Projecteurs orthogonaux et distance à un sous-espace de $\mathbb{R}^3$

Projecteurs orthogonaux sur des droites ou plans de $\mathbb{R}^3$. Leurs expressions sont alors faciles à établir.

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ 1,\ 2)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 11

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ 3)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 11

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2,\ 3,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 11

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0,\ -14,\ 1)$ et $\vec{e}_2 = (28,\ 0,\ -1)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 12

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-2,\ -6,\ 59)$ et $\vec{e}_2 = (0,\ 1,\ -10)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 13

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 14,\ -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 15

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (26,\ 5,\ 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 15

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 16

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ -2,\ 1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 17

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (99,\ 2,\ -101)$ et $\vec{e}_2 = (116,\ -1,\ -115)$. Soit p la projection → page 17

orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique.

Exercice 11. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0,\ 0,\ 1)$ et $\vec{e}_2 = (-24,\ -16,\ 3)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 19

Exercice 12. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (20,\ -3,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 20

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ -1,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 21

Exercice 14. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 21

Exercice 15. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-9,\ 3,\ -2)$ et $\vec{e}_2 = (6,\ 12,\ -1)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 22

Exercice 16. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 2,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 23

Exercice 17. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 2)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 23

Exercice 18. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2,\ -1,\ 1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 24

Exercice 19. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (10,\ 8,\ -41)$ et $\vec{e}_2 = (4,\ -2,\ -19)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 25

Exercice 20. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 0,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice → page 26

représentative de s relativement à la base canonique.

Exercice 21. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\, 1,\, 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 27

Exercice 22. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\, 34,\, 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 27

Exercice 23. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\, -12,\, -32)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 28

Exercice 24. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (5,\, -12,\, -2)$ et $\vec{e}_2 = (-4,\, 4,\, 3)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 29

Exercice 25. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\, 0,\, -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 30

Exercice 26. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-1,\, -1,\, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0,\, 0,\, 1)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 31

Exercice 27. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\, 1,\, 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 32

Exercice 28. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (9,\, -9,\, 14)$ et $\vec{e}_2 = (-1,\, 1,\, -1)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 32

Exercice 29. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\, 1,\, -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 34

Exercice 30. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\, 1,\, 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 34

Exercice 31. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -2,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 35

Exercice 32. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-16,\ -96,\ 1)$ et $\vec{e}_2 = (-1,\ -6,\ 1)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 35

Exercice 33. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2,\ -3,\ 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 36

Exercice 34. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 0,\ -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 37

Exercice 35. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -39,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 37

Exercice 36. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-5,\ 3,\ 57)$ et $\vec{e}_2 = (-15,\ 1,\ -21)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 38

Exercice 37. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ 11,\ 9)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 39

Exercice 38. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ -4,\ 1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 39

Exercice 39. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-1,\ 0,\ 0)$ et $\vec{e}_2 = (0,\ -1,\ -1)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 40

Exercice 40. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\ -1,\ -56)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 41

Exercice 41. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On → page 42

note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-1,\,-18,\,-1)$ et $\vec{e}_2 = (-121,\,6,\,-121)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique.

Exercice 42. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (4,\,-1,\,-3)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 43

Exercice 43. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\,1,\,-1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 44

Exercice 44. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\,-2,\,-10)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 44

Exercice 45. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\,0,\,-50)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 45

Exercice 46. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (1,\,-201,\,103)$ et $\vec{e}_2 = (1,\,-1013,\,509)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 45

Exercice 47. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0,\,1,\,-1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 47

Exercice 48. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-4,\,-1,\,-1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 47

Exercice 49. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (12,\,3,\,10)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 48

Exercice 50. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (77,\,-11,\,-7)$ et $\vec{e}_2 = (-567,\,81,\,-7)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 49

Exercice 51. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-2,\,-13,\,117)$ et $\vec{e}_2 = (-1,\,0,\,0)$. Soit p la projection orthogonale → page 50

sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique.

Exercice 52. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0, 0, 1)$ et $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 51

Exercice 53. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-7, -1, 2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 52

Exercice 54. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1, 4, 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 52

Exercice 55. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-42, 21, -4)$ et $\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 53

Exercice 56. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-11, 1, -10)$ et $\vec{e}_2 = (0, -1, -1)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 55

Exercice 57. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0, 2, -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 56

Exercice 58. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (0, 1, 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 57

Exercice 59. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2, -1, -3)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 58

Exercice 60. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-3, 1, -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 58

Exercice 61. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1, -1, 2)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative → page 59

de p relativement à la base canonique.

Exercice 62. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (5,\,-12,\,3)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 59

Exercice 63. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2,\,0,\,4)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 60

Exercice 64. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\,-1,\,0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 60

Exercice 65. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-5,\,-1,\,3)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 61

Exercice 66. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-11,\,-4,\,1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 62

Exercice 67. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0,\,0,\,-1)$ et $\vec{e}_2 = (3,\,1,\,0)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 63

Exercice 68. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (61,\,-3,\,14)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 64

Exercice 69. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (3,\,-1,\,-18)$ et $\vec{e}_2 = (15,\,2,\,57)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 64

Exercice 70. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\,-4,\,-2)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 65

Exercice 71. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (2,\,0,\,-1)$ et $\vec{e}_2 = (10,\,-2,\,-5)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x,y,z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 66

Exercice 72. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-9,\ -2,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 68

Exercice 73. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-3,\ 1,\ 5)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 68

Exercice 74. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 1,\ -40)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 69

Exercice 75. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 69

Exercice 76. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (22,\ 1,\ 15)$ et $\vec{e}_2 = (3,\ -3,\ 1)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 70

Exercice 77. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-10,\ -2,\ 3)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 71

Exercice 78. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 3,\ -6)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 72

Exercice 79. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 2,\ 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 72

Exercice 80. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-38,\ 19,\ 4)$ et $\vec{e}_2 = (-2,\ 1,\ -10)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 73

Exercice 81. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ -1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 74

Exercice 82. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On → page 75

note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-3,\ 15,\ 53)$ et $\vec{e}_2 = (-9,\ 24,\ 82)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique.

Exercice 83. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -2,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 76

Exercice 84. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 5,\ -1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 76

Exercice 85. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 1,\ -3)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 77

Exercice 86. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-2,\ -1,\ 1)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 78

Exercice 87. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 78

Exercice 88. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 3)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 79

Exercice 89. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (2,\ 0,\ 4)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 79

Exercice 90. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-42,\ 3,\ -19)$ et $\vec{e}_2 = (-15,\ -81,\ 130)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 80

Exercice 91. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 0,\ -1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 82

Exercice 92. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0,\ -1,\ -1)$ et $\vec{e}_2 = (6,\ 1,\ 19)$. Soit s la symétrie orthogonale → page 82

par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique.

Exercice 93. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (1,\ 4,\ -8)$ et $\vec{e}_2 = (0,\ -1,\ 2)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 83

Exercice 94. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (-9,\ 2,\ -17)$ et $\vec{e}_2 = (24,\ -1,\ 28)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 84

Exercice 95. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (3,\ -10,\ -23)$ et $\vec{e}_2 = (-6,\ 1,\ 8)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 86

Exercice 96. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (3,\ 86,\ 0)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 87

Exercice 97. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (-1,\ -2,\ 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $s(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de s relativement à la base canonique. → page 87

Exercice 98. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (1,\ 1,\ 0)$. On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 88

Exercice 99. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. Soit $\vec{n} = (4,\ 1,\ 1)$. On note D la droite engendrée par $\vec{n}$. Soit p la projection orthogonale sur D. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 88

Exercice 100. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On note P le plan engendré par $\vec{e}_1 = (0,\ -9,\ 1)$ et $\vec{e}_2 = (-90,\ -27,\ 98)$. Soit p la projection orthogonale sur P. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z et écrire la matrice représentative de p relativement à la base canonique. → page 89

Corrigé 1. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a : ← page 1

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{y+2\,z}{5} \cdot (0,\,1,\,2) \\ &= \frac{1}{5}\,(5\,x,\; 4\,y - 2\,z,\; -2\,y + z)\,. \end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 1

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{x - y + 3\,z}{11} \cdot (1,\,-1,\,3)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 3. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 1
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit

scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-2\,x+3\,y}{13}\cdot(-2,\,3,\,0)-(x,y,z) \\ &= \frac{1}{13}\left(-5\,x-12\,y,\; -12\,x+5\,y,\; -13\,z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & -12 & 0 \\ -12 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 4. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 1

- on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z)\in P$, et : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle=0$, $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle=0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;
- on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z)=\langle (x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1+\langle (x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;
- on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n}=(a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle=0$ et $\langle \vec{n},\vec{e}_2\rangle=0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z)=(x,y,z)-\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle=0,\quad \langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle=0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\begin{cases} a\,\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle + b\,\langle \vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle = \langle (x,y,z),\vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle + b\,\langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle = \langle (x,y,z),\vec{e}_2\rangle \end{cases}$$

