}\sqrt{5} - \frac{4}{3}i & -\frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{3}i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3}i & -\frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{5}{6}i \\ \frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{5}{3}i \end{pmatrix},\ \text{et} : M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}i & -\frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{5}{6}i \\ \frac{4}{3}\sqrt{5} - \frac{4}{3}i & \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{3}i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 72. ← page 13

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 20) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 20\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - 20\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 20X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 20\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 20\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 20\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+a & = & 20, \\ b^2+b & = & 0. \end{array}\right.$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b=0$ et $b=-1$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme X^2+X-20. Son discriminant est : $\Delta = 81$. Les racines de ce polynôme sont donc 4 et -5.

Corrigé 73. ← page 13

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A-2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix}1 & \frac{5}{4}\\1 & 1\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2\cdot M = M^3 = M\cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A-2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}1 & \frac{5}{4}\\1 & 1\end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix}a^2 & 0\\0 & b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 2, \\ b^2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{2}, 0\right), \quad \text{et : } \left(\sqrt{2}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -4\,a + 5\,b & 5\,a - 5\,b \\ -4\,a + 4\,b & 5\,a - 4\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 74. ← page 13

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

   Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

   avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - M = A$, on a $AM = \left(M^2 - M\right)\cdot M = M^3 - M^2 = M \cdot \left(M^2 - M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

   où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 - M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première

question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - a = 2, \\ b^2 - b = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = 1$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - X - 2$. Son discriminant est : $\Delta = 9$. Les racines de ce polynôme sont donc 2 et -1.

Corrigé 75. ← page 13

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right)\cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+a &=& 2, \\ b^2+b &=& -1. \end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes X^2+X-2 et X^2+X+1. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 9$, et : $\Delta_2 = -3$. Or un polynôme de discriminant strictement négatif n'admet pas de racine réelle, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+M=A$.

Corrigé 76. ← page 14

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A+\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 + 58M = A$, on a $AM = \left(M^2+58M\right) \cdot M = M^3 + 58M^2 = M \cdot \left(M^2+58M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2+58M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 + 58M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + 58P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + 58 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+58\,a & 0 \\ 0 & b^2+58\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+58\,a &=& 0, \\ b^2+58\,b &=& -1. \end{array}\right.$$
La première équation a clairement pour solutions $a=0$ et $a=-58$. Pour déterminer les valeurs de b vérifiant la seconde équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2+58\,X+1$. Son discriminant est : $\Delta = 3360$. Les racines de ce polynôme sont donc $2\sqrt{210}-29$ et $-2\sqrt{210}-29$.

Corrigé 77. ← page 14

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-14)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 14\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 14\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 14X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 14\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 14\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 14\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 14, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{14}, -1\right), \ \left(\sqrt{14}, 1\right), \ \left(\sqrt{14}, -1\right), \ \text{ et : } \left(-\sqrt{14}, 1\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{13} & \frac{22}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{9}{13} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13}\,a + \frac{22}{13}\,b & -\frac{18}{13}\,a + \frac{18}{13}\,b \\ \frac{11}{13}\,a - \frac{11}{13}\,b & \frac{22}{13}\,a - \frac{9}{13}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{13}\sqrt{14} - \frac{22}{13} & \frac{18}{13}\sqrt{14} - \frac{18}{13} \\ -\frac{11}{13}\sqrt{14} + \frac{11}{13} & -\frac{22}{13}\sqrt{14} + \frac{9}{13} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13}\sqrt{14} + \frac{22}{13} & -\frac{18}{13}\sqrt{14} + \frac{18}{13} \\ \frac{11}{13}\sqrt{14} - \frac{11}{13} & \frac{22}{13}\sqrt{14} - \frac{9}{13} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13}\sqrt{14} - \frac{22}{13} & -\frac{18}{13}\sqrt{14} - \frac{18}{13} \\ \frac{11}{13}\sqrt{14} + \frac{11}{13} & \frac{22}{13}\sqrt{14} + \frac{9}{13} \end{pmatrix},\ \text{et}: M_4 = \begin{pmatrix} \frac{9}{13}\sqrt{14} + \frac{22}{13} & \frac{18}{13}\sqrt{14} + \frac{18}{13} \\ -\frac{11}{13}\sqrt{14} - \frac{11}{13} & -\frac{22}{13}\sqrt{14} - \frac{9}{13} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 78. ← page 14

