Produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

Mise en pratique de la définition d'un produit scalaire. Exemple dans $\mathbb{R}^2$. Pour montrer le caractère défini du produit scalaire, mes documents *Méthodes* peuvent vous aider (en cas de blocage).

Exercice 1. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 12

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\,x_1x_2 - 3\,x_2y_1 - 3\,x_1y_2 + 36\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 12

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\,x_1x_2 - 2\,x_2y_1 - 2\,x_1y_2 + 5\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 13

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 14

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 15

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 15

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 16

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 17

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 4\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 18

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 18

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + 3\, x_2 y_1 + 3\, x_1 y_2 + 24\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 19

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 36\, x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 20

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 21

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3\, x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 22

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 7\, x_1 x_2 + 2\, x_2 y_1 + 2\, x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 22

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 23

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 9\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 24

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 - 2\, x_2 y_1 - 2\, x_1 y_2 + 9\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 25

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 42\, x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 2\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 26

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 5\, x_1 x_2 - 2\, x_2 y_1 - 2\, x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 26

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 3\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 7\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 21. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 27

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 11\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 22. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 28

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 4\,x_1x_2 + 3\,x_2y_1 + 3\,x_1y_2 + 5\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 29

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 3\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 6\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 30

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 3\,x_1x_2 - 2\,x_2y_1 - 2\,x_1y_2 + 3\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 25. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 30

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 26. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 31

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 60\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 27. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 32

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 28. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 33

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 85\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 14\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 29. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 34

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + 4\,x_2y_1 + 4\,x_1y_2 + 26\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 30. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 34

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 + 3\,x_2y_1 + 3\,x_1y_2 + 9\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 31. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 35

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 32. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 36

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - 2\,x_2y_1 - 2\,x_1y_2 + 6\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 33. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 37

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 11\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 34. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 38

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 11\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 35. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 38

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 36. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 39

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 37. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 40

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 4\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 38. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 41

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 4\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 39. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 41

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 9\, x_1 x_2 - 2\, x_2 y_1 - 2\, x_1 y_2 + 260\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 40. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 42

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + 2\, x_2 y_1 + 2\, x_1 y_2 + 18\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 41. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 43

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 42. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 44

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 15\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 43. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 45

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3\, x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 44. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 45

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 11\, x_1 x_2 + 3\, x_2 y_1 + 3\, x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 45. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 46

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3\, x_1 x_2 + 2\, x_2 y_1 + 2\, x_1 y_2 + 4\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 46. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 47

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 6\, x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 47. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 48

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 48. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 49

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 19\, x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 49. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 49

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 10\,x_1x_2 - 4\,x_2y_1 - 4\,x_1y_2 + 3\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 50. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 50

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 51. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 51

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 5\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 52. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 52

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 8\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 5\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 53. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 53

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 12\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 54. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 53

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 5\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 55. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 54

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 11\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 56. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 55

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 57. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 56

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 58. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 56

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\, y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 59. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 57

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 4\, y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 60. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 58

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\, y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 61. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 59

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 62. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 60

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 15\, x_1x_2 + 3\, x_2y_1 + 3\, x_1y_2 + 4\, y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 63. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 60

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 11\, x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 64. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 61

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 6\, x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 5\, y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 65. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 62

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3\, y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 66. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 63

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 67. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 64

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 8\, y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 68. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 64

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 8\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 69. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 65

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 70. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 66

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 4\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 18\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 71. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 67

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 12\,x_1x_2 + 2\,x_2y_1 + 2\,x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 72. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 67

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 73. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 68

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 74. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 69

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 6\,x_1x_2 + 6\,x_2y_1 + 6\,x_1y_2 + 11\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 75. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 70

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 5\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 76. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 70

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 77. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 71

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 10\,x_1x_2 - 3\,x_2y_1 - 3\,x_1y_2 + y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 78. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 72

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 8\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 79. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 73

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 87\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 80. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 74

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + 2\, x_2 y_1 + 2\, x_1 y_2 + 99\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 81. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 74

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 82. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 75

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 16\, x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 83. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 76

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 84. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 77

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 15\, x_1 x_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 5\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 85. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 77

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 6\, x_1 x_2 - 2\, x_2 y_1 - 2\, x_1 y_2 + 2\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 86. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 78

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 87. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 79

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - 8\,x_2y_1 - 8\,x_1y_2 + 80\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 88. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 80

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 89. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 81

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 90. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 81

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - 2\,x_2y_1 - 2\,x_1y_2 + 20\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 91. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 82

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 92. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 83

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 5\,x_1x_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 93. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 84

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 5\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 94. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 85

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 295\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 95. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 85

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 6\,x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 96. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose : → page 86

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 7\,y_1y_2.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 97. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 87

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 3\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 98. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 88

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 4\, x_1 x_2 + 2\, x_2 y_1 + 2\, x_1 y_2 + 2\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 99. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 89

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 11\, x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 100. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : → page 89

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2\, x_1 x_2 - 2\, x_2 y_1 - 2\, x_1 y_2 + 92\, y_1 y_2.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé 1. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 6\,xy + 36\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 6\,xy + 36\,y^2 = 2\left(x^2 - 3\,xy\right) + 36y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{3}{2}\,xy + \left(\frac{3}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\,y\right)^2\right) + 36y^2\\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\,y\right)^2 - \frac{9}{2}\,y^2 + 36y^2\\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\,y\right)^2 + \frac{63}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-6\,xy + 36\,y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 6\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{7}{4}x^2 + 36\left(-\frac{1}{12}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -3\\ -3 & 36\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3\\ -3 & 36\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{298} + 19, -\sqrt{298} + 19\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 2. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 4\,xy + 5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 4\,xy + 5\,y^2 = 2\left(x^2 - 2\,xy\right) + 5y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 5y^2\\ &= 2\,(x-y)^2 - 2\,y^2 + 5y^2\\ &= 2\,(x-y)^2 + 3y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\,xy + 5\,y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{6}{5}x^2 + 5\left(-\frac{2}{5}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 6\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 3. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 2\,y^2 = \left(x^2 - 2\,xy\right) + 2y^2 &= \left(x^2 - 2\times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 2y^2 \\ &= (x-y)^2 - y^2 + 2y^2 \\ &= (x-y)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas

éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 4. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle (x,y),(x,y) \rangle = 3\,x^2 + 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y) \rangle = 3\,x^2 + 2\,xy + y^2 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}\,xy\right) + y^2 &= 3\left(x^2 + 2 \times \frac{1}{3}\,xy + \left(\frac{1}{3}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\,y\right)^2 - \frac{1}{3}\,y^2 + y^2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\,y\right)^2 + \frac{2}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y) \rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + y^2$ plutôt que $3\,x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y) \rangle = 2x^2 + (x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \sqrt{2} + 2, -\sqrt{2} + 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini

de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 5. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+2y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+2y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+2y^2\\ &= (x+y)^2+y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle=0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle=0 \iff (x+y)^2=0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+2\,y^2$ plutôt que $x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2+2\left(\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 6. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+2y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+2y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+2y^2\\ &= (x+y)^2+y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 7. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 2\,y^2 = \left(x^2 - 2\,xy\right) + 2y^2 &= \left(x^2 - 2\times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 2y^2 \\ &= (x-y)^2 - y^2 + 2y^2 \\ &= (x-y)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas

éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 8. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 4\,x^2 - 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = 4\,x^2 - 2\,xy + 2\,y^2 = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\,xy\right) + 2y^2 &= 4\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{4}\,xy + \left(\frac{1}{4}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\,y\right)^2\right) + 2y^2 \\ &= 4\left(x - \frac{1}{4}\,y\right)^2 - \frac{1}{4}\,y^2 + 2y^2 \\ &= 4\left(x - \frac{1}{4}\,y\right)^2 + \frac{7}{4} y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{4}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $4\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = \frac{7}{2} x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \sqrt{2} + 3, -\sqrt{2} + 3 \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini

de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 9. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 1

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+2y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+2y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+2y^2\\ &= (x+y)^2+y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2=0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+2\,y^2$ plutôt que $x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2+2\left(\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 10. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+6\,xy+24\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+6\,xy+24\,y^2 = \left(x^2+6\,xy\right)+24y^2 &= \left(x^2+2\times 3\,xy+(3\,y)^2-(3\,y)^2\right)+24y^2\\ &= (x+3\,y)^2-9\,y^2+24y^2\\ &= (x+3\,y)^2+15y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+3\,y)^2=0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $6\,xy+24\,y^2$ plutôt que $x^2+6\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{5}{8}x^2+24\left(\frac{1}{8}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}1&3\\3&24\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&24\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{565}+\frac{25}{2},\frac{1}{2}\sqrt{565}+\frac{25}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 11. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 36\,x^2-2\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 36\,x^2-2\,xy+y^2 = 36\left(x^2-\frac{1}{18}\,xy\right)+y^2 &= 36\left(x^2-2\times\frac{1}{36}\,xy+\left(\frac{1}{36}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{36}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 36\left(x-\frac{1}{36}\,y\right)^2-\frac{1}{36}\,y^2+y^2\\ &= 36\left(x-\frac{1}{36}\,y\right)^2+\frac{35}{36}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{36}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $36\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 35x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 36 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 36 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{1229} + \frac{37}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{1229} + \frac{37}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 12. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + y^2 &= 2\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle =$

$x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 13. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2 + 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2 + 2\,xy + y^2 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}\,xy\right) + y^2 &= 3\left(x^2 + 2 \times \frac{1}{3}\,xy + \left(\frac{1}{3}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\,y\right)^2 - \frac{1}{3}\,y^2 + y^2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\,y\right)^2 + \frac{2}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x + \frac{1}{3}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + y^2$ plutôt que $3\,x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2x^2 + (x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \sqrt{2} + 2, -\sqrt{2} + 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 14. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 7\,x^2 + 4\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = 7\,x^2 + 4\,xy + y^2 = 7\left(x^2 + \frac{4}{7}\,xy\right) + y^2 &= 7\left(x^2 + 2 \times \frac{2}{7}\,xy + \left(\frac{2}{7}\,y\right)^2 - \left(\frac{2}{7}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 7\left(x + \frac{2}{7}\,y\right)^2 - \frac{4}{7}\,y^2 + y^2 \\ &= 7\left(x + \frac{2}{7}\,y\right)^2 + \frac{3}{7}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{2}{7}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x, y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $4\,xy + y^2$ plutôt que $7\,x^2 + 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 3x^2 + (2\,x + y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{13} + 4, -\sqrt{13} + 4\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 15. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + y^2\\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + y^2\\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\,\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\,\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 16. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 9\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 9\,y^2 = \left(x^2 - 2\,xy\right) + 9y^2 &= \left(x^2 - 2\times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 9y^2\\ &= (x-y)^2 - y^2 + 9y^2\\ &= (x-y)^2 + 8y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 9\,y^2$ plutôt que $x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{8}{9}x^2 + 9\left(-\frac{1}{9}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{17}+5, -\sqrt{17}+5\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 17. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 4\,xy + 9\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 4\,xy + 9\,y^2 = \left(x^2 - 4\,xy\right) + 9y^2 &= \left(x^2 - 2\times 2\,xy + (2\,y)^2 - (2\,y)^2\right) + 9y^2 \\ &= (x-2\,y)^2 - 4\,y^2 + 9y^2 \\ &= (x-2\,y)^2 + 5y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-2\,y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\,xy + 9\,y^2$ plutôt que $x^2 - 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{5}{9}x^2 + 9\left(-\frac{2}{9}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a :

$\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{2\sqrt{5}+5, -2\sqrt{5}+5\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 18. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 42\,x^2 - 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 42\,x^2 - 2\,xy + 2\,y^2 = 42\left(x^2 - \frac{1}{21}\,xy\right) + 2y^2 &= 42\left(x^2 - 2\times\frac{1}{42}\,xy + \left(\frac{1}{42}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{42}\,y\right)^2\right) + 2y^2 \\ &= 42\left(x - \frac{1}{42}\,y\right)^2 - \frac{1}{42}\,y^2 + 2y^2 \\ &= 42\left(x - \frac{1}{42}\,y\right)^2 + \frac{83}{42}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{42}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $42\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{83}{2}x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 42 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 42 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{401}+22, -\sqrt{401}+22\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 19. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 2

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 5\, x^2 - 4\, xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = 5\, x^2 - 4\, xy + y^2 = 5 \left(x^2 - \frac{4}{5}\, xy \right) + y^2 &= 5 \left(x^2 - 2 \times \frac{2}{5}\, xy + \left(\frac{2}{5}\, y \right)^2 - \left(\frac{2}{5}\, y \right)^2 \right) + y^2 \\ &= 5 \left(x - \frac{2}{5}\, y \right)^2 - \frac{4}{5}\, y^2 + y^2 \\ &= 5 \left(x - \frac{2}{5}\, y \right)^2 + \frac{1}{5} y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff \left(x - \frac{2}{5}\, y \right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\, xy + y^2$ plutôt que $5\, x^2 - 4\, xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + (-2\, x + y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ 2\sqrt{2} + 3, -2\sqrt{2} + 3 \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 20. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 3\, x^2 + 2\, xy + 7\, y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2+2\,xy+7\,y^2 = 3\left(x^2+\frac{2}{3}\,xy\right)+7y^2 &= 3\left(x^2+2\times\frac{1}{3}\,xy+\left(\frac{1}{3}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{3}\,y\right)^2\right)+7y^2\\ &= 3\left(x+\frac{1}{3}\,y\right)^2-\frac{1}{3}\,y^2+7y^2\\ &= 3\left(x+\frac{1}{3}\,y\right)^2+\frac{20}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{1}{3}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+7\,y^2$ plutôt que $3\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{20}{7}x^2+7\left(\frac{1}{7}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}3&1\\1&7\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&7\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\sqrt{5}+5,-\sqrt{5}+5\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 21. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+11\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+11\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+11y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+11y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+11y^2\\ &= (x+y)^2+10y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 11\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{10}{11}x^2 + 11\left(\frac{1}{11}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\sqrt{26} + 6, \sqrt{26} + 6\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 22. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 4\,x^2 + 6\,xy + 5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 4\,x^2 + 6\,xy + 5\,y^2 = 4\left(x^2 + \frac{3}{2}\,xy\right) + 5y^2 &= 4\left(x^2 + 2 \times \frac{3}{4}\,xy + \left(\frac{3}{4}\,y\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\,y\right)^2\right) + 5y^2 \\ &= 4\left(x + \frac{3}{4}\,y\right)^2 - \frac{9}{4}\,y^2 + 5y^2 \\ &= 4\left(x + \frac{3}{4}\,y\right)^2 + \frac{11}{4}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x + \frac{3}{4}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $6\,xy + 5\,y^2$ plutôt que $4\,x^2 + 6\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{11}{5}x^2 + 5\left(\frac{3}{5}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas

éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{9}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 23. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2 - 2\,xy + 6\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2 - 2\,xy + 6\,y^2 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}\,xy\right) + 6y^2 &= 3\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{3}\,xy + \left(\frac{1}{3}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\,y\right)^2\right) + 6y^2 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\,y\right)^2 - \frac{1}{3}\,y^2 + 6y^2 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\,y\right)^2 + \frac{17}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 6\,y^2$ plutôt que $3\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{17}{6}x^2 + 6\left(-\frac{1}{6}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{9}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini

de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 24. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2 - 4\,xy + 3\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2 - 4\,xy + 3\,y^2 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}\,xy\right) + 3y^2 &= 3\left(x^2 - 2\times\frac{2}{3}\,xy + \left(\frac{2}{3}\,y\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\,y\right)^2\right) + 3y^2\\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\,y\right)^2 - \frac{4}{3}\,y^2 + 3y^2\\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\,y\right)^2 + \frac{5}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{2}{3}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\,xy + 3\,y^2$ plutôt que $3\,x^2 - 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{5}{3}x^2 + 3\left(-\frac{2}{3}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,5\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 25. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 + 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+2\,y^2 = 2\left(x^2+xy\right)+2y^2 &= 2\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\,xy+\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right)+2y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\frac{1}{2}\,y^2+2y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2+\frac{3}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+2\,y^2$ plutôt que $2\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{3}{2}x^2+2\left(\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{1,3\}\subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 26. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 60\,x^2+2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 60\,x^2+2\,xy+2\,y^2 = 60\left(x^2+\frac{1}{30}\,xy\right)+2y^2 &= 60\left(x^2+2\times\frac{1}{60}\,xy+\left(\frac{1}{60}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{60}\,y\right)^2\right)+2y^2\\ &= 60\left(x+\frac{1}{60}\,y\right)^2-\frac{1}{60}\,y^2+2y^2\\ &= 60\left(x+\frac{1}{60}\,y\right)^2+\frac{119}{60}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{1}{60}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+2\,y^2$ plutôt que $60\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{119}{2}x^2+2\left(\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 60 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 60 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\sqrt{842}+31, \sqrt{842}+31\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 27. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2-2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2-2\,xy+2\,y^2 = \left(x^2-2\,xy\right)+2y^2 &= \left(x^2-2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+2y^2\\ &= (x-y)^2-y^2+2y^2\\ &= (x-y)^2+y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-y)^2=0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy+2\,y^2$ plutôt que $x^2-2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2+2\left(-\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas

éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 28. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 85\, x^2 - 2\, xy + 14\, y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\langle (x, y), (x, y) \rangle = 85\, x^2 - 2\, xy + 14\, y^2 = 85 \left(x^2 - \frac{2}{85}\, xy \right) + 14y^2 &= 85 \left(x^2 - 2 \times \frac{1}{85}\, xy + \left(\frac{1}{85}\, y \right)^2 - \left(\frac{1}{85}\, y \right)^2 \right) + 1 \\
&= 85 \left(x - \frac{1}{85}\, y \right)^2 - \frac{1}{85}\, y^2 + 14y^2 \\
&= 85 \left(x - \frac{1}{85}\, y \right)^2 + \frac{1189}{85} y^2.
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{85}\, y \right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\, xy + 14\, y^2$ plutôt que $85\, x^2 - 2\, xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = \frac{1189}{14} x^2 + 14 \left(-\frac{1}{14}\, x + y \right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 85 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 85 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5045} + \frac{99}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5045} + \frac{99}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 29. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 3

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 8\,xy + 26\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 8\,xy + 26\,y^2 = \left(x^2+8\,xy\right) + 26y^2 &= \left(x^2 + 2\times 4\,xy + (4\,y)^2 - (4\,y)^2\right) + 26y^2\\ &= (x+4\,y)^2 - 16\,y^2 + 26y^2\\ &= (x+4\,y)^2 + 10y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x+4\,y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $8\,xy + 26\,y^2$ plutôt que $x^2 + 8\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{5}{13}x^2 + 26\left(\frac{2}{13}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 26 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 26 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{689} + \frac{27}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{689} + \frac{27}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 30. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 + 6\,xy + 9\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+6\,xy+9\,y^2 = 2\left(x^2+3\,xy\right)+9y^2 &= 2\left(x^2+2\times\frac{3}{2}\,xy+\left(\frac{3}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{3}{2}\,y\right)^2\right)+9y^2\\ &= 2\left(x+\frac{3}{2}\,y\right)^2-\frac{9}{2}\,y^2+9y^2\\ &= 2\left(x+\frac{3}{2}\,y\right)^2+\frac{9}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $6\,xy+9\,y^2$ plutôt que $2\,x^2+6\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+9\left(\frac{1}{3}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\,\sqrt{85}+\frac{11}{2},-\frac{1}{2}\,\sqrt{85}+\frac{11}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 31. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+2y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+2y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+2y^2\\ &= (x+y)^2+y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 32. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 4\,xy + 6\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 4\,xy + 6\,y^2 = \left(x^2 - 4\,xy\right) + 6y^2 &= \left(x^2 - 2 \times 2\,xy + (2\,y)^2 - (2\,y)^2\right) + 6y^2 \\ &= (x - 2\,y)^2 - 4\,y^2 + 6y^2 \\ &= (x - 2\,y)^2 + 2y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x - 2\,y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\,xy + 6\,y^2$ plutôt que $x^2 - 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{3}x^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a :

