Puissances d'une matrice triangulaire avec la formule du binôme de Newton

Calcul des puissances d'une matrice triangulaire. Rien de très savant, si ce n'est qu'on peut considérablement se simplifier le calcul si l'on fait apparaître des matrices diagonales par blocs, de sorte à se ramener aux puissances des blocs diagonaux.

Exercice 1. Soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 12

Exercice 2. Soit $T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 12

Exercice 3. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 13

Exercice 4. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 13

Exercice 5. Soit $T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 14

Exercice 6. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 15

Exercice 7. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 15

Exercice 8. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 16

Exercice 9. Soit $T = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 17

Exercice 10. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 18

Exercice 11. Soit $T = \begin{pmatrix} -31 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 18

Exercice 12. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 19

Exercice 13. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 19

Exercice 14. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 20

Exercice 15. Soit $T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 21

Exercice 16. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 21

Exercice 17. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 22

Exercice 18. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 23

Exercice 19. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 24

Exercice 20. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 24

Exercice 21. Soit $T = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 25

Exercice 22. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 25

Exercice 23. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 26

Exercice 24. Soit $T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 27

Exercice 25. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 28

Exercice 26. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 29

Exercice 27. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 30

Exercice 28. Soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 30

Exercice 29. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 31

Exercice 30. Soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 31

Exercice 31. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 32

Exercice 32. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 33

Exercice 33. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 33

Exercice 34. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 34

Exercice 35. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 35

Exercice 36. Soit $T = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 35

Exercice 37. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 36

Exercice 38. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -144 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 37

Exercice 39. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 37

Exercice 40. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 38

Exercice 41. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 38

Exercice 42. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 39

Exercice 43. Soit $T = \begin{pmatrix} -69 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -69 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 40

Exercice 44. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 40

Exercice 45. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 41

Exercice 46. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 41

Exercice 47. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 42

Exercice 48. Soit $T = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 42

Exercice 49. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 43

Exercice 50. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 44

Exercice 51. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 44

Exercice 52. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 45

Exercice 53. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 46

Exercice 54. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 47

Exercice 55. Soit $T = \begin{pmatrix} -73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 47

Exercice 56. Soit $T = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 48

Exercice 57. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 49

Exercice 58. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 50

Exercice 59. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 50

Exercice 60. Soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 51

Exercice 61. Soit $T = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 51

Exercice 62. Soit $T = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 52

Exercice 63. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 52

Exercice 64. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 53

Exercice 65. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 53

Exercice 66. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 54

Exercice 67. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 55

Exercice 68. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 55

Exercice 69. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 56

Exercice 70. Soit $T = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 57

Exercice 71. Soit $T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 57

Exercice 72. Soit $T = \begin{pmatrix} 95 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 95 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 58

Exercice 73. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 59

Exercice 74. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 60

Exercice 75. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 60

Exercice 76. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 61

Exercice 77. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 62

Exercice 78. Soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 62

Exercice 79. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 63

Exercice 80. Soit $T = \begin{pmatrix} -17 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 83 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 64

Exercice 81. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 65

Exercice 82. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 65

Exercice 83. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 66

Exercice 84. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 67

Exercice 85. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 67

Exercice 86. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 68

Exercice 87. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 68

Exercice 88. Soit $T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 69

Exercice 89. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 69

Exercice 90. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 70

Exercice 91. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 71

Exercice 92. Soit $T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 87 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 87 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 72

Exercice 93. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 72

Exercice 94. Soit $T = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 73

Exercice 95. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 73

Exercice 96. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 74

Exercice 97. Soit $T = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 74

Exercice 98. Soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 75

Exercice 99. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 76

Exercice 100. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec un usage adéquat de la formule du binôme de Newton. → page 76

Corrigé 1. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 1

$$D = \left(\begin{array}{c|cc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc|cc} (-2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1} n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 2. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 1

$$D = \left(\begin{array}{c|c|ccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{c|c|cc c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(-1)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|ccc} (-4)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & \frac{1}{2}(-1)^n (n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 3. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 1

$$
D = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$
DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.
$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$
T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.
$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-3)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n & (-3)^{n-1} n \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 4. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 1

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 5. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 1

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^n & 7^{n-1}n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 6. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 1

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 7. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 1