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+7)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right),\quad \ker(A + 7\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -7X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2\cdot M = M^3 = M\cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & -1, \\ b^2 & = & -7. \end{array}\right.$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 79. ← page 14

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X-1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 3\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right)\cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 + a & = & 3, \\ b^2 + b & = & 1. \end{array}\right.$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + X - 3$ et $X^2 + X - 1$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 13$, et : $\Delta_2 = 5$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right),\ \text{ et : }\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 11 \\ 10 & -10\end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -10\,a+11\,b & 11\,a-11\,b \\ -10\,a+10\,b & 11\,a-10\,b\end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2+M=A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5\sqrt{13}-\frac{11}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & -\frac{11}{2}\sqrt{13}+\frac{11}{2}\sqrt{5} \\ 5\sqrt{13}-5\sqrt{5} & -\frac{11}{2}\sqrt{13}+5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 5\sqrt{13}+\frac{11}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & -\frac{11}{2}\sqrt{13}-\frac{11}{2}\sqrt{5} \\ 5\sqrt{13}+5\sqrt{5} & -\frac{11}{2}\sqrt{13}-5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -5\sqrt{13}-\frac{11}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & \frac{11}{2}\sqrt{13}+\frac{11}{2}\sqrt{5} \\ -5\sqrt{13}-5\sqrt{5} & \frac{11}{2}\sqrt{13}+5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -5\sqrt{13}+\frac{11}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & \frac{11}{2}\sqrt{13}-\frac{11}{2}\sqrt{5} \\ -5\sqrt{13}+5\sqrt{5} & \frac{11}{2}\sqrt{13}-5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez M^2+M et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 80. ← page 14

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X\cdot(X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,-2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1\end{pmatrix}\right),\quad \ker(A+2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1,X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1,X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2\cdot M = M^3 = M\cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1\in\ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1)\in\ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1,X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -2. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(0, -i\sqrt{2}\right), \quad \text{et :} \quad \left(0, i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ -\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b & -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\sqrt{2} & \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}i\sqrt{2} & -\frac{3}{2}i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}i\sqrt{2} & \frac{3}{2}i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 81. ← page 14

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot(X+7)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7, 1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 7\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -7X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = -7. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(1, i\sqrt{7}\right),\ \left(-1, -i\sqrt{7}\right),\ \left(-1, i\sqrt{7}\right),\ \text{et : } \left(1, -i\sqrt{7}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}a + \frac{5}{8}b & \frac{3}{8}a - \frac{3}{8}b \\ \frac{5}{8}a - \frac{5}{8}b & \frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}i\sqrt{7} + \frac{3}{8} & -\frac{3}{8}i\sqrt{7} + \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8}i\sqrt{7} + \frac{5}{8} & \frac{3}{8}i\sqrt{7} + \frac{5}{8} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8}i\sqrt{7} - \frac{3}{8} & \frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8}i\sqrt{7} - \frac{5}{8} & -\frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{5}{8} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}i\sqrt{7} - \frac{3}{8} & -\frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8}i\sqrt{7} - \frac{5}{8} & \frac{3}{8}i\sqrt{7} - \frac{5}{8} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8}i\sqrt{7} + \frac{3}{8} & \frac{3}{8}i\sqrt{7} + \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8}i\sqrt{7} + \frac{5}{8} & -\frac{3}{8}i\sqrt{7} + \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 82. ← page 15

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -3X_1 - X_2.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}-1 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}-1 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix}-1 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 + 19M = A$, on a $AM = \left(M^2 + 19M\right) \cdot M = M^3 + 19M^2 = M \cdot \left(M^2 + 19M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + 19M = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix}-1 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned}
M^2 + 19M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}^2 P^{-1} + 19P\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}-1 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}^2 + 19\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2 + 19\,a & ab + bc + 19\,b\\0 & c^2 + 19\,c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -3\\0 & -1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\left\{\begin{array}{rcl}
a^2 + 19\,a &=& -1,\\
c^2 + 19\,c &=& -1,\\
ab + bc + 19\,b &=& -3.
\end{array}\right.$$