Or : $\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle=197$, $\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=-1$, et : $\langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle=785$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\begin{cases} 197\,a-b = -14\,y+z \\ -a+785\,b = 28\,x-z \end{cases}$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = \frac{1}{5523}\,x - \frac{785}{11046}\,y + \frac{4}{789}\,z$, $b = \frac{197}{5523}\,x - \frac{1}{11046}\,y - \frac{1}{789}\,z$.
On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{789}\left(788\,x - 2\,y - 28\,z,\ -2\,x + 785\,y - 56\,z,\ -28\,x - 56\,y + 5\,z\right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{197}\sqrt{197}\,(0,\ -14,\ 1)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = \left(28,\ -\frac{14}{197},\ -\frac{196}{197}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(\frac{394}{789}\sqrt{\frac{789}{197}},\ -\frac{1}{789}\sqrt{\frac{789}{197}},\ -\frac{14}{789}\sqrt{\frac{789}{197}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{789}\left(788\,x - 2\,y - 28\,z,\ -2\,x + 785\,y - 56\,z,\ -28\,x - 56\,y + 5\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -14\,b + c &= 0 \\ 28\,a - c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\ -2,\ -28)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ -2,\ -28)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x - 2\,y - 28\,z}{789} \cdot (-1,\ -2,\ -28) \\ &= \frac{1}{789}\left(788\,x - 2\,y - 28\,z,\ -2\,x + 785\,y - 56\,z,\ -28\,x - 56\,y + 5\,z\right).\end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{789}\begin{pmatrix} 788 & -2 & -28 \\ -2 & 785 & -56 \\ -28 & -56 & 5 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 5. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 1

- on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;
- on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle \vec{v}_2$;
- on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle + b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle &=& \langle (x,y,z), \vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle + b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle &=& \langle (x,y,z), \vec{e}_2\rangle \end{array}\right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = 3521$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = -596$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = 101$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3521\,a - 596\,b &=& -2\,x - 6\,y + 59\,z \\ -596\,a + 101\,b &=& y - 10\,z \end{array}\right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{202}{405}\,x - \frac{2}{81}\,y - \frac{1}{405}\,z$, $b = -\frac{1192}{405}\,x - \frac{11}{81}\,y - \frac{46}{405}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{405}\left(404\,x + 20\,y + 2\,z,\ 20\,x + 5\,y - 40\,z,\ 2\,x - 40\,y + 401\,z\right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{3521}\sqrt{3521}\,(-2,\ -6,\ 59)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = \left(-\frac{1192}{3521}, -\frac{55}{3521}, -\frac{46}{3521}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-\frac{1192}{45}\sqrt{\frac{5}{3521}}, -\frac{11}{9}\sqrt{\frac{5}{3521}}, -\frac{46}{45}\sqrt{\frac{5}{3521}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{405}\left(404\,x + 20\,y + 2\,z,\ 20\,x + 5\,y - 40\,z,\ 2\,x - 40\,y + 401\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\,a - 6\,b + 59\,c &=& 0 \\ b - 10\,c &=& 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a, b, c) = (-1,\ 20,\ 2)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ 20,\ 2)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x + 20\,y + 2\,z}{405} \cdot (-1,\ 20,\ 2) \\ &= \frac{1}{405}\left(404\,x + 20\,y + 2\,z,\ 20\,x + 5\,y - 40\,z,\ 2\,x - 40\,y + 401\,z\right).\end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{405}\begin{pmatrix} 404 & 20 & 2 \\ 20 & 5 & -40 \\ 2 & -40 & 401 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 6. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : ← page 1

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x + 14\,y - z}{198} \cdot (-1,\ 14,\ -1) \\ &= \frac{1}{198}\left(197\,x + 14\,y - z,\ 14\,x + 2\,y + 14\,z,\ -x + 14\,y + 197\,z\right).\end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{198}\begin{pmatrix} 197 & 14 & -1 \\ 14 & 2 & 14 \\ -1 & 14 & 197 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 7. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : ← page 1

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{26\,x+5\,y}{701}\cdot(26,\,5,\,0)\\ &= \frac{1}{701}\,(25\,x-130\,y,\,-130\,x+676\,y,\,701\,z)\,.\end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{701}\begin{pmatrix}25 & -130 & 0\\ -130 & 676 & 0\\ 0 & 0 & 701\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 8. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)\in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)\in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right),\,\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle\vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{x-y-z}{3}\cdot(1,\,-1,\,-1) - (x,y,z)\\ &= \frac{1}{3}\,(-x-2\,y-2\,z,\,-2\,x-y+2\,z,\,-2\,x+2\,y-z)\,.\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s

← page 1

dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 9. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x, y, z)$ se résume à déterminer $s_D(x, y, z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc : ← page 1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.
\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
s_D(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\
&= 2\frac{-2\,y + z}{5} \cdot (0,\ -2,\ 1) - (x, y, z) \\
&= \frac{1}{5}\left(-5\,x,\ 3\,y - 4\,z,\ -4\,y - 3\,z\right).
\end{aligned}$$

On en déduit $s(x, y, z)$ en se souvenant que : $s(x, y, z) = -s_D(x, y, z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 10. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 1

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2 \rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} a \, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & + & b \, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1 \rangle \\ a \, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & + & b \, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2 \rangle \end{array} \right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 20006$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 23097$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 26682$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 20006\, a + 23097\, b & = & 99\, x + 2\, y - 101\, z \\ 23097\, a + 26682\, b & = & 116\, x - y - 115\, z \end{array} \right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{38}{331}\, x + \frac{77}{331}\, y - \frac{39}{331}\, z$, $b = \frac{103}{993}\, x - \frac{200}{993}\, y + \frac{97}{993}\, z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{3} \left(2\, x - y - z,\ -x + 2\, y - z,\ -x - y + 2\, z \right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|} \vec{e}_1 = \frac{1}{20006} \sqrt{20006} \, (99,\ 2,\ -101)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 = \left(\frac{34093}{20006}, -\frac{33100}{10003}, \frac{32107}{20006} \right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \vec{u}_2 = \left(\frac{103}{3} \sqrt{\frac{3}{20006}}, -\frac{200}{3} \sqrt{\frac{3}{20006}}, \frac{97}{3} \sqrt{\frac{3}{20006}} \right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{3} \left(2\, x - y - z,\ -x + 2\, y - z,\ -x - y + 2\, z \right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 99\, a + 2\, b - 101\, c & = & 0 \\ 116\, a - b - 115\, c & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\,-1,\,-1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\,-1,\,-1)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x-y-z}{3} \cdot (-1,\,-1,\,-1) \\ &= \frac{1}{3}\left(2\,x - y - z,\; -x + 2\,y - z,\; -x - y + 2\,z\right). \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 11. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ -24\,a - 16\,b + 3\,c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-2,\,3,\,0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-2,\,3,\,0)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^\perp = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.

La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire.

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{-2\,x+3\,y}{13}\cdot(-2,\ 3,\ 0)-(x,y,z)\\ &= \frac{1}{13}\left(-5\,x-12\,y,\ -12\,x+5\,y,\ -13\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 & 0\\ 12 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 13\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 12. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 2

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s(x,y,z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s(x,y,z),\vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{20\,x-3\,y+z}{410}\cdot(20,\ -3,\ 1)-(x,y,z)\\ &= \frac{1}{205}\left(195\,x-60\,y+20\,z,\ -60\,x-196\,y-3\,z,\ 20\,x-3\,y-204\,z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{205}\begin{pmatrix} 195 & -60 & 20 \\ -60 & -196 & -3 \\ 20 & -3 & -204 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 13. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 2

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\ &= 2\frac{2\,x - y}{5} \cdot (2,\, -1,\, 0) - (x, y, z) \\ &= \frac{1}{5}\left(3\,x - 4\,y,\; -4\,x - 3\,y,\; -5\,z\right). \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 14. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 2

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit :

$\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{x-y+z}{3}\cdot(1,\,-1,\,1) - (x,y,z)\\ &= \frac{1}{3}\left(-x-2\,y+2\,z,\ -2\,x-y-2\,z,\ 2\,x-2\,y-z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 15. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 2

$$\begin{cases} -9\,a+3\,b-2\,c &= 0\\ 6\,a+12\,b-c &= 0\end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\,1,\,6)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\,1,\,6)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^\perp = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.
La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que

la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{-x+y+6\,z}{38}\cdot(-1,\,1,\,6)-(x,y,z)\\ &= \frac{1}{19}\left(-18\,x-y-6\,z,\ -x-18\,y+6\,z,\ -6\,x+6\,y+17\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{19}\begin{pmatrix}18 & 1 & 6\\ 1 & 18 & -6\\ 6 & -6 & -17\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 16. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 2

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-x+2\,y-z}{6}\cdot(-1,\,2,\,-1).$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 17. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : ← page 2

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{-x+y+2\,z}{6} \cdot (-1,\,1,\,2) \\ = \frac{1}{6}\left(5\,x+y+2\,z,\; x+5\,y-2\,z,\; 2\,x-2\,y+2\,z\right).$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 18. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$s_D(x,y,z) = 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ = 2\frac{-2\,x-y+z}{6} \cdot (-2,\,-1,\,1) - (x,y,z) \\ = \frac{1}{3}\left(x+2\,y-2\,z,\; 2\,x-2\,y-z,\; -2\,x-y-2\,z\right).$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

← page 2

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 19. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 2

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2 \rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\begin{cases} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1 \rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2 \rangle \end{cases}$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 1845$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 803$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 381$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\begin{cases} 1845\,a + 803\,b & = & 10\,x + 8\,y - 41\,z \\ 803\,a + 381\,b & = & 4\,x - 2\,y - 19\,z \end{cases}$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = \frac{23}{2236}\,x + \frac{179}{2236}\,y - \frac{7}{1118}\,z$, $b = -\frac{25}{2236}\,x - \frac{389}{2236}\,y - \frac{41}{1118}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{86}\left(5\,x + 9\,y - 18\,z,\ 9\,x + 85\,y + 2\,z,\ -18\,x + 2\,y + 82\,z\right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{615}\sqrt{205}\,(10,\ 8,\ -41), \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 = \left(-\frac{130}{369}, -\frac{10114}{1845}, -\frac{52}{45}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-\frac{25}{258}\sqrt{\frac{86}{205}}, -\frac{389}{258}\sqrt{\frac{86}{205}}, -\frac{41}{129}\sqrt{\frac{86}{205}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{86}\left(5\,x + 9\,y - 18\,z,\ 9\,x + 85\,y + 2\,z,\ -18\,x + 2\,y + 82\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} 10\,a + 8\,b - 41\,c &= 0 \\ 4\,a - 2\,b - 19\,c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a, b, c) = (-9,\ 1,\ -2)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-9,\ 1,\ -2)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x, y, z) - \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{-9\,x + y - 2\,z}{86} \cdot (-9,\ 1,\ -2) \\ &= \frac{1}{86}\left(5\,x + 9\,y - 18\,z,\ 9\,x + 85\,y + 2\,z,\ -18\,x + 2\,y + 82\,z\right). \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{86}\begin{pmatrix} 5 & 9 & -18 \\ 9 & 85 & 2 \\ -18 & 2 & 82 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 20. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 2