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1} n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 8. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 1

$$D = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & \frac{1}{2}(-1)^n (n-1)n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5^n & 5^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 5^{n-2}(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5^n & 5^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 9. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{cc|ccc} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 10^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|ccc} 10^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 10^n & 10^{n-1}n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n & 4^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 4^{n-2}(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 4^n & 4^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 10. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 11. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|c} -31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & (-31)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc|c} (-31)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-31)^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-31)^n & (-31)^{n-1}n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-31)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & 6^{n-1}n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 12. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1}n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 13. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc|c} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 14. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 15. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -(-1)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} 5^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 5^n & 5^{n-1} n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 16. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{c|ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|ccc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|ccc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{c|ccc|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & (-2)^{n-2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|ccc|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & (-2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (-2)^{n-1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline
0 & (-2)^n & 0 & 0 & \\
0 & 0 & (-2)^n & 0 & \\
0 & 0 & 0 & (-2)^n & \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & (- \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (-2)^n & (-2)^{n-1}\, n & \frac{1}{2}\,(-2)^{n-2}\,(n-1)n & 0 & 0 \\
0 & 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1}\, n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (-5)^n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 17. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 2

$$D = \left(\begin{array}{c|cccc|c}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^4 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 4,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{6}\, D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} (-1)^n \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & \frac{1}{2}\,(n-1)n & \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n & \frac{1}{2}\,(n-1)n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 18. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 3

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-6)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-6)^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-6)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-6)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 19. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 3

$$D = \left(\begin{array}{c|cc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc|c} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1}n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 20. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 3

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(-1)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 21. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 3

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|c} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & (-6)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc|c} (-6)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 12^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-6)^n & (-6)^{n-1} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7^n & 7^{n-1} n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 22. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 3

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 23. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 3

$$D = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 8^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 20^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 8^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 8^{n-2}(n-1)n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n & 8^{n-1}n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 24. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 3

$$D = \left(\begin{array}{ccccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^5 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 5,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{24}\, D^{n-4} N^4 (n-1)(n-2)(n-3)n + \frac{1}{6}\, D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{24}\,(n-1)(n-2)(n-3)n \left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & (-5)^{n-4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) + \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & (-5)^{n-3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (-5)^{n-3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) + \frac{1}{2} \\
&= \begin{pmatrix}
(-5)^n & (-5)^{n-1}\, n & \frac{1}{2}\,(-5)^{n-2}\,(n-1)n & \frac{1}{6}\,(-5)^{n-3}\,(n-1)(n-2)n & \frac{1}{24}\,(-5)^{n-4}\,(n-1)(n-2)(n-3)n & 0 \\
0 & (-5)^n & (-5)^{n-1}\, n & \frac{1}{2}\,(-5)^{n-2}\,(n-1)n & \frac{1}{6}\,(-5)^{n-3}\,(n-1)(n-2)n & 0 \\
0 & 0 & (-5)^n & (-5)^{n-1}\, n & \frac{1}{2}\,(-5)^{n-2}\,(n-1)n & 0 \\
0 & 0 & 0 & (-5)^n & (-5)^{n-1}\, n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (-5)^n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n
\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 25. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 3

$$D = \left(\begin{array}{c|cccc|c}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8
\end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^4 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 4$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{6}\, D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} (-1)^n \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & \frac{1}{2}\,(n-1)n & \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n & \frac{1}{2}\,(n-1)n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 26. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|c|c} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 17^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & \frac{1}{2}\,(-1)^n (n-1)n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 27. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 28. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & (-2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-3)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c|cc} (-2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & (-2)^{n-1}n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n & (-3)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 29. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 30. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-13)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} (-2)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-13)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-13)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-13)^n & (-13)^{n-1}\, n \\ 0 & 0 & (-13)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 31. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{c|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^5 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 5,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{24}\, D^{n-4} N^4 (n-1)(n-2)(n-3)n + \frac{1}{6}\, D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{24}\,(n-1)(n-2)(n-3)n \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & \frac{1}{2}(n-1)n & \frac{1}{6}(n-1)(n-2)n & \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)n \\ 0 & 0 & 1 & n & \frac{1}{2}(n-1)n & \frac{1}{6}(n-1)(n-2)n \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n & \frac{1}{2}(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 32. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 33. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 2^{n-2}(n-1)n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 34. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 4

