Résolutions de systèmes linéaires

💡 Ces exercices vous font réviser comment la méthode du pivot de Gauß permet de résoudre des systèmes linéaires. Vous rencontrerez ici toutes les situations, à peu près équitablement : zéro, une, ou une infinité de solutions.

Remarque sur le corrigé. Pour faciliter la programmation, j'élimine toujours les variables dans cet ordre : x, y, z puis t. Si vous voyez des simplifications plus intéressantes en commençant par éliminer une autre variable, ne suivez pas servilement la démarche du corrigé.

Exercice 1. Résoudre le système : → page 15

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -9x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 0 \\ -3x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 2. Résoudre le système : → page 15

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & & & + & 4z & & & = & -72 \\ -6x & & & - & 5z & + & t & = & 0 \\ -4x & + & y & - & z & - & t & = & 1 \\ -16x & + & 3y & - & 9z & - & 2t & = & -36 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Résoudre le système : → page 15

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 4. Résoudre le système : → page 16

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 5y & & & + & 2t & = & 0 \\ 8x & - & 2y & + & z & + & 12t & = & 0 \\ -2x & + & 7y & & & + & 6t & = & 0 \\ 5x & + & 9y & + & z & + & 23t & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 5. Résoudre le système : → page 16

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -8x & + & 6y & + & 5z & = & -1 \\ -4x & + & 2y & + & z & = & -5 \\ 4x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Résoudre le système : → page 17

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -3 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ 4x & - & y & - & 9z & = & 5 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Résoudre le système : → page 17

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 2y & + & 11z & = & 7 \\ -2x & - & 2y & + & 11z & = & 7 \\ 4x & + & 4y & - & 22z & = & -14 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Résoudre le système : → page 17

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & 6x & - & 3y & - & 12z & = & 0 \\ & 2x & & & - & 3z & = & -3 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Résoudre le système : → page 18

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 4x & - & 4y & - & 4z & - & 16t & = & 44 \\ - & 4x & - & 4y & - & 4z & - & 16t & = & 44 \\ - & 2x & - & 2y & - & 2z & - & 8t & = & 22 \\ - & x & - & y & - & z & - & 4t & = & 11 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 10. Résoudre le système : → page 18

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ - & x & - & y & - & z & = & 0 \\ & x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 11. Résoudre le système : → page 19

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} & x & + & 7y & - & z & - & t & = & -5 \\ & 4x & + & 11y & + & 3z & - & 4t & = & 1 \\ - & 9x & - & 23y & - & 5z & - & 5t & = & 1 \\ & 7x & + & 18y & + & 4z & + & 3t & = & 1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 12. Résoudre le système : → page 19

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 5x & + & 5y & + & 5z & = & -45 \\ - & x & + & y & + & z & = & -9 \\ & 2x & - & 2y & - & 2z & = & 18 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Résoudre le système : → page 19

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 4x & + & 24y & - & 4z & - & 8t & = & 154 \\ - & x & + & 6y & - & z & - & 2t & = & 12 \\ - & x & + & 6y & - & z & - & 2t & = & -3 \\ & x & - & 6y & + & z & + & 2t & = & 3 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 14. Résoudre le système : → page 19

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} & x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & 2x & - & 2y & + & 6z & = & 0 \\ - & 2x & + & y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 15. Résoudre le système : → page 20

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & 17z & = & 0\\ x & - & y & + & 17z & = & 0\\ -x & + & y & - & 17z & = & 0\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 16. Résoudre le système : → page 20

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1\\ -7x & - & 7y & - & 7z & + & 14t & = & -1\\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 6t & = & 1\\ -x & - & y & - & z & + & 2t & = & -1\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 17. Résoudre le système : → page 21

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & 3y & - & 6z & = & -21\\ x & - & 2y & + & 6z & = & -1\\ x & - & y & + & 2z & = & 7\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 18. Résoudre le système : → page 21