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n} \rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle + \langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-x+z}{2} \cdot (-1,\, 0,\, 1) - (x,y,z) \\ &= (-z,\, -y,\, -x)\,. \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 21. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 3

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{y+z}{2} \cdot (0,\, 1,\, 1) - (x,y,z) \\ &= (-x,\, z,\, y)\,. \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 22. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection ortho- ← page 3

gonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x, y, z)$ se résume à déterminer $s_D(x, y, z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.
\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
s_D(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\
&= 2\frac{x + 34\,y}{1157} \cdot (1,\ 34,\ 0) - (x, y, z) \\
&= \frac{1}{1157}\left(-1155\,x + 68\,y,\ 68\,x + 1155\,y,\ -1157\,z\right).
\end{aligned}$$

On en déduit $s(x, y, z)$ en se souvenant que : $s(x, y, z) = -s_D(x, y, z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{1157}\begin{pmatrix} 1155 & -68 & 0 \\ -68 & -1155 & 0 \\ 0 & 0 & 1157 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 23. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 3

$$p(x, y, z) = \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-x - 12\,y - 32\,z}{1169} \cdot (-1,\ -12,\ -32).$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{1169}\begin{pmatrix} 1 & 12 & 32 \\ 12 & 144 & 384 \\ 32 & 384 & 1024 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 24. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 3

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2 \rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a \, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & + & b \, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1 \rangle \\ a \, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & + & b \, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2 \rangle \end{array} \right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 173$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = -74$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 41$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 173\,a - 74\,b & = & 5\,x - 12\,y - 2\,z \\ -74\,a + 41\,b & = & -4\,x + 4\,y + 3\,z \end{array} \right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{13}{231}\,x - \frac{4}{33}\,y + \frac{20}{231}\,z$, $b = -\frac{46}{231}\,x - \frac{4}{33}\,y + \frac{53}{231}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{33}\,(17\,x - 4\,y - 16\,z,\ -4\,x + 32\,y - 4\,z,\ -16\,x - 4\,y + 17\,z)\,.$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{173}\sqrt{173}\,(5,\ -12,\ -2)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 = \left(-\frac{322}{173}, -\frac{196}{173}, \frac{371}{173} \right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-\frac{46}{33}\sqrt{\frac{33}{173}}, -\frac{28}{33}\sqrt{\frac{33}{173}}, \frac{53}{33}\sqrt{\frac{33}{173}} \right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{33}\,(17\,x - 4\,y - 16\,z,\ -4\,x + 32\,y - 4\,z,\ -16\,x - 4\,y + 17\,z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} 5\,a - 12\,b - 2\,c &= 0 \\ -4\,a + 4\,b + 3\,c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a, b, c) = (-4,\ -1,\ -4)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-4,\ -1,\ -4)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x, y, z) - \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{-4\,x - y - 4\,z}{33} \cdot (-4,\ -1,\ -4) \\ &= \frac{1}{33}\,(17\,x - 4\,y - 16\,z,\ -4\,x + 32\,y - 4\,z,\ -16\,x - 4\,y + 17\,z)\,. \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 17 & -4 & -16 \\ -4 & 32 & -4 \\ -16 & -4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 25. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 3

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n} \rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle + \langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-x-z}{2}\cdot(-1,\,0,\,-1) - (x,y,z) \\ &= (z,\,-y,\,x)\,. \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 26. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 3

$$\begin{cases} -a-b &= 0 \\ \quad c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\,1,\,0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\,1,\,0)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^\perp = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.
La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-x+y}{2}\cdot(-1,\,1,\,0) - (x,y,z) \\ &= (-y,\,-x,\,-z)\,. \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 27. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : ← page 3

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{2\,x+y}{5}\cdot(2,\,1,\,0) \\ &= \frac{1}{5}\,(x-2\,y,\; -2\,x+4\,y,\; 5\,z)\,. \end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 28. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 3

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z)\in P$, et : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^{\perp}$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n}=(a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n},\vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1 \rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2 \rangle \end{array} \right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 358$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = -32$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 3$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 358\,a - 32\,b & = & 9\,x - 9\,y + 14\,z \\ -32\,a + 3\,b & = & -x + y - z \end{array} \right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{1}{10}\,x + \frac{1}{10}\,y + \frac{1}{5}\,z$, $b = -\frac{7}{5}\,x + \frac{7}{5}\,y + \frac{9}{5}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\,(x - y,\ -x + y,\ 2\,z)\,.$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{358}\sqrt{358}\,(9,\ -9,\ 14)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1 \rangle\,\vec{v}_1 = \left(-\frac{35}{179}, \frac{35}{179}, \frac{45}{179} \right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-7\sqrt{\frac{1}{179}}, 7\sqrt{\frac{1}{179}}, 9\sqrt{\frac{1}{179}} \right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(x - y,\ -x + y,\ 2\,z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 9\,a - 9\,b + 14\,c & = & 0 \\ -a + b - c & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\ -1,\ 0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ -1,\ 0)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x-y}{2}\cdot(-1,\,-1,\,0)\\ &= \frac{1}{2}\,(x-y,\,-x+y,\,2\,z)\,.\end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 29. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 3

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z),\,\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-x+y-z}{3}\cdot(-1,\,1,\,-1)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 30. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : ← page 3

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z),\,\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{x+y}{2}\cdot(1,\,1,\,0)\\ &= \frac{1}{2}\,(x-y,\,-x+y,\,2\,z)\,.\end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 31. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-x-2\,y}{5} \cdot (-1,\ -2,\ 0)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 32. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 4

- on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;
- on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\, \vec{v}_2$;
- on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2\rangle \end{array}\right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = 9473$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 593$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = 38$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcc} 9473\,a + 593\,b & = & -16\,x - 96\,y + z \\ 593\,a + 38\,b & = & -x - 6\,y + z \end{array}\right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{1}{555}\,x - \frac{2}{185}\,y - \frac{1}{15}\,z$, $b = \frac{1}{555}\,x + \frac{2}{185}\,y + \frac{16}{15}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{37}\,(x + 6\,y,\ 6\,x + 36\,y,\ 37\,z)\,.$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{9473}\sqrt{9473}\,(-16,\ -96,\ 1)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = \left(\frac{15}{9473}, \frac{90}{9473}, \frac{8880}{9473}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{37}\sqrt{\frac{37}{9473}}, \frac{6}{37}\sqrt{\frac{37}{9473}}, 16\sqrt{\frac{37}{9473}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{37}\,(x + 6\,y,\ 6\,x + 36\,y,\ 37\,z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -16\,a - 96\,b + c &= 0 \\ -a - 6\,b + c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-6,\ 1,\ 0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-6,\ 1,\ 0)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-6\,x + y}{37}\cdot(-6,\ 1,\ 0) \\ &= \frac{1}{37}\,(x + 6\,y,\ 6\,x + 36\,y,\ 37\,z)\,. \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 33. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a : ← page 4

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-2\,x-3\,y}{13}\cdot(-2,\,-3,\,0)\\ &= \frac{1}{13}\,(9\,x-6\,y,\,-6\,x+4\,y,\,13\,z)\,.\end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 0\\ -6 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 13\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 34. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : ← page 4

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z),\,\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x-z}{2}\cdot(-1,\,0,\,-1)\\ &= \frac{1}{2}\,(x-z,\,2\,y,\,-x+z)\,.\end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 35. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z),\,\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{x-39\,y+z}{1523}\cdot(1,\,-39,\,1)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{1523}\begin{pmatrix} 1 & -39 & 1\\ -39 & 1521 & -39\\ 1 & -39 & 1\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 36. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 4

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z)\in P$, et : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle=0$, $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle=0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z)=\langle (x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1+\langle (x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n}=(a,b,c)$ vérifiant $\langle\vec{n},\vec{e}_1\rangle=0$ et $\langle\vec{n},\vec{e}_2\rangle=0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z)=(x,y,z)-\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle=0,\quad \langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle=0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\,\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle + b\,\langle\vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle &=& \langle (x,y,z),\vec{e}_1\rangle\\ a\,\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle + b\,\langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle &=& \langle (x,y,z),\vec{e}_2\rangle\end{array}\right.$$