$\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{7}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 33. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 11\left(x^2 - \frac{2}{11}\,xy\right) + y^2 &= 11\left(x^2 - 2\times\frac{1}{11}\,xy + \left(\frac{1}{11}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{11}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 11\left(x - \frac{1}{11}\,y\right)^2 - \frac{1}{11}\,y^2 + y^2 \\ &= 11\left(x - \frac{1}{11}\,y\right)^2 + \frac{10}{11}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{11}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $11\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 10x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\sqrt{26} + 6, \sqrt{26} + 6 \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 34. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2+2\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2+2\,xy+y^2 = 11\left(x^2+\frac{2}{11}\,xy\right)+y^2 &= 11\left(x^2+2\times\frac{1}{11}\,xy+\left(\frac{1}{11}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{11}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 11\left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2-\frac{1}{11}\,y^2+y^2\\ &= 11\left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2+\frac{10}{11}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+y^2$ plutôt que $11\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 10x^2+(x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}11&1\\1&1\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}11&1\\1&1\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\sqrt{26}+6,\sqrt{26}+6\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 35. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+2y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+2y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+2y^2\\ &= (x+y)^2+y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 36. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + 4\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + 4\,y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + 4y^2 &= 2\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + 4y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + 4y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{7}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 4\,y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{7}{4}x^2 + 4\left(-\frac{1}{4}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{2}+3, -\sqrt{2}+3\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 37. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 4\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 4\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\,xy\right) + y^2 &= 4\left(x^2 - 2\times\frac{1}{4}\,xy + \left(\frac{1}{4}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 4\left(x - \frac{1}{4}\,y\right)^2 - \frac{1}{4}\,y^2 + y^2 \\ &= 4\left(x - \frac{1}{4}\,y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{4}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $4\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\frac{1}{2}\,\sqrt{13} + \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\,\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 38. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 4

$$\langle(x, y),(x, y)\rangle = 4\,x^2 + 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x, y),(x, y)\rangle = 4\,x^2 + 2\,xy + y^2 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}\,xy\right) + y^2 &= 4\left(x^2 + 2\times\frac{1}{4}\,xy + \left(\frac{1}{4}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\,y\right)^2\right) + y^2\\ &= 4\left(x + \frac{1}{4}\,y\right)^2 - \frac{1}{4}\,y^2 + y^2\\ &= 4\left(x + \frac{1}{4}\,y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x, y),(x, y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x, y),(x, y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x, y),(x, y)\rangle = 0 \iff \left(x + \frac{1}{4}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + y^2$ plutôt que $4\,x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x, y),(x, y)\rangle = 3x^2 + (x + y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x, y),(x, y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\frac{1}{2}\,\sqrt{13} + \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\,\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 39. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle(x, y),(x, y)\rangle = 9\,x^2 - 4\,xy + 260\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 9\,x^2 - 4\,xy + 260\,y^2 = 9\left(x^2 - \frac{4}{9}\,xy\right) + 260y^2 &= 9\left(x^2 - 2\times\frac{2}{9}\,xy + \left(\frac{2}{9}\,y\right)^2 - \left(\frac{2}{9}\,y\right)^2\right) + 260y^2\\ &= 9\left(x - \frac{2}{9}\,y\right)^2 - \frac{4}{9}\,y^2 + 260y^2\\ &= 9\left(x - \frac{2}{9}\,y\right)^2 + \frac{2336}{9}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{2}{9}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\,xy + 260\,y^2$ plutôt que $9\,x^2 - 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{584}{65}x^2 + 260\left(-\frac{1}{130}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 260 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 260 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\frac{1}{2}\,\sqrt{63017} + \frac{269}{2}, \frac{1}{2}\,\sqrt{63017} + \frac{269}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 40. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 4\,xy + 18\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 4\,xy + 18\,y^2 = \left(x^2 + 4\,xy\right) + 18y^2 &= \left(x^2 + 2\times 2\,xy + (2\,y)^2 - (2\,y)^2\right) + 18y^2\\ &= (x + 2\,y)^2 - 4\,y^2 + 18y^2\\ &= (x + 2\,y)^2 + 14y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+2\,y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $4\,xy + 18\,y^2$ plutôt que $x^2 + 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{7}{9}x^2 + 18\left(\frac{1}{9}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).
Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{305} + \frac{19}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{305} + \frac{19}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 41. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + y^2 &= 2\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas

éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 42. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + 2\,xy + 15\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + 2\,xy + 15\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 15y^2 &= \left(x^2 + 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 15y^2 \\ &= (x + y)^2 - y^2 + 15y^2 \\ &= (x + y)^2 + 14y^2. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff (x + y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 15\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = \frac{14}{15}x^2 + 15\left(\frac{1}{15}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -5\sqrt{2} + 8, 5\sqrt{2} + 8 \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 43. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2-2\,xy+4\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2-2\,xy+4\,y^2 = 3\left(x^2-\frac{2}{3}\,xy\right)+4y^2 &= 3\left(x^2-2\times\frac{1}{3}\,xy+\left(\frac{1}{3}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{3}\,y\right)^2\right)+4y^2\\ &= 3\left(x-\frac{1}{3}\,y\right)^2-\frac{1}{3}\,y^2+4y^2\\ &= 3\left(x-\frac{1}{3}\,y\right)^2+\frac{11}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x-\frac{1}{3}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy+4\,y^2$ plutôt que $3\,x^2-2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{11}{4}x^2+4\left(-\frac{1}{4}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}3&-1\\-1&4\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&4\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\,\sqrt{5}+\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\,\sqrt{5}+\frac{7}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 44. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2+6\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2+6\,xy+y^2 = 11\left(x^2+\frac{6}{11}\,xy\right)+y^2 &= 11\left(x^2+2\times\frac{3}{11}\,xy+\left(\frac{3}{11}\,y\right)^2-\left(\frac{3}{11}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 11\left(x+\frac{3}{11}\,y\right)^2-\frac{9}{11}\,y^2+y^2\\ &= 11\left(x+\frac{3}{11}\,y\right)^2+\frac{2}{11}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{3}{11}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $6\,xy+y^2$ plutôt que $11\,x^2+6\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2x^2+(3\,x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}11&3\\3&1\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}11&3\\3&1\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\sqrt{34}+6,\sqrt{34}+6\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 45. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2+4\,xy+4\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3\,x^2+4\,xy+4\,y^2 = 3\left(x^2+\frac{4}{3}\,xy\right)+4y^2 &= 3\left(x^2+2\times\frac{2}{3}\,xy+\left(\frac{2}{3}\,y\right)^2-\left(\frac{2}{3}\,y\right)^2\right)+4y^2\\ &= 3\left(x+\frac{2}{3}\,y\right)^2-\frac{4}{3}\,y^2+4y^2\\ &= 3\left(x+\frac{2}{3}\,y\right)^2+\frac{8}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{2}{3}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $4\,xy+4\,y^2$ plutôt que $3\,x^2+4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2x^2+4\left(\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{7}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 46. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2-2\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2-2\,xy+y^2 = 6\left(x^2-\frac{1}{3}\,xy\right)+y^2 &= 6\left(x^2-2\times\frac{1}{6}\,xy+\left(\frac{1}{6}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{6}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 6\left(x-\frac{1}{6}\,y\right)^2-\frac{1}{6}\,y^2+y^2\\ &= 6\left(x-\frac{1}{6}\,y\right)^2+\frac{5}{6}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x-\frac{1}{6}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $6\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 5x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{29} + \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{29} + \frac{7}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 47. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 2y^2 &= \left(x^2 + 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 2y^2 \\ &= (x+y)^2 - y^2 + 2y^2 \\ &= (x+y)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini

de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 48. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 5