Déterminons d'abord les solutions de la première équation (qui donne aussi les solutions de la seconde). Cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + 19\,X + 1$. Son discriminant est : $\Delta = 357$. On en déduit que les solutions de la première équation sont $\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}$. De même pour c. Les couples (a,c) qui vérifient les deux premières équations sont donc : $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}\right)$ et : $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}\right)$. On remarque cependant que quand a et c sont distincts, la dernière équation du système linéaire ci-dessus équivaut à : $0 = -3$, ce qui n'admet pas de solution. Il faut donc exclure les couples de solutions distinctes, et ce système linéaire équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& \frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}, \\ c &=& \frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2} \\ \sqrt{357}b &=& -3 \end{array}\right. \quad \text{ou :} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}, \\ c &=& -\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2} \\ -\sqrt{357}b &=& -3 \end{array}\right.$$

Nous avons donc deux triplets (a,b,c) qui conviennent : $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}, -\frac{1}{119}\sqrt{357}, \frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}\right)$ et $(a,b,c) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}, \frac{1}{119}\sqrt{357}, -\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2}\right)$. Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 + 19M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2} & -\frac{1}{119}\sqrt{357} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{121}{238}\sqrt{357} - \frac{19}{2} & \frac{1}{119}\sqrt{357} \\ -\frac{1}{119}\sqrt{357} & \frac{117}{238}\sqrt{357} - \frac{19}{2} \end{pmatrix},$$

et :

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2} & \frac{1}{119}\sqrt{357} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{357} - \frac{19}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{121}{238}\sqrt{357} - \frac{19}{2} & -\frac{1}{119}\sqrt{357} \\ \frac{1}{119}\sqrt{357} & -\frac{117}{238}\sqrt{357} - \frac{19}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + 19M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 83. ← page 15

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot(X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 3, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{3}, i\right), \quad \left(-\sqrt{3}, -i\right), \quad \left(\sqrt{3}, -i\right), \quad \text{et : } \left(\sqrt{3}, i\right).$$

Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a + 2\,b & a - b \\ -2\,a + 2\,b & 2\,a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 2i & -\sqrt{3} - i \\ 2\sqrt{3} + 2i & -2\sqrt{3} - i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2i & -\sqrt{3} + i \\ 2\sqrt{3} - 2i & -2\sqrt{3} + i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - 2i & \sqrt{3} + i \\ -2\sqrt{3} - 2i & 2\sqrt{3} + i \end{pmatrix}, \quad \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} + 2i & \sqrt{3} - i \\ -2\sqrt{3} + 2i & 2\sqrt{3} - i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 84. ← page 15

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+6)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-6, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 6\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{11} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -6X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{11} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{11} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ b^2 = -6. \end{cases}$$
Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 85. ← page 15

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 4) \cdot (X + 4)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-4, 4\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 4\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 4X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -4X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 4\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus

haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & b^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a = 4, \\ b^2 + b = -4. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 + X - 4$ et $X^2 + X + 4$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 17$, et : $\Delta_2 = -15$. Les racines du premier polynôme sont donc $\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}$, tandis que les racines du second polynôme sont $\frac{1}{2}i\sqrt{15} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}i\sqrt{15} - \frac{1}{2}$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{15} - \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{15} - \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{15} - \frac{1}{2}\right), \text{ et : } \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{15} - \frac{1}{2}\right)$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} \frac{7}{4}a - \frac{3}{4}b & -\frac{7}{8}a + \frac{7}{8}b \\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b & -\frac{3}{4}a + \frac{7}{4}b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 + M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\sqrt{17} + \frac{3}{8}i\sqrt{15} - \frac{1}{2} & -\frac{7}{16}\sqrt{17} - \frac{7}{16}i\sqrt{15} \\ \frac{3}{4}\sqrt{17} + \frac{3}{4}i\sqrt{15} & -\frac{3}{8}\sqrt{17} - \frac{7}{8}i\sqrt{15} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8}\sqrt{17} + \frac{3}{8}i\sqrt{15} - \frac{1}{2} & \frac{7}{16}\sqrt{17} - \frac{7}{16}i\sqrt{15} \\ -\frac{3}{4}\sqrt{17} + \frac{3}{4}i\sqrt{15} & \frac{3}{8}\sqrt{17} - \frac{7}{8}i\sqrt{15} - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8}\sqrt{17} - \frac{3}{8}i\sqrt{15} - \frac{1}{2} & \frac{7}{16}\sqrt{17} + \frac{7}{16}i\sqrt{15} \\ -\frac{3}{4}\sqrt{17} - \frac{3}{4}i\sqrt{15} & \frac{3}{8}\sqrt{17} + \frac{7}{8}i\sqrt{15} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\sqrt{17} - \frac{3}{8}i\sqrt{15} - \frac{1}{2} & -\frac{7}{16}\sqrt{17} + \frac{7}{16}i\sqrt{15} \\ \frac{3}{4}\sqrt{17} - \frac{3}{4}i\sqrt{15} & -\frac{3}{8}\sqrt{17} + \frac{7}{8}i\sqrt{15} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 86. ← page 15