Or : $\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle=3283$, $\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=-1119$, et : $\langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle=667$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3283\,a-1119\,b &=& -5\,x+3\,y+57\,z\\ -1119\,a+667\,b &=& -15\,x+y-21\,z\end{array}\right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a=-\frac{503}{23440}\,x+\frac{39}{11720}\,y+\frac{363}{23440}\,z$, $b=-\frac{1371}{23440}\,x+\frac{83}{11720}\,y-\frac{129}{23440}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2=\frac{1}{586}\left(577\,x-72\,y+3\,z,\ -72\,x+10\,y+24\,z,\ 3\,x+24\,y+585\,z\right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1=\frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1=\frac{1}{469}\sqrt{67}\,(-5,\,3,\,57),\quad \vec{u}_2=\vec{e}_2-\langle\vec{e}_2,\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1=\left(-\frac{54840}{3283},\frac{6640}{3283},-\frac{5160}{3283}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2=\frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2=\left(-\frac{1371}{4102}\sqrt{\frac{586}{67}},\ \frac{83}{2051}\sqrt{\frac{586}{67}},\ -\frac{129}{4102}\sqrt{\frac{586}{67}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z)=\langle (x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1+\langle (x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z)=\frac{1}{586}\left(577\,x-72\,y+3\,z,\ -72\,x+10\,y+24\,z,\ 3\,x+24\,y+585\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -5\,a + 3\,b + 57\,c &= 0 \\ -15\,a + b - 21\,c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a, b, c) = (3,\ 24,\ -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (3,\ 24,\ -1)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x, y, z) - \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{3\,x + 24\,y - z}{586} \cdot (3,\ 24,\ -1) \\ &= \frac{1}{586}\left(577\,x - 72\,y + 3\,z,\ -72\,x + 10\,y + 24\,z,\ 3\,x + 24\,y + 585\,z\right). \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(p) = \frac{1}{586}\begin{pmatrix} 577 & -72 & 3 \\ -72 & 10 & 24 \\ 3 & 24 & 585 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 37. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 4

$$p(x, y, z) = \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{2\,x + 11\,y + 9\,z}{206} \cdot (2,\ 11,\ 9).$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(p) = \frac{1}{206}\begin{pmatrix} 4 & 22 & 18 \\ 22 & 121 & 99 \\ 18 & 99 & 81 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 38. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : ← page 4

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x, y, z) - \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{-4\,y + z}{17} \cdot (0,\ -4,\ 1) \\ &= \frac{1}{17}\,(17\,x,\ y + 4\,z,\ 4\,y + 16\,z)\,.\end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 39. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 4

- on écrit que le vecteur $p(x, y, z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x, y, z) \in P$, et : $(x, y, z) - p(x, y, z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a, b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x, y, z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;
- on exprime $p(x, y, z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x, y, z) = \langle (x, y, z), \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x, y, z), \vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;
- on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x, y, z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x, y, z) - p(x, y, z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x, y, z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\begin{cases} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle + b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle = \langle (x, y, z), \vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle + b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = \langle (x, y, z), \vec{e}_2\rangle \end{cases}$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = 1$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 0$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = 2$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\begin{cases} a = -x \\ 2\,b = -y - z \end{cases}$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -x$, $b = -\frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z$. On peut enfin calculer $p(x, y, z)$:

$$p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\,(2\,x,\ y + z,\ y + z)\,.$$

Deuxième méthode. On montre facilement que : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 0$, donc la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est déjà une base orthogonale de P. Il reste à les diviser par leurs normes pour avoir une base orthonormée $\left(\frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1, \frac{1}{\|\vec{e}_2\|}\vec{e}_2\right)$ de P. On a donc :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1\right\rangle \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 + \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{e}_2\|}\vec{e}_2\right\rangle \frac{1}{\|\vec{e}_2\|}\vec{e}_2 = \frac{\langle (x, y, z), \vec{e}_1\rangle}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 + \frac{\langle (x, y, z), \vec{e}_2\rangle}{\|\vec{e}_2\|^2}$$

Or on a : $\|\vec{e}_1\|^2 = 1$, et : $\|\vec{e}_2\|^2 = 2$. En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(2\,x,\; y+z,\; y+z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -a &= 0 \\ -b - c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (0,\,-1,\,1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (0,\,-1,\,1)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-y+z}{2} \cdot (0,\,-1,\,1) \\ &= \frac{1}{2}\,(2\,x,\; y+z,\; y+z)\,. \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 40. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a : ← page 4

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-y-56\,z}{3137} \cdot (0,\,-1,\,-56) \\ &= \frac{1}{3137}\,(3137\,x,\; 3136\,y - 56\,z,\; -56\,y + z)\,. \end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{3137}\begin{pmatrix} 3137 & 0 & 0 \\ 0 & 3136 & -56 \\ 0 & -56 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 41. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 4

— on écrit que le vecteur $p(x, y, z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x, y, z) \in P$, et : $(x, y, z) - p(x, y, z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_1 \rangle = 0$, $\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_2 \rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a, b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x, y, z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x, y, z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x, y, z) = \langle (x, y, z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x, y, z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2 \rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x, y, z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x, y, z) - p(x, y, z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_1 \rangle = 0, \quad \langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_2 \rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x, y, z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a \, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & + & b \, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & = & \langle (x, y, z), \vec{e}_1 \rangle \\ a \, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & + & b \, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & = & \langle (x, y, z), \vec{e}_2 \rangle \end{array} \right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 326$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 134$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 29318$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 326\, a + 134\, b & = & -x - 18\, y - z \\ 134\, a + 29318\, b & = & -121\, x + 6\, y - 121\, z \end{array} \right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{1}{728}\, x - \frac{121}{2184}\, y - \frac{1}{728}\, z$, $b = -\frac{3}{728}\, x + \frac{1}{2184}\, y - \frac{3}{728}\, z$. On peut enfin calculer $p(x, y, z)$:

$$p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{2} \left(x + z, \, 2\, y, \, x + z \right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|} \vec{e}_1 = \frac{1}{326} \sqrt{326} \left(-1, \, -18, \, -1 \right), \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 = \left(-\frac{19656}{163}, \frac{2184}{163}, -\frac{19656}{163} \right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \vec{u}_2 = \left(-9 \sqrt{\frac{1}{163}}, \sqrt{\frac{1}{163}}, -9 \sqrt{\frac{1}{163}} \right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = \langle (x, y, z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x, y, z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(x + z, \, 2\, y, \, x + z \right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -a - 18\,b - c & = 0 \\ -121\,a + 6\,b - 121\,c & = 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a, b, c) = (-1,\, 0,\, 1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\, 0,\, 1)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x, y, z) - \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{-x + z}{2} \cdot (-1,\, 0,\, 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(x + z,\, 2\,y,\, x + z\right). \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 42. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : ← page 5

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x, y, z) - \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{4\,x - y - 3\,z}{26} \cdot (4,\, -1,\, -3) \\ &= \frac{1}{26}\left(10\,x + 4\,y + 12\,z,\, 4\,x + 25\,y - 3\,z,\, 12\,x - 3\,y + 17\,z\right). \end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(p) = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 25 & -3 \\ 12 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 43. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 5

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z)) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n} \rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z))$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) = \left\langle \frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle + \langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.
\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\
&= 2\frac{-x + y - z}{3} \cdot (-1,\ 1,\ -1) - (x, y, z) \\
&= \frac{1}{3}(-x - 2\,y + 2\,z,\ -2\,x - y - 2\,z,\ 2\,x - 2\,y - z)\,.
\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 44. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 5

$$p(x, y, z) = \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-y - 5\,z}{26} \cdot (0,\ -1,\ -5)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 45. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 5

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z)\\ &= 2\frac{x - 50\,z}{2501}\cdot(1,\ 0,\ -50) - (x, y, z)\\ &= \frac{1}{2501}\left(-2499\,x - 100\,z,\ -2501\,y,\ -100\,x + 2499\,z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{2501}\begin{pmatrix} -2499 & 0 & -100\\ 0 & -2501 & 0\\ -100 & 0 & 2499\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 46. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 5

— on écrit que le vecteur $p(x, y, z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x, y, z) \in P$, et : $(x, y, z) - p(x, y, z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a, b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x, y, z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x, y, z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x, y, z) = \langle (x, y, z), \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x, y, z), \vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x, y, z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x, y, z) - p(x, y, z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2\rangle \end{array}\right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = 51011$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 256041$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = 1285251$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 51011\,a + 256041\,b & = & x - 201\,y + 103\,z \\ 256041\,a + 1285251\,b & = & x - 1013\,y + 509\,z \end{array}\right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = \frac{169}{812}\,x + \frac{849}{4060}\,y + \frac{422}{1015}\,z$, $b = -\frac{101}{2436}\,x - \frac{517}{12180}\,y - \frac{251}{3045}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{30}\left(5\,x + 5\,y + 10\,z,\ 5\,x + 29\,y - 2\,z,\ 10\,x - 2\,y + 26\,z\right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{51011}\sqrt{51011}\,(1,\ -201,\ 103)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = \left(-\frac{7070}{1759},\ -\frac{7238}{1759},\ -\frac{14056}{1759}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-\frac{101}{174}\sqrt{\frac{870}{1759}},\ -\frac{517}{870}\sqrt{\frac{870}{1759}},\ -\frac{502}{435}\sqrt{\frac{870}{1759}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{30}\left(5\,x + 5\,y + 10\,z,\ 5\,x + 29\,y - 2\,z,\ 10\,x - 2\,y + 26\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a - 201\,b + 103\,c & = & 0 \\ a - 1013\,b + 509\,c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-5,\ 1,\ 2)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-5,\ 1,\ 2)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-5\,x + y + 2\,z}{30} \cdot (-5,\ 1,\ 2) \\ &= \frac{1}{30}\left(5\,x + 5\,y + 10\,z,\ 5\,x + 29\,y - 2\,z,\ 10\,x - 2\,y + 26\,z\right). \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 5 & 29 & -2 \\ 10 & -2 & 26 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 47. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 5
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x,y,z)+s(x,y,z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x,y,z)-s(x,y,z)) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x,y,z)-s(x,y,z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}((x,y,z)+s(x,y,z))$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}((x,y,z)+s(x,y,z)) = \left\langle \frac{1}{2}((x,y,z)+s(x,y,z)), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{y-z}{2}\cdot(0,\,1,\,-1) - (x,y,z) \\ &= (-x,\,-z,\,-y)\,. \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 48. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 5
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x,y,z)+s(x,y,z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x,y,z)-s(x,y,z)) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x,y,z)-s(x,y,z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit :

$\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-4\,x-y-z}{18}\cdot(-4,\,-1,\,-1) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{9}\left(7\,x+4\,y+4\,z,\ 4\,x-8\,y+z,\ 4\,x+y-8\,z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 49. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 5

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{12\,x+3\,y+10\,z}{253}\cdot(12,\,3,\,10) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{253}\left(35\,x+72\,y+240\,z,\ 72\,x-235\,y+60\,z,\ 240\,x+60\,y-53\,z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{253}\begin{pmatrix} 35 & 72 & 240 \\ 72 & -235 & 60 \\ 240 & 60 & -53 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 50. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

← page 5

$$\left\{\begin{array}{rcl} 77\,a - 11\,b - 7\,c & = & 0 \\ -567\,a + 81\,b - 7\,c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (1,\ 7,\ 0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (1,\ 7,\ 0)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^\perp = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.