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 19\, x^2 + 2\, xy + 2\, y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = 19\, x^2 + 2\, xy + 2\, y^2 = 19 \left(x^2 + \frac{2}{19}\, xy \right) + 2y^2 &= 19 \left(x^2 + 2 \times \frac{1}{19}\, xy + \left(\frac{1}{19}\, y \right)^2 - \left(\frac{1}{19}\, y \right)^2 \right) + 2y^2 \\ &= 19 \left(x + \frac{1}{19}\, y \right)^2 - \frac{1}{19}\, y^2 + 2y^2 \\ &= 19 \left(x + \frac{1}{19}\, y \right)^2 + \frac{37}{19} y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff \left(x + \frac{1}{19}\, y \right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\, xy + 2\, y^2$ plutôt que $19\, x^2 + 2\, xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = \frac{37}{2} x^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\, x + y \right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{293} + \frac{21}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{293} + \frac{21}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 49. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 10\, x^2 - 8\, xy + 3\, y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 10\,x^2 - 8\,xy + 3\,y^2 = 10\left(x^2 - \frac{4}{5}\,xy\right) + 3y^2 &= 10\left(x^2 - 2\times\frac{2}{5}\,xy + \left(\frac{2}{5}\,y\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\,y\right)^2\right) + 3y^2\\ &= 10\left(x - \frac{2}{5}\,y\right)^2 - \frac{8}{5}\,y^2 + 3y^2\\ &= 10\left(x - \frac{2}{5}\,y\right)^2 + \frac{7}{5}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{2}{5}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-8\,xy + 3\,y^2$ plutôt que $10\,x^2 - 8\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{14}{3}x^2 + 3\left(-\frac{4}{3}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\frac{1}{2}\,\sqrt{113} + \frac{13}{2}, \frac{1}{2}\,\sqrt{113} + \frac{13}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 50. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + 2\,y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + 2y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + 2y^2\\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + 2y^2\\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{3}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{3}{2}x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1,3\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 51. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + 5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + 5\,y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + 5y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + 5y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + 5y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{9}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy+5\,y^2$ plutôt que $2\,x^2-2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{9}{5}x^2+5\left(-\frac{1}{5}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{7}{2}\right\}\subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 52. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 8\,x^2+2\,xy+5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 8\,x^2+2\,xy+5\,y^2 = 8\left(x^2+\frac{1}{4}\,xy\right)+5y^2 &= 8\left(x^2+2\times\frac{1}{8}\,xy+\left(\frac{1}{8}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{8}\,y\right)^2\right)+5y^2\\ &= 8\left(x+\frac{1}{8}\,y\right)^2-\frac{1}{8}\,y^2+5y^2\\ &= 8\left(x+\frac{1}{8}\,y\right)^2+\frac{39}{8}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{8}\,y\right)^2=0 \text{ et } y^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+5\,y^2$ plutôt que $8\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{39}{5}x^2+5\left(\frac{1}{5}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 8 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 8 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{13}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{13}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 53. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 - 2\,xy + 12\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 - 2\,xy + 12\,y^2 = \left(x^2 - 2\,xy\right) + 12y^2 &= \left(x^2 - 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 12y^2 \\ &= (x - y)^2 - y^2 + 12y^2 \\ &= (x - y)^2 + 11y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff (x - y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 12\,y^2$ plutôt que $x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = \frac{11}{12}x^2 + 12\left(-\frac{1}{12}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{5}{2}\sqrt{5} + \frac{13}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{5} + \frac{13}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 54. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + 2\,xy + 5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+5\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+5y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+5y^2 \\ &= (x+y)^2-y^2+5y^2 \\ &= (x+y)^2+4y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+5\,y^2$ plutôt que $x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{4}{5}x^2+5\left(\frac{1}{5}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\sqrt{5}+3,\sqrt{5}+3\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 55. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+11\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+11\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+11y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+11y^2 \\ &= (x+y)^2-y^2+11y^2 \\ &= (x+y)^2+10y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 11\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{10}{11}x^2 + 11\left(\frac{1}{11}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\sqrt{26}+6, \sqrt{26}+6\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 56. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 57. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 6

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 - 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 - 2\,xy + 2\,y^2 = \left(x^2 - 2\,xy\right) + 2y^2 &= \left(x^2 - 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 2y^2 \\ &= (x - y)^2 - y^2 + 2y^2 \\ &= (x - y)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff (x - y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 58. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit ← page 6

de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 2y^2 &= \left(x^2 + 2\times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 2y^2 \\ &= (x+y)^2 - y^2 + 2y^2 \\ &= (x+y)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 59. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 4\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 4\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 4y^2 &= \left(x^2 + 2\times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 4y^2 \\ &= (x+y)^2 - y^2 + 4y^2 \\ &= (x+y)^2 + 3y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 4\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{3}{4}x^2 + 4\left(\frac{1}{4}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 60. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 2y^2 &= \left(x^2 + 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 2y^2 \\ &= (x+y)^2 - y^2 + 2y^2 \\ &= (x+y)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a :

$\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 61. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 62. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 15\,x^2+6\,xy+4\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = 15\,x^2+6\,xy+4\,y^2 = 15\left(x^2+\frac{2}{5}\,xy\right)+4y^2 &= 15\left(x^2+2\times\frac{1}{5}\,xy+\left(\frac{1}{5}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{5}\,y\right)^2\right)+4y^2\\ &= 15\left(x+\frac{1}{5}\,y\right)^2-\frac{3}{5}\,y^2+4y^2\\ &= 15\left(x+\frac{1}{5}\,y\right)^2+\frac{17}{5}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{5}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $6\,xy+4\,y^2$ plutôt que $15\,x^2+6\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{51}{4}x^2+4\left(\frac{3}{4}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}15&3\\3&4\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}15&3\\3&4\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{157}+\frac{19}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{157}+\frac{19}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 63. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2+2\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2+2\,xy+y^2 = 11\left(x^2+\frac{2}{11}\,xy\right)+y^2 &= 11\left(x^2+2\times\frac{1}{11}\,xy+\left(\frac{1}{11}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{11}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 11\left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2-\frac{1}{11}\,y^2+y^2\\ &= 11\left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2+\frac{10}{11}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+y^2$ plutôt que $11\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 10x^2+(x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix} 11 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 11 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\sqrt{26}+6,\sqrt{26}+6\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 64. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2+2\,xy+5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2+2\,xy+5\,y^2 = 6\left(x^2+\frac{1}{3}\,xy\right)+5y^2 &= 6\left(x^2+2\times\frac{1}{6}\,xy+\left(\frac{1}{6}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{6}\,y\right)^2\right)+5y^2\\ &= 6\left(x+\frac{1}{6}\,y\right)^2-\frac{1}{6}\,y^2+5y^2\\ &= 6\left(x+\frac{1}{6}\,y\right)^2+\frac{29}{6}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x + \frac{1}{6}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 5\,y^2$ plutôt que $6\,x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{29}{5}x^2 + 5\left(\frac{1}{5}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{11}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 65. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 3\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 3\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 3y^2 &= \left(x^2 + 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 3y^2 \\ &= (x+y)^2 - y^2 + 3y^2 \\ &= (x+y)^2 + 2y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 3\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{2}{3}x^2 + 3\left(\frac{1}{3}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a :