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X+1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ b^2 = -1. \end{cases}$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 87. ← page 15

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 0, \\ b^2 & = & -1. \end{array} \right.$$

Or un carré de nombre réel est positif, donc ce système n'a pas de solution. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Corrigé 88. ← page 16

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 5) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 5\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les

notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A-5\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A-5\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A-5\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 5, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Les couples (a,b) qui conviennent sont :

$$\left(\sqrt{5}, 0\right), \quad \text{et :} \quad \left(-\sqrt{5}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -3\,a + 4\,b & -4\,a + 4\,b \\ 3\,a - 3\,b & 4\,a - 3\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ -3\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 89. ← page 16

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-2) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base

(X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a^2 & = & 2, \\ b^2 & = & 0. \end{array} \right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{2}, 0\right), \quad \text{et :} \quad \left(\sqrt{2}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 2\,a - b & 4\,a - 4\,b \\ -\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b & -a + 2\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 90. ← page 16

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = X^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 0$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -4X_1.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A)$ également. Or $\ker(A)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 &= 0, \\ c^2 &= 0, \\ ab+bc &= -4. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à $a = c = 0$, et $0 = -4$: c'est impossible. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.
Remarque. La matrice A est nilpotente (on a trouvé que : $\chi_A = X^2$, donc : $\chi_A(A) = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton). Donc, toujours en utilisant ce théorème de Cayley-Hamilton, on peut démontrer aisément que M n'existe pas, sans passer par la réduction à des sous-espaces stables : si $M^2 = A$, alors $M^4 = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, donc M est nilpotente. On en déduit, par un argument classique, que son unique valeur propre complexe est 0, donc $\chi_M = (X-0)^2 = X^2$, et comme pour A on en déduit que $M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Or $M^2 = A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$: contradiction.

Corrigé 91. ← page 16

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)\cdot(X+5)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-5, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -5X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}$.
2. Comme $M^2 + 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 + 2M\right)\cdot M = M^3 + 2M^2 = M \cdot \left(M^2 + 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A+\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A+\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + 2M = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 + 2M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} + 2P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -5\end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2 + 2\,a & 0\\0 & b^2 + 2\,b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}, \end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 + 2\,a = -1, \\ b^2 + 2\,b = -5. \end{cases}$$
Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2+2\,X+1$ et $X^2+2\,X+5$. Pour le premier polynôme, il suffit de noter : $X^2+2\,X+1 = (X+1)^2$,

de sorte que son unique racine soit -1. Pour le second polynôme, le discriminant est : $\Delta = -16$. Les racines de ce polynôme sont donc $2i-1$ et $-2i-1$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :

$$(-1, -2i-1)\,, \quad \text{et :} \quad (-1, 2i-1)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b & -\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b \\ -\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b & \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 + 2M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -i-1 & -i \\ -i & -i-1 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} i-1 & i \\ i & i-1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + 2M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 92. ← page 16

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

   Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

   avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

   où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première

question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1, 0), \quad \text{et :} \quad (-1, 0).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -6\,a + 7\,b & -3\,a + 3\,b \\ 14\,a - 14\,b & 7\,a - 6\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -14 & -7 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 93. ← page 16

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1) \cdot (X + 1)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$