La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle = \langle s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle + \langle s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle + \langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{x + 7\,y}{50} \cdot (1,\ 7,\ 0) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{25}\left(-24\,x + 7\,y,\ 7\,x + 24\,y,\ -25\,z\right). \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s

dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(s) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 24 & -7 & 0 \\ -7 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 51. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 5

- on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;
- on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2$;
- on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2 \rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle &=& \langle (x,y,z), \vec{e}_1 \rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle &=& \langle (x,y,z), \vec{e}_2 \rangle \end{array} \right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 13862$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 2$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 1$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 13862\,a + 2\,b &=& -2\,x - 13\,y + 117\,z \\ 2\,a + b &=& -x \end{array} \right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{1}{1066}\,y + \frac{9}{1066}\,z$, $b = -x + \frac{1}{533}\,y - \frac{9}{533}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{82}\,(82\,x,\ y - 9\,z,\ -9\,y + 81\,z)\,.$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{13862}\sqrt{13862}\,(-2,\ -13,\ 117)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 = \left(-\frac{6929}{6931}, \frac{13}{6931}, -\frac{117}{6931} \right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-13\sqrt{\frac{41}{6931}}, \frac{1}{41}\sqrt{\frac{41}{6931}}, -\frac{9}{41}\sqrt{\frac{41}{6931}} \right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{82}\,(82\,x,\ y - 9\,z,\ -9\,y + 81\,z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\,a - 13\,b + 117\,c & = & 0 \\ -a & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (0,\ -9,\ -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (0,\ -9,\ -1)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-9\,y - z}{82} \cdot (0,\ -9,\ -1) \\ &= \frac{1}{82}\,(82\,x,\ y - 9\,z,\ -9\,y + 81\,z)\,. \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{82}\begin{pmatrix} 82 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & -9 & 81 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 52. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 6

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ a + b & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\ 1,\ 0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 0)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^\perp = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.

La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)\in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)\in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle=0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle=\langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)=\left\langle\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right),\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle\vec{n}&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle+\langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle+\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s_D(x,y,z)&=2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}-(x,y,z)\\&=2\frac{-x+y}{2}\cdot(-1,\,1,\,0)-(x,y,z)\\&=(-y,\,-x,\,-z)\,.\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z)=-s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 53. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(x,y,z)=\left\langle (x,y,z),\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}=\frac{-7\,x-y+2\,z}{54}\cdot(-7,\,-1,\,2)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p)=\frac{1}{54}\begin{pmatrix}49&7&-14\\7&1&-2\\-14&-2&4\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 54. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que ← page 6

l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z)) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z))$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) = \left\langle \frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z)\\ &= 2\frac{-x + 4\,y + z}{18} \cdot (-1,\, 4,\, 1) - (x, y, z)\\ &= \frac{1}{9}\left(-8\,x - 4\,y - z,\; -4\,x + 7\,y + 4\,z,\; -x + 4\,y - 8\,z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{\imath})$, et $s(\vec{\jmath})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(s) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8 & -4 & -1\\ -4 & 7 & 4\\ -1 & 4 & -8\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 55. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 6

— on écrit que le vecteur $p(x, y, z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x, y, z) \in P$, et : $(x, y, z) - p(x, y, z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a, b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x, y, z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x, y, z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x, y, z) = \langle (x, y, z), \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x, y, z), \vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x, y, z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x, y, z) - p(x, y, z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x, y, z) - p(x, y, z), \vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} a\,\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle & + & b\,\langle\vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle & = & \langle(x,y,z),\vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle & + & b\,\langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle & = & \langle(x,y,z),\vec{e}_2\rangle \end{array}\right.$$

Or : $\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle = 2221$, $\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle = -4$, et : $\langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle = 1$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcc} 2221\,a - 4\,b & = & -42\,x + 21\,y - 4\,z \\ -4\,a + b & = & z \end{array}\right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{2}{105}\,x + \frac{1}{105}\,y$, $b = -\frac{8}{105}\,x + \frac{4}{105}\,y + z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{5}\,(4\,x - 2\,y,\ -2\,x + y,\ 5\,z)\,.$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{2221}\,\sqrt{2221}\,(-42,\ 21,\ -4)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle\vec{e}_2,\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = \left(-\frac{168}{2221},\ \frac{84}{2221},\ \frac{2205}{2221}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-\frac{8}{5}\,\sqrt{\frac{5}{2221}},\ \frac{4}{5}\,\sqrt{\frac{5}{2221}},\ 21\,\sqrt{\frac{5}{2221}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle(x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle(x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{5}\,(4\,x - 2\,y,\ -2\,x + y,\ 5\,z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle\vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle\vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -42\,a + 21\,b - 4\,c & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\ -2,\ 0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ -2,\ 0)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle(x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x-2\,y}{5}\cdot(-1,\ -2,\ 0) \\ &= \frac{1}{5}\,(4\,x - 2\,y,\ -2\,x + y,\ 5\,z)\,. \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 56. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 6

- on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;
- on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\, \vec{v}_2$;
- on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2\rangle \end{array}\right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = 222$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 9$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = 2$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 222\,a + 9\,b & = & -11\,x + y - 10\,z \\ 9\,a + 2\,b & = & -y - z \end{array}\right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{2}{33}\,x + \frac{1}{33}\,y - \frac{1}{33}\,z$, $b = \frac{3}{11}\,x - \frac{7}{11}\,y - \frac{4}{11}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\left(2\,x - y + z,\ -x + 2\,y + z,\ x + y + 2\,z\right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{222}\sqrt{222}\,(-11,\ 1,\ -10), \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1\rangle\, \vec{v}_1 = \left(\frac{33}{74}, -\frac{77}{74}, -\frac{22}{37}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(3\sqrt{\frac{1}{74}}, -7\sqrt{\frac{1}{74}}, -4\sqrt{\frac{1}{74}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\, \vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(2\,x - y + z,\ -x + 2\,y + z,\ x + y + 2\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -11\,a + b - 10\,c & = & 0 \\ -b - c & = & 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (1,\ 1,\ -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (1,\ 1,\ -1)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{x + y - z}{3} \cdot (1,\ 1,\ -1) \\ &= \frac{1}{3}\left(2\,x - y + z,\ -x + 2\,y + z,\ x + y + 2\,z\right). \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 57. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^{\perp}$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle = \langle s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc : ← page 6

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle + \langle s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle + \langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{2\,y - z}{5} \cdot (0,\, 2,\, -1) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{5}\,(-5\,x,\, 3\,y - 4\,z,\, -4\,y - 3\,z)\,. \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 58. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 6

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{y + z}{2} \cdot (0,\, 1,\, 1) - (x,y,z) \\ &= (-x,\, z,\, y)\,. \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 59. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x, y, z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 6

$$p(x, y, z) = \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{2\,x - y - 3\,z}{14} \cdot (2,\ -1,\ -3)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(p) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 60. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 6

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\ &= 2\frac{-3\,x + y - z}{11} \cdot (-3,\ 1,\ -1) - (x, y, z) \\ &= \frac{1}{11}\left(7\,x - 6\,y + 6\,z,\ -6\,x - 9\,y - 2\,z,\ 6\,x - 2\,y - 9\,z\right). \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{\imath})$, et $s(\vec{\jmath})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(s) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ -6 & -9 & -2 \\ 6 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 61. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :
← page 6

$$p(x,y,z)=\left\langle (x,y,z),\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}=\frac{-x-y+2\,z}{6}\cdot(-1,\,-1,\,2)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 62. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s=2p-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D=P^{\perp}$, alors on a : $s=-s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)\in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)\in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle=0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle=\langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :
← page 7

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)=\left\langle\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right),\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle\vec{n}&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle+\langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle+\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s_D(x,y,z)&=2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}-(x,y,z)\\&=2\frac{5\,x-12\,y+3\,z}{178}\cdot(5,\,-12,\,3)-(x,y,z)\\&=\frac{1}{89}\left(-64\,x-60\,y+15\,z,\,-60\,x+55\,y-36\,z,\,15\,x-36\,y-80\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z)=-s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s)=\frac{1}{89}\begin{pmatrix}64&60&-15\\60&-55&36\\-15&36&80\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 63. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x, y, z)$ se résume à déterminer $s_D(x, y, z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

← page 7

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.
\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
s_D(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\
&= 2\frac{-x + 2\,z}{5} \cdot (-1,\, 0,\, 2) - (x, y, z) \\
&= \frac{1}{5}\left(-3\,x - 4\,z,\, -5\,y,\, -4\,x + 3\,z\right).
\end{aligned}$$

On en déduit $s(x, y, z)$ en se souvenant que : $s(x, y, z) = -s_D(x, y, z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 64. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries.