$\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{2}+2, -\sqrt{2}+2\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 66. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).
Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\,\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\,\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 67. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 7

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 8\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 8\,y^2 = \left(x^2 - 2\,xy\right) + 8y^2 &= \left(x^2 - 2\times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 8y^2\\ &= (x-y)^2 - y^2 + 8y^2\\ &= (x-y)^2 + 7y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 8\,y^2$ plutôt que $x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{7}{8}x^2 + 8\left(-\frac{1}{8}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 8\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 8\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{53} + \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{53} + \frac{9}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 68. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 8\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = 8\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 8\left(x^2 - \frac{1}{4}\,xy\right) + y^2 &= 8\left(x^2 - 2\times\frac{1}{8}\,xy + \left(\frac{1}{8}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\,y\right)^2\right) + y^2\\ &= 8\left(x - \frac{1}{8}\,y\right)^2 - \frac{1}{8}\,y^2 + y^2\\ &= 8\left(x - \frac{1}{8}\,y\right)^2 + \frac{7}{8}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{8}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + y^2$ plutôt que $8\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 7x^2 + (-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{53} + \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{53} + \frac{9}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 69. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 2\,xy + y^2 = 2\left(x^2 - xy\right) + y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy+y^2$ plutôt que $2\,x^2-2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+(-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right\}\subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 70. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 4\,x^2-2\,xy+18\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 4\,x^2-2\,xy+18\,y^2 = 4\left(x^2-\frac{1}{2}\,xy\right)+18y^2 &= 4\left(x^2-2\times\frac{1}{4}\,xy+\left(\frac{1}{4}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{4}\,y\right)^2\right)+18y^2\\ &= 4\left(x-\frac{1}{4}\,y\right)^2-\frac{1}{4}\,y^2+18y^2\\ &= 4\left(x-\frac{1}{4}\,y\right)^2+\frac{71}{4}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle=0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x-\frac{1}{4}\,y\right)^2=0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy+18\,y^2$ plutôt que $4\,x^2-2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{71}{18}x^2+18\left(-\frac{1}{18}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 4 & -1\\ -1 & 18\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 4 & -1\\ -1 & 18\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-5\sqrt{2}+11,5\sqrt{2}+11\right\}\subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 71. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 12\,x^2 + 4\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = 12\,x^2 + 4\,xy + 2\,y^2 = 12\left(x^2 + \frac{1}{3}\,xy\right) + 2y^2 &= 12\left(x^2 + 2 \times \frac{1}{6}\,xy + \left(\frac{1}{6}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\,y\right)^2\right) + 2y^2 \\ &= 12\left(x + \frac{1}{6}\,y\right)^2 - \frac{1}{3}\,y^2 + 2y^2 \\ &= 12\left(x + \frac{1}{6}\,y\right)^2 + \frac{5}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff \left(x + \frac{1}{6}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $4\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $12\,x^2 + 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 10x^2 + 2\,(x + y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{29} + 7, -\sqrt{29} + 7\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 72. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+2\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+2y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+2y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+2y^2\\ &= (x+y)^2+y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+2\,y^2$ plutôt que $x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2+2\left(\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 73. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+3\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+3\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+3y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+3y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+3y^2\\ &= (x+y)^2+2y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+3\,y^2$ plutôt que $x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{2}{3}x^2+3\left(\frac{1}{3}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).
Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\sqrt{2}+2,-\sqrt{2}+2\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 74. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2+12\,xy+11\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2+12\,xy+11\,y^2 = 6\left(x^2+2\,xy\right)+11y^2 &= 6\left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+11y^2\\ &= 6\,(x+y)^2-6\,y^2+11y^2\\ &= 6\,(x+y)^2+5y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle\geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle=0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle=0\iff(x+y)^2=0\text{ et }y^2=0\iff x=0\text{ et }y=0\iff(x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $12\,xy+11\,y^2$ plutôt que $6\,x^2+12\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{30}{11}x^2+11\left(\frac{6}{11}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).
Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}6&6\\6&11\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}6&6\\6&11\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{2,15\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 75. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 - 2\,xy + 5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 - 2\,xy + 5\,y^2 = \left(x^2 - 2\,xy\right) + 5y^2 &= \left(x^2 - 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 5y^2 \\ &= (x - y)^2 - y^2 + 5y^2 \\ &= (x - y)^2 + 4y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff (x - y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 5\,y^2$ plutôt que $x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = \frac{4}{5}x^2 + 5\left(-\frac{1}{5}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} + 3\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 76. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 2\,x^2 + 2\,xy + y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+y^2 = 2\left(x^2+xy\right)+y^2 &= 2\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\,xy+\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\frac{1}{2}\,y^2+y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2+\frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+y^2$ plutôt que $2\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+(x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\,\sqrt{5}+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\,\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 77. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 8

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 10\,x^2-6\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 10\,x^2-6\,xy+y^2 = 10\left(x^2-\frac{3}{5}\,xy\right)+y^2 &= 10\left(x^2-2\times\frac{3}{10}\,xy+\left(\frac{3}{10}\,y\right)^2-\left(\frac{3}{10}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 10\left(x-\frac{3}{10}\,y\right)^2-\frac{9}{10}\,y^2+y^2\\ &= 10\left(x-\frac{3}{10}\,y\right)^2+\frac{1}{10}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{3}{10}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-6\,xy + y^2$ plutôt que $10\,x^2 - 6\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + (-3\,x + y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).
Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{3}{2}\sqrt{13} + \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{13} + \frac{11}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 78. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 8\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 8\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 8y^2 &= \left(x^2 + 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 8y^2 \\ &= (x+y)^2 - y^2 + 8y^2 \\ &= (x+y)^2 + 7y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 8\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle =$