$$D = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^4 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 4$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{6}\, D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 3^{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \\
&= \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 3^{n-2}(n-1)n & \frac{1}{6}\cdot 3^{n-3}(n-1)(n-2)n & 0 \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 3^{n-2}(n-1)n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 3^{n-1}n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 35. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 48 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 48^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 48^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 36. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (-7)^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & (-7)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-7)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|c} (-7)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-7)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-7)^n & (-7)^{n-1} n & \frac{1}{2}(-7)^{n-2}(n-1)n & 0 \\ 0 & (-7)^n & (-7)^{n-1} n & 0 \\ 0 & 0 & (-7)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 37. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^2 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 38. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -144 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-144)^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-144)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 39. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 22^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1}\,n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 40. On écrit : $T = D+N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 41. On écrit : $T = D+N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-4)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n & (-4)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 42. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 13 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|cc} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 13^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 43. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -69 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 0 & -69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 0 & 0 & (-69)^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 0 & (-69)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-69)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} (-69)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-69)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-69)^n \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \\ &= \begin{pmatrix} (-69)^n & (-69)^{n-1} n & \frac{1}{2}(-69)^{n-2}(n-1)n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-69)^n & (-69)^{n-1} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-69)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-5)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 44. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 5

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 45. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(-1)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 46. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1} n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 47. On écrit : $T = D+N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-3)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & (-3)^{n-1} n \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 48. On écrit : $T = D+N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 10^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c|cc} 10^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 10^n & 10^{n-1}n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 49. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{r|rr|r|r|r} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-17)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-17)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 50. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1) n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccr|c} 0 & 0 & 3^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccr|c} 0 & 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|c} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1} n & \frac{1}{2} \cdot 3^{n-2}(n-1)n & 0 \\ 0 & 3^n & 3^{n-1} n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 51. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(-1)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} 2^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 52. On écrit : $T = D+N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}(n-1)n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 53. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^4 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 4,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{6}\, D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1}\,n & \frac{1}{2}\,(-2)^{n-2}\,(n-1)n & \frac{1}{6}\,(-2)^{n-3}\,(n-1)(n-2)n \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1}\,n & \frac{1}{2}\,(-2)^{n-2}\,(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1}\,n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 54. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 6

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n\, n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 5^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 55. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \begin{pmatrix} -73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-73)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-73)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 6^{n-1}n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 56. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 7^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 7^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 7^n & 7^{n-1} n & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 57. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \left(\begin{array}{c|c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1) n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{c|c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 2^{n-1} n & \frac{1}{2} \cdot 2^{n-2}(n-1)n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 2^{n-1} n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 58. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1} n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 59. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 60. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \left(\begin{array}{c|cc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc|c} (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 61. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|c} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & (-6)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc|c} (-6)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-6)^n & (-6)^{n-1}n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 62. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 15^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 15^n & 0 & 0 \\ 0 & 15^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 15^n & 15^{n-1}n & 0 \\ 0 & 15^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 63. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -11 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-11)^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-11)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 64. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 7

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 10^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n & 10^{n-1} n \\ 0 & 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 65. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 66. On écrit : $T = D+N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1}Nn + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-3)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-3)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & (-3)^{n-1}n & \frac{1}{2}(-3)^{n-2}(n-1)n \\ 0 & 0 & (-3)^n & (-3)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 67. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & \frac{1}{2}(-1)^n (n-1)n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 68. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 69. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1) n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|ccc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n & 4^{n-1} n & \frac{1}{2} \cdot 4^{n-2}(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 4^n & 4^{n-1} n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 70. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} (-7)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 5^{n-1}n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 71. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^4 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 4$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{6}\, D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & (-5)^{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & (-5)^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-5)^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc} 0 & (-5)^{n-1} & \\ 0 & 0 & (-5)^{n-1} \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} (-5)^n & (-5)^{n-1}\, n & \frac{1}{2}\,(-5)^{n-2}\,(n-1)n & \frac{1}{6}\,(-5)^{n-3}\,(n-1)(n-2)n & 0 \\ 0 & (-5)^n & (-5)^{n-1}\, n & \frac{1}{2}\,(-5)^{n-2}\,(n-1)n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n & (-5)^{n-1}\, n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 72. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 95^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 95^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 7^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|cc} 95^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 95^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} 95^n & 95^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 95^{n-2}(n-1)n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 95^n & 95^{n-1}n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^n & 7^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 7^{n-2}(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7^n & 7^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 73. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 8