également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 & = & 1, \\ b^2 & = & -1. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(-1, -i)\,,\ (-1, i)\,,\ (1, -i)\,,\ \text{ et : }\ (1, i)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}\,a + \frac{9}{2}\,b & -\frac{7}{2}\,a + \frac{7}{2}\,b \\ \frac{9}{2}\,a - \frac{9}{2}\,b & \frac{9}{2}\,a - \frac{7}{2}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}i + \frac{7}{2} & -\frac{7}{2}i + \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2}i - \frac{9}{2} & \frac{7}{2}i - \frac{9}{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}i + \frac{7}{2} & \frac{7}{2}i + \frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2}i - \frac{9}{2} & -\frac{7}{2}i - \frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}i - \frac{7}{2} & -\frac{7}{2}i - \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2}i + \frac{9}{2} & \frac{7}{2}i + \frac{9}{2} \end{pmatrix},\ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}i - \frac{7}{2} & \frac{7}{2}i - \frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2}i + \frac{9}{2} & -\frac{7}{2}i + \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 94. ← page 17

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la première colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :

$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1 + X_2.$$

On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 + M = A$, on a $AM = \left(M^2 + M\right) \cdot M = M^3 + M^2 = M \cdot \left(M^2 + M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 + M = A$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} + P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + a & ab + bc + b \\ 0 & c^2 + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 + a = 1, \\ c^2 + c = 1, \\ ab + bc + b = 1. \end{cases}$$

Déterminons d'abord les solutions de la première équation (qui donne aussi les solutions de la seconde). Cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. Son discriminant est : $\Delta = 5$. On en déduit que les solutions de la première équation sont $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. De même pour c. Les couples (a, c) qui vérifient les deux premières équations sont donc : $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)$ et : $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)$. On remarque cependant que quand a et c sont distincts, la dernière équation du système linéaire ci-dessus équivaut à : $0 = 1$, ce qui n'admet pas de solution. Il faut donc exclure les couples de solutions distinctes, et ce système linéaire équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, \\ c &=& \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \\ \sqrt{5}b &=& 1 \end{array}\right. \quad \text{ou :} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, \\ c &=& -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \\ -\sqrt{5}b &=& 1 \end{array}\right.$$

Nous avons donc deux triplets (a,b,c) qui conviennent : $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)$ et $(a,b,c) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)$. Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 + M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & -\frac{4}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} & \frac{4}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 + M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 95. ← page 17

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1)^2$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Complétons la famille (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en prenant pour X_2 n'importe quel vecteur colonne de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non proportionnel à X_1 (comme on le verra ci-dessous, le fait que X_1 soit un vecteur propre de f_A assure que f_A aura une matrice triangulaire supérieure dans la base (X_1, X_2), quel que soit le choix de X_2, donc autant faire un choix simple de X_2), par exemple : $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (j'ai fait le choix qui minimise les coefficients de AX_2 : ce produit donne la deuxième colonne de A). Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et nous allons calculer $f_A(X_2)$ pour l'exprimer en fonction de X_1 et X_2 :
$$f_A(X_2) = AX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 - X_2.$$
On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. Pour $f_M(X_2)$, les sous-espaces stables ne nous enseignent rien (en effet X_2 n'appartient pas à un sous-espace propre de A). On ne peut rien faire de mieux que de décomposer $f_M(X_2)$ dans la base (X_1, X_2) (comme c'est une base, on peut le faire pour tout vecteur). Il existe donc

$(b,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f_M(X_2) = bX_1 + cX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ c^2 = -1, \\ ab+bc = 1. \end{cases}$$

Ce système linéaire équivaut à :

$$\begin{cases} a = i, \\ c = i \\ 2i\,b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = i, \\ c = -i \\ 0 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -i, \\ c = i \\ 0 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -i, \\ c = -i \\ -2i\,b = 1 \end{cases}$$

On observe que deux de ces systèmes sont impossibles (quand a et c sont opposés). Nous avons donc deux triplets (a,b,c) qui conviennent : $(a,b,c) = \left(i, -\frac{1}{2}i, i\right)$ et $(a,b,c) = \left(-i, \frac{1}{2}i, -i\right)$. Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par conséquent les deux matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}i & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \end{pmatrix},$$

et : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & \frac{1}{2}i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$. Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 96. ← page 17