$\frac{7}{8}x^2 + 8\left(\frac{1}{8}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{53} + \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{53} + \frac{9}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 79. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + 2\,xy + 87\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + 2\,xy + 87\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 87y^2 &= \left(x^2 + 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 87y^2 \\ &= (x + y)^2 - y^2 + 87y^2 \\ &= (x + y)^2 + 86y^2. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff (x + y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x, y) = (0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 87\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = \frac{86}{87}x^2 + 87\left(\frac{1}{87}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x, y), (x, y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 87 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 87 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ 5\sqrt{74} + 44, -5\sqrt{74} + 44 \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 80. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+4\,xy+99\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+4\,xy+99\,y^2 = \left(x^2+4\,xy\right)+99y^2 &= \left(x^2+2\times 2\,xy+(2\,y)^2-(2\,y)^2\right)+99y^2\\ &= (x+2\,y)^2-4\,y^2+99y^2\\ &= (x+2\,y)^2+95y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle=0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle=0 \iff (x+2\,y)^2=0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $4\,xy+99\,y^2$ plutôt que $x^2+4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{95}{99}x^2+99\left(\frac{2}{99}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}1&2\\2&99\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&99\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\sqrt{2405}+50,\sqrt{2405}+50\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 81. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+y^2 = 2\left(x^2+xy\right)+y^2 &= 2\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\,xy+\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\frac{1}{2}\,y^2+y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2+\frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + y^2$ plutôt que $2\,x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + (x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 82. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 16\,x^2 + 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 16\,x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 = 16\left(x^2 + \frac{1}{8}\,xy\right) + 2y^2 &= 16\left(x^2 + 2 \times \frac{1}{16}\,xy + \left(\frac{1}{16}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\,y\right)^2\right) + 2y^2 \\ &= 16\left(x + \frac{1}{16}\,y\right)^2 - \frac{1}{16}\,y^2 + 2y^2 \\ &= 16\left(x + \frac{1}{16}\,y\right)^2 + \frac{31}{16}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{16}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $16\,x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{31}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-5\sqrt{2} + 9, 5\sqrt{2} + 9\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 83. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 = \left(x^2 + 2\,xy\right) + 2y^2 &= \left(x^2 + 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 2y^2 \\ &= (x+y)^2 - y^2 + 2y^2 \\ &= (x+y)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini

de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 84. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 15\,x^2 - 2\,xy + 5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 15\,x^2 - 2\,xy + 5\,y^2 = 15\left(x^2 - \frac{2}{15}\,xy\right) + 5y^2 &= 15\left(x^2 - 2\times\frac{1}{15}\,xy + \left(\frac{1}{15}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{15}\,y\right)^2\right) + 5y^2\\ &= 15\left(x - \frac{1}{15}\,y\right)^2 - \frac{1}{15}\,y^2 + 5y^2\\ &= 15\left(x - \frac{1}{15}\,y\right)^2 + \frac{74}{15}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x - \frac{1}{15}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 5\,y^2$ plutôt que $15\,x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{74}{5}x^2 + 5\left(-\frac{1}{5}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 15 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 15 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{26}+10, -\sqrt{26}+10\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 85. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2 - 4\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2-4\,xy+2\,y^2 = 6\left(x^2-\frac{2}{3}\,xy\right)+2y^2 &= 6\left(x^2-2\times\frac{1}{3}\,xy+\left(\frac{1}{3}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{3}\,y\right)^2\right)+2y^2\\ &= 6\left(x-\frac{1}{3}\,y\right)^2-\frac{2}{3}\,y^2+2y^2\\ &= 6\left(x-\frac{1}{3}\,y\right)^2+\frac{4}{3}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x-\frac{1}{3}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\,xy+2\,y^2$ plutôt que $6\,x^2-4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 4x^2+2\,(-x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-2\sqrt{2}+4, 2\sqrt{2}+4\right\}\subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 86. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+y^2 = 2\left(x^2+xy\right)+y^2 &= 2\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\,xy+\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\frac{1}{2}\,y^2+y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2+\frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + y^2$ plutôt que $2\,x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 + (x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 87. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 9

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 16\,xy + 80\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 16\,xy + 80\,y^2 = \left(x^2 - 16\,xy\right) + 80y^2 &= \left(x^2 - 2\times 8\,xy + (8\,y)^2 - (8\,y)^2\right) + 80y^2 \\ &= (x - 8\,y)^2 - 64\,y^2 + 80y^2 \\ &= (x - 8\,y)^2 + 16y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x - 8\,y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-16\,xy + 80\,y^2$ plutôt que $x^2 - 16\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{5}x^2 + 80\left(-\frac{1}{10}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -8 & 80 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -8 & 80 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{6497} + \frac{81}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6497} + \frac{81}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 88. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2 - 2\,xy + 2\,y^2 = \left(x^2 - 2\,xy\right) + 2y^2 &= \left(x^2 - 2 \times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 2y^2 \\ &= (x-y)^2 - y^2 + 2y^2 \\ &= (x-y)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $x^2 - 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 89. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+3\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+3\,y^2 = 2\left(x^2+xy\right)+3y^2 &= 2\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\,xy+\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right)+3y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\frac{1}{2}\,y^2+3y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2+\frac{5}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+3\,y^2$ plutôt que $2\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{5}{3}x^2+3\left(\frac{1}{3}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\frac{1}{2}\,\sqrt{5}+\frac{5}{2},\frac{1}{2}\,\sqrt{5}+\frac{5}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 90. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2-4\,xy+20\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2-4\,xy+20\,y^2 = \left(x^2-4\,xy\right)+20y^2 &= \left(x^2-2\times 2\,xy+(2\,y)^2-(2\,y)^2\right)+20y^2\\ &= (x-2\,y)^2-4\,y^2+20y^2\\ &= (x-2\,y)^2+16y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-2\,y)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\,xy+20\,y^2$ plutôt que $x^2-4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{4}{5}x^2+20\left(-\frac{1}{10}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}1&-2\\-2&20\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&20\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{377}+\frac{21}{2},\frac{1}{2}\sqrt{377}+\frac{21}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 91. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2-2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2-2\,xy+2\,y^2 = \left(x^2-2\,xy\right)+2y^2 &= \left(x^2-2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+2y^2\\ &= (x-y)^2-y^2+2y^2\\ &= (x-y)^2+y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x-y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy+2\,y^2$ plutôt que $x^2-2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}x^2+2\left(-\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 92. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 5\,x^2-2\,xy+2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 5\,x^2-2\,xy+2\,y^2 = 5\left(x^2-\frac{2}{5}\,xy\right)+2y^2 &= 5\left(x^2-2\times\frac{1}{5}\,xy+\left(\frac{1}{5}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{5}\,y\right)^2\right)+2y^2 \\ &= 5\left(x-\frac{1}{5}\,y\right)^2-\frac{1}{5}\,y^2+2y^2 \\ &= 5\left(x-\frac{1}{5}\,y\right)^2+\frac{9}{5}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{5}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-2\,xy+2\,y^2$ plutôt que $5\,x^2-2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle =$

$\frac{9}{2}x^2+2\left(-\frac{1}{2}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}5&-1\\-1&2\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{7}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).