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 74. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-4)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}(n-1)n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 75. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|c} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & \frac{1}{2}(-1)^n (n-1)n & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 76. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{c|c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^4 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 4,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{6}\, D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{c|c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{c|c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n & \frac{1}{2}\,(n-1)n & \frac{1}{6}\,(n-1)(n-2)n \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n & \frac{1}{2}\,(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 77. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{c|c|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 12^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|cc} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12^n & 12^{n-1} n \\ 0 & 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 78. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & (-2)^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & (-2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|cc} (-2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & (-2)^{n-1} n & \frac{1}{2}(-2)^{n-2}(n-1)n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & (-2)^{n-1} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n & \frac{1}{2}(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 79. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^4 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 4$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{6} D^{n-3} N^3 (n-1)(n-2)n + \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\ &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)n \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 3^{n-1} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3^{n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right. \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 3^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 3^{n-2}(n-1)n & \frac{1}{6}\cdot 3^{n-3}(n-1)(n-2)n \\ 0 & 0 & 0 & 3^n & 3^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 3^{n-2}(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 80. On écrit : $T = D+N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|c} -17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 83 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & (-17)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c|c} (-17)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-17)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 83^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-17)^n & (-17)^{n-1}n & 0 & 0 \\ 0 & (-17)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 83^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 81. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 82. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 9

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 11^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11^{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11^{n} \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11^n & 11^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 83. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17 \end{array} \right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1}Nn + D^n \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + n \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-17)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc|cc} 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-17)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-17)^n \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & \frac{1}{2} \cdot 2^{n-2}(n-1)n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-17)^n & (-17)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-17)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 84. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 85. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^2 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 86. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 49 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 49^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 49^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 87. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 88. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{c|c|cc} 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|cc} 7^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 7^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 89. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3^n \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 90. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2}\, D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)n \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|ccc|c} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right. \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & \frac{1}{2}(-1)^n (n-1)n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 91. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 92. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 10

$$D = \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 87 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^3 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \frac{1}{2} D^{n-2} N^2 (n-1)n + D^{n-1} N n + D^n \\
&= \frac{1}{2}(n-1)n \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 5^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 5^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 87^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|cc} 5^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 87^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 87^n \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 5^n & 5^{n-1}n & \frac{1}{2}\cdot 5^{n-2}(n-1)n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 5^{n-1}n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 87^n & 87^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 87^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 93. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 11

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 20 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 20^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 20^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 94. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 11

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} 50 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} 50^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 50^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 95. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 11

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 96. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 11

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 97. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 11

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & (-10)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} (-10)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-10)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (-10)^n & (-10)^{n-1} n & 0 & 0 \\ 0 & (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D + N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 98. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 11

$$D = \left(\begin{array}{c|c|cc|c|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c|cc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*).
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = (D+N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|cc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D+N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n = n \left(\begin{array}{c|c|cc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|cc|c|c} (-2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-3)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 99. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 11

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !) montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1} N n + D^n &= n \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|cc} (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !

Corrigé 100. On écrit : $T = D + N$, où : ← page 11

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \text{ et } N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(*je laisse des traits pour délimiter les blocs – de sorte qu'il soit clairement visible que D et N sont diagonales par blocs –, et vous forcer à calculer en les utilisant ; mais ils ne figurent pas nécessairement dans une rédaction*). Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D + N)^n$. Les matrices D et N commutent, vu qu'on a :

$$DN = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(D + N)^n$, et on obtient :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or un calcul par blocs direct (faites-le ! ne vous passez pas des blocs, vous verrez que c'est bien plus rapide !)

montre que : $N^2 = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^{n-1}Nn + D^n = n \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -(-1)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & -(-1)^n n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Attention au fait qu'en général, il est FAUX que si l'on écrit une matrice triangulaire T sous la forme $T = D+N$, où D est diagonale et N constituée des coefficients supérieurs (stricts) de T, alors D et N commutent. La vérification de la commutation N'EST PAS FACULTATIVE !