← page 7

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit :

$\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{x-y}{2}\cdot(1,\,-1,\,0) - (x,y,z)\\ &= (-y,\,-x,\,-z)\,. \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 65. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)\in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)\in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc : ← page 7

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-5\,x - y + 3\,z}{35}\cdot(-5,\ -1,\ 3) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{35}\left(15\,x + 10\,y - 30\,z,\ 10\,x - 33\,y - 6\,z,\ -30\,x - 6\,y - 17\,z\right). \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -15 & -10 & 30 \\ -10 & 33 & 6 \\ 30 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 66. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 7

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-11\,x - 4\,y + z}{138}\cdot(-11,\ -4,\ 1) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{69}\left(52\,x + 44\,y - 11\,z,\ 44\,x - 53\,y - 4\,z,\ -11\,x - 4\,y - 68\,z\right). \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 52 & 44 & -11 \\ 44 & -53 & -4 \\ -11 & -4 & -68 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 67. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 7

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2 \rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1 \rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2 \rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1 \rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2 \rangle \end{array} \right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 1$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 10$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -z \\ 10\,b & = & 3\,x + y \end{array} \right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -z$, $b = \frac{3}{10}\,x + \frac{1}{10}\,y$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{10}\,(9\,x + 3\,y,\ 3\,x + y,\ 10\,z)\,.$$

Deuxième méthode. On montre facilement que : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$, donc la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est déjà une base orthogonale de P. Il reste à les diviser par leurs normes pour avoir une base orthonormée $\left(\frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1, \frac{1}{\|\vec{e}_2\|}\vec{e}_2 \right)$ de P. On a donc :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 \right\rangle \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 + \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{e}_2\|}\vec{e}_2 \right\rangle \frac{1}{\|\vec{e}_2\|}\vec{e}_2 = \frac{\langle (x,y,z), \vec{e}_1 \rangle}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 + \frac{\langle (x,y,z)}{\|\vec{e}_2\|^2}$$

Or on a : $\|\vec{e}_1\|^2 = 1$, et : $\|\vec{e}_2\|^2 = 10$. En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{10}\,(9\,x + 3\,y,\ 3\,x + y,\ 10\,z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -c & = & 0 \\ 3\,a + b & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a, b, c) = (-1,\ 3,\ 0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ 3,\ 0)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x + 3\,y}{10} \cdot (-1,\ 3,\ 0) \\ &= \frac{1}{10}\left(9\,x + 3\,y,\ 3\,x + y,\ 10\,z\right).\end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(p) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 68. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : ← page 7

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{61\,x - 3\,y + 14\,z}{3926} \cdot (61,\ -3,\ 14) \\ &= \frac{1}{3926}\left(205\,x + 183\,y - 854\,z,\ 183\,x + 3917\,y + 42\,z,\ -854\,x + 42\,y + 3730\,z\right).\end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(p) = \frac{1}{3926}\begin{pmatrix} 205 & 183 & -854 \\ 183 & 3917 & 42 \\ -854 & 42 & 3730 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 69. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^{\perp}$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). ← page 7

Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} 3\,a - b - 18\,c &= 0 \\ 15\,a + 2\,b + 57\,c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\ -21,\ 1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ -21,\ 1)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^\perp = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.

La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle = \langle s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle + \langle s_D(x,y,z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle + \langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-x - 21\,y + z}{443} \cdot (-1,\ -21,\ 1) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{443}\left(-441\,x + 42\,y - 2\,z,\ 42\,x + 439\,y - 42\,z,\ -2\,x - 42\,y - 441\,z\right). \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{443}\begin{pmatrix} 441 & -42 & 2 \\ -42 & -439 & 42 \\ 2 & 42 & 441 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 70. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par ← page 7

conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{-x-4\,y-2\,z}{21}\cdot(-1,\ -4,\ -2) - (x,y,z)\\ &= \frac{1}{21}\left(-19\,x+8\,y+4\,z,\ 8\,x+11\,y+16\,z,\ 4\,x+16\,y-13\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 19 & -8 & -4\\ -8 & -11 & -16\\ -4 & -16 & 13\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 71. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 7

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z)-p(x,y,z) \in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n},\vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z)-p(x,y,z) \in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle = 0,\quad \langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a\,\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle & = & \langle (x,y,z),\vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle & = & \langle (x,y,z),\vec{e}_2\rangle \end{array}\right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle = 5$, $\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle = 25$, et : $\langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle = 129$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 5\,a + 25\,b & = & 2\,x - z \\ 25\,a + 129\,b & = & 10\,x - 2\,y - 5\,z \end{array}\right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = \frac{2}{5}\,x + \frac{5}{2}\,y - \frac{1}{5}\,z$, $b = -\frac{1}{2}\,y$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{5}\,(4\,x - 2\,z,\ 5\,y,\ -2\,x + z)\,.$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}\,(2,\ 0,\ -1)\,,\quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2,\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = (0,\ -2,\ 0)\,,$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = (0,\ -1,\ 0)$$

La famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) = \frac{1}{5}\,(4\,x - 2\,z,\ 5\,y,\ -2\,x + z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2\,a - c & = & 0 \\ 10\,a - 2\,b - 5\,c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\ 0,\ -2)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ 0,\ -2)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z),\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x-2\,z}{5}\cdot(-1,\ 0,\ -2)\\ &= \frac{1}{5}\,(4\,x - 2\,z,\ 5\,y,\ -2\,x + z)\,.\end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 72. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 8

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\ &= 2\frac{-9\,x - 2\,y - z}{86} \cdot (-9,\ -2,\ -1) - (x, y, z) \\ &= \frac{1}{43}\left(38\,x + 18\,y + 9\,z,\ 18\,x - 39\,y + 2\,z,\ 9\,x + 2\,y - 42\,z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 38 & 18 & 9 \\ 18 & -39 & 2 \\ 9 & 2 & -42 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 73. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 8

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit :

$\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.
\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\
&= 2\frac{-3\,x+y+5\,z}{35}\cdot(-3,\,1,\,5) - (x,y,z) \\
&= \frac{1}{35}\left(-17\,x-6\,y-30\,z,\; -6\,x-33\,y+10\,z,\; -30\,x+10\,y+15\,z\right).
\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -17 & -6 & -30 \\ -6 & -33 & 10 \\ -30 & 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 74. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : ← page 8

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{x+y-40\,z}{1602}\cdot(1,\,1,\,-40) \\
&= \frac{1}{1602}\left(1601\,x-y+40\,z,\; -x+1601\,y+40\,z,\; 40\,x+40\,y+2\,z\right).
\end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{1602}\begin{pmatrix} 1601 & -1 & 40 \\ -1 & 1601 & 40 \\ 40 & 40 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 75. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D ← page 8

est donnée par le produit scalaire de (x, y, z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-x+y+z}{3} \cdot (-1,\, 1,\, 1)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 76. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x, y, z)$ se résume à déterminer $s_D(x, y, z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

← page 8

$$\left\{\begin{array}{rcl} 22\,a + b + 15\,c & = & 0 \\ 3\,a - 3\,b + c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a, b, c) = (-2,\, -1,\, 3)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-2,\, -1,\, 3)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^\perp = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.
La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-2\,x - y + 3\,z}{14} \cdot (-2,\,-1,\,3) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{7}\left(-3\,x + 2\,y - 6\,z,\; 2\,x - 6\,y - 3\,z,\; -6\,x - 3\,y + 2\,z\right). \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 77. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 8
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-10\,x - 2\,y + 3\,z}{113} \cdot (-10,\,-2,\,3) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{113}\left(87\,x + 40\,y - 60\,z,\; 40\,x - 105\,y - 12\,z,\; -60\,x - 12\,y - 95\,z\right). \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{113}\begin{pmatrix} 87 & 40 & -60 \\ 40 & -105 & -12 \\ -60 & -12 & -95 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 78. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 8
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z)) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z))$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) = \left\langle \frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\ &= 2\frac{x + 3\,y - 6\,z}{46} \cdot (1,\ 3,\ -6) - (x, y, z) \\ &= \frac{1}{23}(-22\,x + 3\,y - 6\,z,\ 3\,x - 14\,y - 18\,z,\ -6\,x - 18\,y + 13\,z).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -22 & 3 & -6 \\ 3 & -14 & -18 \\ -6 & -18 & 13 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 79. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x, y, z)$ se résume à déterminer $s_D(x, y, z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x, y, z) + s_D(x, y, z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x, y, z) - s_D(x, y, z)) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x, y, z) - s_D(x, y, z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}((x, y, z) + s_D(x, y, z))$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la ← page 8

projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{x+2\,y}{5}\cdot(1,\,2,\,0)-(x,y,z)\\ &= \frac{1}{5}\left(-3\,x+4\,y,\;4\,x+3\,y,\;-5\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0\\ -4 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 80. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^{\perp}$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^{\perp}$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 8

$$\begin{cases} -38\,a+19\,b+4\,c &= 0\\ -2\,a+b-10\,c &= 0\end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\,-2,\,0)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\,-2,\,0)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^{\perp} = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.