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X+1) \cdot (X+2)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2,-1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = -X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -2X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A + \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A + \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 = -1, \\ b^2 = -2. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(i, -i\sqrt{2}\right), \ \left(i, i\sqrt{2}\right), \ \left(-i, -i\sqrt{2}\right), \ \text{ et : } \ \left(-i, i\sqrt{2}\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} -a + 2b & a - b \\ -2a + 2b & 2a - b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2i\sqrt{2} - i & i\sqrt{2} + i \\ -2i\sqrt{2} - 2i & i\sqrt{2} + 2i \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 2i\sqrt{2} - i & -i\sqrt{2} + i \\ 2i\sqrt{2} - 2i & -i\sqrt{2} + 2i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2i\sqrt{2} + i & i\sqrt{2} - i \\ -2i\sqrt{2} + 2i & i\sqrt{2} - 2i \end{pmatrix}, \ \text{et : } M_4 = \begin{pmatrix} 2i\sqrt{2} + i & -i\sqrt{2} - i \\ 2i\sqrt{2} + 2i & -i\sqrt{2} - 2i \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 97. ← page 17

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-5)\cdot(X+5)$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-5, 5\}$, et de plus on trouve, après calculs :
$$\ker(A - 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-11\\1\end{pmatrix}\right).$$
Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}-11\\1\end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 5X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = -5X_2$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :
$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}P^{-1},$$
avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix}-1 & -11\\1 & 1\end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 - 2M\right)\cdot M = M^3 - 2M^2 = M\cdot\left(M^2 - 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 5\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :
$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M)\cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1},$$
où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - 2M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}-1 & -11\\1 & 1\end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :
$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}P^{-1}\\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^2 - 2a & 0\\0 & b^2 - 2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -5\end{pmatrix},\end{aligned}$$
si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} a^2 - 2a = 5,\\ b^2 - 2b = -5.\end{cases}$$
Pour déterminer les valeurs de a et b vérifiant ces équations, cela revient à déterminer les racines des polynômes $X^2 - 2X - 5$ et $X^2 - 2X + 5$. Leurs discriminants respectifs sont : $\Delta_1 = 24$, et : $\Delta_2 = -16$. Les racines du premier polynôme sont donc $\sqrt{6}+1$ et $-\sqrt{6}+1$, tandis que les racines du second polynôme sont $2i+1$ et $-2i+1$. Les couples (a,b) qui conviennent sont donc :
$$\left(-\sqrt{6}+1, -2i+1\right),\ \left(\sqrt{6}+1, -2i+1\right),\ \left(-\sqrt{6}+1, 2i+1\right),\ \text{ et : } \left(\sqrt{6}+1, 2i+1\right).$$
Alors, la relation $M = P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix}-1 & -11\\1 & 1\end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{11}{10}\\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\end{pmatrix}$, donc :

$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\,a + \frac{11}{10}\,b & -\frac{11}{10}\,a + \frac{11}{10}\,b \\ \frac{1}{10}\,a - \frac{1}{10}\,b & \frac{11}{10}\,a - \frac{1}{10}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 - 2M = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\,\sqrt{6} - \frac{11}{5}i + 1 & \frac{11}{10}\,\sqrt{6} - \frac{11}{5}i \\ -\frac{1}{10}\,\sqrt{6} + \frac{1}{5}i & -\frac{11}{10}\,\sqrt{6} + \frac{1}{5}i + 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\,\sqrt{6} - \frac{11}{5}i + 1 & -\frac{11}{10}\,\sqrt{6} - \frac{11}{5}i \\ \frac{1}{10}\,\sqrt{6} + \frac{1}{5}i & \frac{11}{10}\,\sqrt{6} + \frac{1}{5}i + 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\,\sqrt{6} + \frac{11}{5}i + 1 & \frac{11}{10}\,\sqrt{6} + \frac{11}{5}i \\ -\frac{1}{10}\,\sqrt{6} - \frac{1}{5}i & -\frac{11}{10}\,\sqrt{6} - \frac{1}{5}i + 1 \end{pmatrix},\ \text{et} : M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\,\sqrt{6} + \frac{11}{5}i + 1 & -\frac{11}{10}\,\sqrt{6} + \frac{11}{5}i \\ \frac{1}{10}\,\sqrt{6} - \frac{1}{5}i & \frac{11}{10}\,\sqrt{6} - \frac{1}{5}i + 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces deux matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, calculez $M^2 - 2M$ et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 98. ← page 17