Corrigé 93. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+5\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+5\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+5y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+5y^2\\ &=(x+y)^2-y^2+5y^2\\ &=(x+y)^2+4y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle\geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle=0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle=0\iff(x+y)^2=0 \text{ et } y^2=0\iff x=0\text{ et }y=0\iff(x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+5\,y^2$ plutôt que $x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = \frac{4}{5}x^2+5\left(\frac{1}{5}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\sqrt{5}+3,\sqrt{5}+3\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini

de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 94. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+295\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle(x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2+2\,xy+295\,y^2 = 2\left(x^2+xy\right)+295y^2 &= 2\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\,xy+\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right)+295y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\frac{1}{2}\,y^2+295y^2\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2+\frac{589}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle\geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle(x,y),(x,y)\rangle=0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle=0\iff\left(x+\frac{1}{2}\,y\right)^2=0 \text{ et } y^2=0\iff x=0 \text{ et } y=0\iff(x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+295\,y^2$ plutôt que $2\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle(x,y),(x,y)\rangle=\frac{589}{295}x^2+295\left(\frac{1}{295}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle(x,y),(x,y)\rangle=X^\top\begin{pmatrix}2&1\\1&295\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&295\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\frac{1}{2}\,\sqrt{85853}+\frac{297}{2},\frac{1}{2}\,\sqrt{85853}+\frac{297}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 95. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2+2\,xy+3\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 6\,x^2+2\,xy+3\,y^2 = 6\left(x^2+\frac{1}{3}\,xy\right)+3y^2 &= 6\left(x^2+2\times\frac{1}{6}\,xy+\left(\frac{1}{6}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{6}\,y\right)^2\right)+3y^2\\ &= 6\left(x+\frac{1}{6}\,y\right)^2-\frac{1}{6}\,y^2+3y^2\\ &= 6\left(x+\frac{1}{6}\,y\right)^2+\frac{17}{6}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{1}{6}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+3\,y^2$ plutôt que $6\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{17}{3}x^2+3\left(\frac{1}{3}\,x+y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}6&1\\1&3\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}6&1\\1&3\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\frac{1}{2}\,\sqrt{13}+\frac{9}{2},\frac{1}{2}\,\sqrt{13}+\frac{9}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 96. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 10

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+7\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2\,xy+7\,y^2 = \left(x^2+2\,xy\right)+7y^2 &= \left(x^2+2\times xy+(y)^2-(y)^2\right)+7y^2\\ &= (x+y)^2-y^2+7y^2\\ &= (x+y)^2+6y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 7\,y^2$ plutôt que $x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{6}{7}x^2 + 7\left(\frac{1}{7}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{-\sqrt{10}+4, \sqrt{10}+4\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 97. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 11

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 + 2\,xy + 3\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 + 2\,xy + 3\,y^2 = 2\left(x^2 + xy\right) + 3y^2 &= 2\left(x^2 + 2 \times \frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + 3y^2 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 + 3y^2 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{5}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy + 3\,y^2$ plutôt que $2\,x^2 + 2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{5}{3}x^2 + 3\left(\frac{1}{3}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas

éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 98. La bilinéarité et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en $x_2 y_1$ et $x_1 y_2$ s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : ← page 11

$$\langle (x,y),(x,y) \rangle = 4\,x^2 + 4\,xy + 2\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\langle (x,y),(x,y) \rangle = 4\,x^2 + 4\,xy + 2\,y^2 = 4\left(x^2 + xy\right) + 2y^2 &= 4\left(x^2 + 2 \times \frac{1}{2}\,xy + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + 2y^2 \\
&= 4\left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 - y^2 + 2y^2 \\
&= 4\left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y) \rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y) \rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y) \rangle = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $4\,xy + 2\,y^2$ plutôt que $4\,x^2 + 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y) \rangle = 2x^2 + 2\,(x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y) \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} + 3 \right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini

de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 99. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 11

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2+2\,xy+y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 11\,x^2+2\,xy+y^2 = 11\left(x^2+\frac{2}{11}\,xy\right)+y^2 &= 11\left(x^2+2\times\frac{1}{11}\,xy+\left(\frac{1}{11}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{11}\,y\right)^2\right)+y^2\\ &= 11\left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2-\frac{1}{11}\,y^2+y^2\\ &= 11\left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2+\frac{10}{11}y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff \left(x+\frac{1}{11}\,y\right)^2 = 0 \text{ et } y^2=0 \iff x=0 \text{ et } y=0 \iff (x,y)=(0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $2\,xy+y^2$ plutôt que $11\,x^2+2\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 10x^2+(x+y)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si l'on note : $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top\begin{pmatrix}11&1\\1&1\end{pmatrix}X$. Or la matrice $A=\begin{pmatrix}11&1\\1&1\end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\left\{-\sqrt{26}+6,\sqrt{26}+6\right\}\subseteq\mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X\in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top AX>0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions.

Corrigé 100. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont évidentes : elles découlent respectivement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité du produit de réels (notons aussi que les termes en x_2y_1 et x_1y_2 s'échangent). Il reste à vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : ← page 11

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2-4\,xy+92\,y^2.$$

À cause du terme xy, il n'est pas clair que cette quantité est toujours positive : cela semble dépendre des signes respectifs de x et y. Néanmoins, grâce aux identités remarquables nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2\,x^2 - 4\,xy + 92\,y^2 = 2\left(x^2 - 2\,xy\right) + 92y^2 &= 2\left(x^2 - 2\times xy + (y)^2 - (y)^2\right) + 92y^2 \\ &= 2\,(x-y)^2 - 2\,y^2 + 92y^2 \\ &= 2\,(x-y)^2 + 90y^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant une somme de réels tous positifs, grâce aux carrés de nombres réels qui sont positifs. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle \geqslant 0.$$

Si, de plus, on suppose $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors une somme de réels POSITIFS n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit :

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff (x,y) = (0{,}0),$$

ce qui montre que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie en plus d'être positive. On en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Pour faire apparaître une somme de carrés, on aurait tout aussi bien pu utiliser une identité remarquable avec $-4\,xy + 92\,y^2$ plutôt que $2\,x^2 - 4\,xy$, de sorte à obtenir : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \frac{45}{23}x^2 + 92\left(-\frac{1}{46}\,x + y\right)^2$. Nous vous laissons vérifier que la démarche aboutit aussi (et nous n'avons pas éduqué la machine pour repérer quelle est l'approche la moins calculatoire : peu lui chaut).

Remarque. Je vous laisse vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\langle (x,y),(x,y)\rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 92 \end{pmatrix} X$. Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 92 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle et on vérifie qu'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\sqrt{2029} + 47, -\sqrt{2029} + 47\right\} \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Les valeurs propres étant strictement positives, on en déduit que A est *définie positive*, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top A X > 0$, ce qui démontre d'une autre manière le caractère défini de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C'est bien sûr beaucoup moins élémentaire que la démonstration proposée ci-dessus, mais cela vous permet de faire le lien avec d'autres notions (et de remarquer, par ailleurs, qu'il est FAUX de prétendre qu'une matrice est positive si et seulement si ses coefficients sont tous positifs).