La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)\in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)\in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{-x-2\,y}{5}\cdot(-1,\ -2,\ 0) - (x,y,z)\\ &= \frac{1}{5}\left(-3\,x+4\,y,\ 4\,x+3\,y,\ -5\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0\\ -4 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 81. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 8

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s(x,y,z)\right)\in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s(x,y,z),\vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{x-y+z}{3}\cdot(1,\ -1,\ 1) - (x,y,z)\\ &= \frac{1}{3}\left(-x-2\,y+2\,z,\ -2\,x-y-2\,z,\ 2\,x-2\,y-z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 82. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^{\perp}$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^{\perp}$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système : ← page 8

$$\begin{cases} -3\,a + 15\,b + 53\,c &= 0 \\ -9\,a + 24\,b + 82\,c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (2,\ 11,\ -3)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (2,\ 11,\ -3)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^{\perp} = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.
La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) - s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z) - s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z) + s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle + \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{2\,x + 11\,y - 3\,z}{134} \cdot (2,\ 11,\ -3) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{67}\left(-63\,x + 22\,y - 6\,z,\ 22\,x + 54\,y - 33\,z,\ -6\,x - 33\,y - 58\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s

dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{67}\begin{pmatrix} 63 & -22 & 6 \\ -22 & -54 & 33 \\ 6 & 33 & 58 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 83. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 9

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z)) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z))$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) = \left\langle \frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\ &= 2\frac{-x - 2\,y - z}{6} \cdot (-1,\ -2,\ -1) - (x, y, z) \\ &= \frac{1}{3}\left(-2\,x + 2\,y + z,\ 2\,x + y + 2\,z,\ x + 2\,y - 2\,z\right).\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 84. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^{\perp}$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x, y, z)$ se résume à déterminer $s_D(x, y, z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est ← page 9

la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z)\\ &= 2\frac{x+5\,y-z}{27}\cdot(1,\ 5,\ -1) - (x,y,z)\\ &= \frac{1}{27}\left(-25\,x+10\,y-2\,z,\ 10\,x+23\,y-10\,z,\ -2\,x-10\,y-25\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 25 & -10 & 2\\ -10 & -23 & 10\\ 2 & 10 & 25\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 85. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 9

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s(x,y,z)\right) \in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s(x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = \langle s(x,y,z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{x+y-3\,z}{11}\cdot(1,\,1,\,-3) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{11}\left(-9\,x+2\,y-6\,z,\; 2\,x-9\,y-6\,z,\; -6\,x-6\,y+7\,z\right). \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & 2 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 86. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : ← page 9

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-2\,x-y+z}{6}\cdot(-2,\,-1,\,1) \\ &= \frac{1}{6}\left(2\,x-2\,y+2\,z,\; -2\,x+5\,y+z,\; 2\,x+y+5\,z\right). \end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 87. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 9

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-x+y+z}{3}\cdot(-1,\,1,\,1).$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 88. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur D (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. ← page 9
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z)) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x, y, z) - s(x, y, z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z))$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)) = \left\langle \frac{1}{2}((x, y, z) + s(x, y, z)), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle s(x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle + \langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.
\end{aligned}$$

En isolant s dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
s(x, y, z) &= 2\frac{\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x, y, z) \\
&= 2\frac{-x + y + 3\,z}{11} \cdot (-1,\ 1,\ 3) - (x, y, z) \\
&= \frac{1}{11}(-9\,x - 2\,y - 6\,z,\ -2\,x - 9\,y + 6\,z,\ -6\,x + 6\,y + 7\,z).
\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & -2 & -6 \\ -2 & -9 & 6 \\ -6 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 89. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x, y, z)$ se résume à déterminer $s_D(x, y, z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}((x, y, z) + s_D(x, y, z)) \in D$, et : $\frac{1}{2}((x, y, z) - s_D(x, y, z)) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}((x, y, z) - s_D(x, y, z))$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n}\rangle = \langle s_D(x, y, z), \vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}((x, y, z) + s_D(x, y, z))$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la ← page 9

projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{x+2\,z}{5}\cdot(1,\,0,\,2) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{5}\left(-3\,x+4\,z,\ -5\,y,\ 4\,x+3\,z\right).\end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 90. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 9

- on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z)\in P$, et : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;
- on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;
- on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n},\vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\,\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle + b\,\langle \vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle &=& \langle (x,y,z),\vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle + b\,\langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle &=& \langle (x,y,z),\vec{e}_2\rangle \end{array}\right.$$

Or : $\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle = 2134$, $\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle = -2083$, et : $\langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle = 23686$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2134\,a - 2083\,b &=& -42\,x + 3\,y - 19\,z \\ -2083\,a + 23686\,b &=& -15\,x - 81\,y + 130\,z \end{array}\right.$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = -\frac{893}{40215}\,x - \frac{17}{8043}\,y - \frac{52}{13405}\,z$, $b = -\frac{104}{40215}\,x - \frac{29}{8043}\,y + \frac{69}{13405}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{35}\left(34\,x + 5\,y + 3\,z,\ 5\,x + 10\,y - 15\,z,\ 3\,x - 15\,y + 26\,z\right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{2134}\sqrt{2134}\,(-42,\ 3,\ -19), \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = \left(-\frac{59748}{1067},\ -\frac{166605}{2134},\ \frac{237843}{2134}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-\frac{104}{35}\sqrt{\frac{35}{2134}},\ -\frac{29}{7}\sqrt{\frac{35}{2134}},\ \frac{207}{35}\sqrt{\frac{35}{2134}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{35}\left(34\,x + 5\,y + 3\,z,\ 5\,x + 10\,y - 15\,z,\ 3\,x - 15\,y + 26\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -42\,a + 3\,b - 19\,c &= 0 \\ -15\,a - 81\,b + 130\,c &= 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\ 5,\ 3)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ 5,\ 3)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-x + 5\,y + 3\,z}{35} \cdot (-1,\ 5,\ 3) \\ &= \frac{1}{35}\left(34\,x + 5\,y + 3\,z,\ 5\,x + 10\,y - 15\,z,\ 3\,x - 15\,y + 26\,z\right). \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(p) = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 34 & 5 & 3 \\ 5 & 10 & -15 \\ 3 & -15 & 26 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 91. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 9

$$p(x,y,z)=\left\langle (x,y,z),\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}=\frac{x-z}{2}\cdot(1,\,0,\,-1)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 92. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s=2p-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D=P^\perp$, alors on a : $s=-s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D=P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n}=(a,b,c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle\vec{n},\vec{e}_1\rangle=0$, et : $\langle\vec{n},\vec{e}_1\rangle=0$. Ceci équivaut au système : ← page 9

$$\begin{cases}-b-c&=&0\\6\,a+b+19\,c&=&0\end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c)=(-3,\,-1,\,1)$ convient. Ainsi $\vec{n}=(-3,\,-1,\,1)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D=P^\perp=\left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp=\mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.
La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)\in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)\in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle=0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle=\langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)=\left\langle\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right),\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle\vec{n}&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle+\langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle+\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\\&=\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-3\,x - y + z}{11}\cdot(-3,\,-1,\,1) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{11}\,(7\,x + 6\,y - 6\,z,\; 6\,x - 9\,y - 2\,z,\; -6\,x - 2\,y - 9\,z)\,. \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 93. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 10

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z)\in P$, et : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^\perp$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z),\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 + \langle (x,y,z),\vec{v}_2\rangle\,\vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n},\vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n},\vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z)-p(x,y,z)\in P^\perp$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x,y,z)-p(x,y,z),\vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\begin{cases} a\,\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle + b\,\langle \vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle = \langle (x,y,z),\vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle + b\,\langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle = \langle (x,y,z),\vec{e}_2\rangle \end{cases}$$

Or : $\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle = 81$, $\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle = -20$, et : $\langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle = 5$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\begin{cases} 81\,a - 20\,b = x + 4\,y - 8\,z \\ -20\,a + 5\,b = -y + 2\,z \end{cases}$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = x$, $b = 4\,x - \frac{1}{5}\,y + \frac{2}{5}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{5}\,(5\,x,\; y - 2\,z,\; -2\,y + 4\,z)\,.$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{9}\,(1,\,4,\,-8)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2,\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = \left(\frac{20}{81}, -\frac{1}{81}, \frac{2}{81}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(\frac{4}{9}\sqrt{5},\ -\frac{1}{45}\sqrt{5},\ \frac{2}{45}\sqrt{5}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\, \vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{5}\,(5\,x,\ y - 2\,z,\ -2\,y + 4\,z)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + 4\,b - 8\,c & = & 0 \\ -b + 2\,c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (0,\ 2,\ 1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (0,\ 2,\ 1)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{2\,y + z}{5} \cdot (0,\ 2,\ 1) \\ &= \frac{1}{5}\,(5\,x,\ y - 2\,z,\ -2\,y + 4\,z)\,. \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 94. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 10

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\, \vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e_1} \rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e_2} \rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e_1} \rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e_2} \rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\begin{cases} a \langle \vec{e_1}, \vec{e_1} \rangle & + & b \langle \vec{e_2}, \vec{e_1} \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e_1} \rangle \\ a \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle & + & b \langle \vec{e_2}, \vec{e_2} \rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e_2} \rangle \end{cases}$$

Or : $\langle \vec{e_1}, \vec{e_1} \rangle = 374$, $\langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle = -694$, et : $\langle \vec{e_2}, \vec{e_2} \rangle = 1361$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\begin{cases} 374\,a - 694\,b & = & -9\,x + 2\,y - 17\,z \\ -694\,a + 1361\,b & = & 24\,x - y + 28\,z \end{cases}$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = \frac{113}{702}\,x + \frac{2}{27}\,y - \frac{95}{702}\,z$, $b = \frac{35}{351}\,x + \frac{1}{27}\,y - \frac{17}{351}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} = \frac{1}{18}\left(17\,x + 4\,y + z,\ 4\,x + 2\,y - 4\,z,\ x - 4\,y + 17\,z\right).$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v_1} = \frac{1}{\|\vec{e_1}\|}\vec{e_1} = \frac{1}{374}\sqrt{374}\,(-9,\ 2,\ -17), \quad \vec{u_2} = \vec{e_2} - \langle \vec{e_2}, \vec{v_1} \rangle\,\vec{v_1} = \left(\frac{1365}{187}, \frac{507}{187}, -\frac{39}{11}\right),$$

puis :

$$\vec{v_2} = \frac{1}{\|\vec{u_2}\|}\vec{u_2} = \left(\frac{35}{3}\sqrt{\frac{1}{187}}, \frac{13}{3}\sqrt{\frac{1}{187}}, -\frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{187}}\right)$$

La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v_1} \rangle\,\vec{v_1} + \langle (x,y,z), \vec{v_2} \rangle\,\vec{v_2}.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{18}\left(17\,x + 4\,y + z,\ 4\,x + 2\,y - 4\,z,\ x - 4\,y + 17\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e_1} \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e_1} \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} -9\,a + 2\,b - 17\,c & = & 0 \\ 24\,a - b + 28\,c & = & 0 \end{cases}$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-1,\ 4,\ 1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\ 4,\ 1)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x, y, z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{-x + 4\,y + z}{18} \cdot (-1,\, 4,\, 1) \\ &= \frac{1}{18}\left(17\,x + 4\,y + z,\, 4\,x + 2\,y - 4\,z,\, x - 4\,y + 17\,z\right).\end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 17 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 95. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^\perp$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x, y, z)$ se résume à déterminer $s_D(x, y, z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. À condition d'avoir un vecteur directeur de la droite : c'est ce que nous allons déterminer à présent. Comme $D = P^\perp$, il suffit pour cela de trouver un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ orthogonal au plan P, ce qui équivaut à être orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

← page 10

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\,a - 10\,b - 23\,c & = & 0 \\ -6\,a + b + 8\,c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a, b, c) = (-1,\, 2,\, -1)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-1,\, 2,\, -1)$ est un vecteur normal de P et on en déduit : $D = P^\perp = \left(\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Voyons comment ce vecteur va nous permettre de calculer s_D.