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-3)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,3\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 3\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 3X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 3\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 & = & 3, \\ b^2 & = & 0. \end{cases}$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$\left(-\sqrt{3}, 0\right), \quad \text{et :} \quad \left(\sqrt{3}, 0\right).$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\,a - \frac{5}{3}\,b & -\frac{10}{3}\,a + \frac{10}{3}\,b \\ \frac{4}{3}\,a - \frac{4}{3}\,b & -\frac{5}{3}\,a + \frac{8}{3}\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3}\sqrt{3} & \frac{10}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} & \frac{5}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ et : } M_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\sqrt{3} & -\frac{10}{3}\sqrt{3} \\ \frac{4}{3}\sqrt{3} & -\frac{5}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).

Corrigé 99. ← page 18

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X - 2) \cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = 2X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 - 2M = A$, on a $AM = \left(M^2 - 2M\right) \cdot M = M^3 - 2M^2 = M \cdot \left(M^2 - 2M\right) = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((X_1, X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $M^2 - 2M = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question. On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\Longleftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} - 2P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2\,a & 0 \\ 0 & b^2 - 2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} a^2 - 2\,a = 2, \\ b^2 - 2\,b = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation a clairement pour solutions $b = 0$ et $b = 2$. Pour déterminer les valeurs de a vérifiant la première équation, cela revient à déterminer les racines du polynôme $X^2 - 2\,X - 2$. Son discriminant est : $\Delta = 12$. Les racines de ce polynôme sont donc $\sqrt{3} + 1$ et $-\sqrt{3} + 1$.

Corrigé 100. ← page 18

1. Un calcul facile montre que : $\chi_A = (X-1)\cdot X$, donc le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1\}$, et de plus on trouve, après calculs :

$$\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour en déduire la relation de similitude de l'énoncé : soit f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et notons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les éléments propres déterminés ci-dessus permettent d'écrire que $f_A(X_1) = AX_1 = X_1$ et $f_A(X_2) = AX_2 = 0$. On en déduit que la matrice de f_A dans la base (X_1, X_2) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base à l'endomorphisme f_A, entre la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et la base (X_1, X_2), on obtient :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_A) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = A$, on a $AM = M^2 \cdot M = M^3 = M \cdot M^2 = MA$, donc A et M commutent (on pouvait se dispenser de ce calcul en disant sobrement : A est un polynôme en M, donc A et M commutent). On en déduit que, si l'on note f_A et f_M les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement, ils commutent également, et donc les sous-espaces propres de f_A sont stables par f_M. En reprenant les notations de la question précédente, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ et donc, par stabilité, $f_M(X_1) \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ également. Or $\ker(A - \mathrm{I}_2)$ est engendré par X_1 d'après ce qu'on a montré plus haut, et on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f_M(X_1) = aX_1$. En raisonnant de même avec le second sous-espace propre, on montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_M(X_2) = bX_2$. Alors : $\mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et la formule du changement de base appliquée à l'endomorphisme f_M, entre la base canonique et la base (X_1, X_2), nous donne :

$$M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2)) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(f_M) \cdot \mathrm{M}_{(X_1,X_2)}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}) = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1},$$

où $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((X_1,X_2))$ fut explicitée dans la question précédente. D'où le résultat.

3. D'après la question précédente, si $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^2 = A$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais on a aussi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ d'après la première question.

On en déduit :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\underset{(\times P)}{\overset{(P^{-1}\times)}{\iff}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si et seulement si, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 1, \\ b^2 & = & 0. \end{array} \right.$$

Les couples (a, b) qui conviennent sont :

$$(1, 0)\,, \quad \text{et :} \quad (-1, 0)\,.$$

Alors, la relation $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a été explicitée plus haut, nous permet d'en déduire les matrices M qui conviennent. Un calcul facile montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donc : $M = \begin{pmatrix} 2\,a - b & -2\,a + 2\,b \\ a - b & -a + 2\,b \end{pmatrix}$, et en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées plus haut on en déduit que les matrices M telles que $M^2 = A$ sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \text{et :}\ M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, les équivalences ci-dessus montrent que ces matrices conviennent (si vous voulez vous en convaincre, élevez M au carré et vérifiez qu'on obtient A).