La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) \in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right) \in D^\perp$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) - s_D(x, y, z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x, y, z) - s_D(x, y, z), \vec{n} \rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle = \langle s_D(x, y, z), \vec{n} \rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x, y, z) + s_D(x, y, z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle + \langle s_D(x, y, z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle + \langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{\langle (x, y, z), \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.\end{aligned}$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-x+2\,y-z}{6}\cdot(-1,\,2,\,-1) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{3}\left(-2\,x-2\,y+z,\; -2\,x+y-2\,z,\; x-2\,y-2\,z\right). \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 96. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur $\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit : ← page 10

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{3\,x+86\,y}{7405}\cdot(3,\,86,\,0).$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{7405}\begin{pmatrix} 9 & 258 & 0 \\ 258 & 7396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 97. On pourrait « tricher » et traiter cet exercice en se ramenant à la projection orthogonale p sur P (pour laquelle nous avons de nombreuses méthodes de calcul), en se souvenant que l'on a : $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Mais nous allons traiter l'exercice sans cet artifice, grâce aux propriétés des symétries. Notons d'abord que si l'on note s_D la projection orthogonale sur la droite $D = P^{\perp}$, alors on a : $s = -s_D$ (vérification facile à partir de la définition d'une symétrie orthogonale). Par conséquent, déterminer $s(x,y,z)$ se résume à déterminer $s_D(x,y,z)$. Cette réduction est intéressante parce qu'il est facile d'étudier une symétrie orthogonale par rapport à une droite. La droite D est dirigée par $\vec{n}$, vu que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Comme s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D, on sait que l'on a : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)\in D$, et : $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)\in D^{\perp}$. Traduisons ces deux propriétés. La deuxième implique en particulier que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)-s_D(x,y,z)\right)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ puisqu'il dirige cette droite, donc : $\langle (x,y,z)-s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle = 0$, ce dont on déduit : $\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle = \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle$. La première propriété implique que $\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, et plus précisément on sait que la projection sur une droite est donnée par un produit scalaire avec un vecteur directeur unitaire. ← page 10

Donc :

$$\frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right) = \left\langle \frac{1}{2}\left((x,y,z)+s_D(x,y,z)\right), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \vec{n} = \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle s_D(x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$
$$= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle + \langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{2\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$
$$= \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

En isolant s_D dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} s_D(x,y,z) &= 2\frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - (x,y,z) \\ &= 2\frac{-x-2\,y}{5}\cdot(-1,\,-2,\,0) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{5}\left(-3\,x+4\,y,\; 4\,x+3\,y,\; -5\,z\right). \end{aligned}$$

On en déduit $s(x,y,z)$ en se souvenant que : $s(x,y,z) = -s_D(x,y,z)$, comme rappelé plus haut. Cette expression nous permet de calculer $s(\vec{i})$, et $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de s dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 98. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : ← page 10

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{x+y}{2}\cdot(1,\,1,\,0) \\ &= \frac{1}{2}\left(x-y,\; -x+y,\; 2\,z\right). \end{aligned}$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 99. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que la projection orthogonale de (x,y,z) sur la droite D est donnée par le produit scalaire de (x,y,z) par un vecteur directeur *unitaire* de D. Le vecteur ← page 10

$\vec{n}$ dirige cette droite. Il n'est certes pas unitaire, mais il suffit de le diviser par sa norme pour en déduire un vecteur directeur unitaire. On en déduit :

$$p(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{4\,x+y+z}{18} \cdot (4,\,1,\,1)\,.$$

Cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.

Corrigé 100. Nous illustrons trois façons de calculer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (même si la dernière a largement notre préférence pour sa simplicité) : ← page 10

— on écrit que le vecteur $p(x,y,z)$ est l'unique vecteur à vérifier : $p(x,y,z) \in P$, et : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$; la première condition revient à dire qu'on peut écrire $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et la seconde condition équivaut à : $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0$, $\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0$; ces deux égalités donnent un système vérifié par (a,b), qu'on résout, et on en déduit une expression explicite $p(x,y,z)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$;

— on exprime $p(x,y,z)$ dans une base orthonormée explicite $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; dans une telle base, on a simplement : $p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\, \vec{v}_2$;

— on trouve un vecteur normal $\vec{n}$ de P, en trouvant un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ vérifiant $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{n}, \vec{e}_2\rangle = 0$, et on conclut en rappelant que l'on a $p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z),\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Première méthode. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(x,y,z)$ appartient à P, qui est engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. De plus : $(x,y,z) - p(x,y,z) \in P^{\perp}$, ce qui signifie que l'on a en particulier :

$$\langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_1\rangle = 0, \quad \langle (x,y,z) - p(x,y,z), \vec{e}_2\rangle = 0.$$

En remplaçant $p(x,y,z)$ par son expression en fonction de a, b, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on voit que ces deux égalités équivalent à :

$$\begin{cases} a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_1\rangle \\ a\,\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle & + & b\,\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle & = & \langle (x,y,z), \vec{e}_2\rangle \end{cases}$$

Or : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = 82$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 341$, et : $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = 18433$. Ainsi le système ci-dessus équivaut à :

$$\begin{cases} 82\,a + 341\,b & = & -9\,y + z \\ 341\,a + 18433\,b & = & -90\,x - 27\,y + 98\,z \end{cases}$$

On résout facilement ce système, et on obtient : $a = \frac{682}{31005}\,x - \frac{3482}{31005}\,y - \frac{37}{3445}\,z$, $b = -\frac{164}{31005}\,x + \frac{19}{31005}\,y + \frac{19}{3445}\,z$. On peut enfin calculer $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \frac{1}{689}\,(328\,x - 38\,y - 342\,z,\ -38\,x + 685\,y - 36\,z,\ -342\,x - 36\,y + 365\,z)\,.$$

Deuxième méthode. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pour obtenir une base orthonormée de P. On obtient :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1 = \frac{1}{82}\sqrt{82}\,(0,\,-9,\,1)\,, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1 = \left(-90,\, \frac{855}{82},\, \frac{7695}{82}\right),$$

puis :

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 = \left(-\frac{164}{689}\sqrt{\frac{689}{82}},\ \frac{19}{689}\sqrt{\frac{689}{82}},\ \frac{171}{689}\sqrt{\frac{689}{82}}\right)$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ainsi construite est une base orthonormée de P. On en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \langle (x,y,z), \vec{v}_1\rangle\, \vec{v}_1 + \langle (x,y,z), \vec{v}_2\rangle\, \vec{v}_2.$$

En calculant les produits scalaires ci-dessus et en simplifiant le tout, on en déduit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = \frac{1}{689}\left(328\,x - 38\,y - 342\,z,\ -38\,x + 685\,y - 36\,z,\ -342\,x - 36\,y + 365\,z\right)$$

Troisième méthode. Trouvons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit normal à P. Pour cela, on doit avoir : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$, et : $\langle \vec{n}, \vec{e}_1\rangle = 0$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -9\,b + c & = & 0 \\ -90\,a - 27\,b + 98\,c & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution (ce qui n'est pas nécessaire si vous trouvez une solution non nulle à l'œil nu), on trouve que le triplet $(a,b,c) = (-19,\ -2,\ -18)$ convient. Ainsi $\vec{n} = (-19,\ -2,\ -18)$ est un vecteur normal de P et on sait exprimer la projection orthogonale sur P grâce à lui. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}\right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

(on soustrait à (x,y,z) sa projection orthogonale sur la droite dirigée par un vecteur normal de P, dont on sait qu'on l'obtient en faisant un produit scalaire par un vecteur unitaire, c'est-à-dire ici $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{-19\,x - 2\,y - 18\,z}{689} \cdot (-19,\ -2,\ -18) \\ &= \frac{1}{689}\left(328\,x - 38\,y - 342\,z,\ -38\,x + 685\,y - 36\,z,\ -342\,x - 36\,y + 365\,z\right). \end{aligned}$$

Peu importe l'approche choisie, on peut conclure : cela nous permet aisément de calculer $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$, puis d'en déduire la matrice de p dans la base canonique. On trouve alors :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(p) = \frac{1}{689}\begin{pmatrix} 328 & -38 & -342 \\ -38 & 685 & -36 \\ -342 & -36 & 365 \end{pmatrix}.$$

Notez bien que vous devez obtenir une matrice symétrique.