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 5z & = & -4\\ 2x & + & y & - & 5z & = & 40\\ 2x & + & y & - & 5z & = & 8\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 19. Résoudre le système : → page 21

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & - & 5z & = & 0\\ -x & - & y & - & 2z & = & 0\\ & & 2y & + & 3z & = & 0\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 20. Résoudre le système : → page 22

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & y & + & 2z & = & 0\\ 2x & + & 3y & - & 10z & = & 0\\ x & + & y & - & 3z & = & 0\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 21. Résoudre le système : → page 22

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 2y & + & 4z & + & t & = & 0\\ -x & & & - & 2z & - & t & = & 0\\ 4x & - & 3y & - & z & + & t & = & 0\\ & - & y & - & 3z & - & t & = & 0\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 22. Résoudre le système : → page 23

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & - & 7z & = & 0\\ -x & - & 3y & + & 2z & = & 0\\ x & + & 3y & - & 5z & = & 0\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 23. Résoudre le système : → page 23

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x & + & 16y & + & z & - & 5t & = & 0 \\ -\ 2x & - & 13y & - & 2z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 5y & & & - & 2t & = & 0 \\ 2x & - & 13y & - & 4z & & & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 24. Résoudre le système : → page 24

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -\ 6x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ -\ 18x & + & 6y & + & 3z & + & 6t & = & -3 \\ -\ 6x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ 6x & - & 2y & - & z & - & 2t & = & 1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 25. Résoudre le système : → page 24

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 4y & + & 4z & = & -5 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 2z & = & 11 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 26. Résoudre le système : → page 24

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -\ 4x & + & 2y & + & 8z & + & 2t & = & 0 \\ -\ 2x & + & y & + & 4z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 4z & - & t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 4z & - & t & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 27. Résoudre le système : → page 25

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\ 8x & & & - & 6z & = & 0 \\ & & y & - & 18z & = & 0 \\ -\ 4x & - & y & + & 14z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 28. Résoudre le système : → page 25

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\ 8x & + & 8y & - & 7z & = & 1 \\ -\ x & & & + & 2z & = & 7 \\ x & - & y & & & = & -8 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 29. Résoudre le système : → page 26

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -\ x & - & 14y & - & z & & & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 14y & + & z & & & = & 0 \\ x & + & 14y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 30. Résoudre le système : → page 26

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & x & & & - & 16\,z & + & 4\,t & = & 4 \\ - & x & & & + & 21\,z & - & 5\,t & = & 1 \\ & 2\,x & & & - & 2\,z & + & 2\,t & = & 1 \\ - & 2\,x & - & 2\,y & - & 11\,z & - & 2\,t & = & -1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 31. Résoudre le système : → page 26

$$(S)\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcr} & 2\,x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ - & 2\,x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ - & 25\,x & + & 12\,y & - & 13\,z & + & 13\,t & = & 0 \\ - & 4\,x & + & y & - & 3\,z & + & 3\,t & = & 2 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 32. Résoudre le système : → page 27

$$(S)\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcr} & 2\,x & + & 2\,y & + & 6\,z & - & 2\,t & = & 3 \\ & x & + & y & + & 3\,z & - & t & = & 0 \\ - & x & - & y & - & 3\,z & + & t & = & 0 \\ & 4\,x & + & 4\,y & + & 12\,z & - & 4\,t & = & -3 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 33. Résoudre le système : → page 27

$$(S)\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcr} - & 10\,x & + & 4\,y & - & 6\,z & - & 6\,t & = & 0 \\ & x & - & 6\,y & - & z & - & t & = & 0 \\ & 4\,x & + & 6\,y & + & 2\,z & + & 4\,t & = & 0 \\ & & & 9\,y & & & + & 2\,t & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 34. Résoudre le système : → page 28

$$(S)\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} & 3\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 20 \\ & 5\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 6 \\ - & x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 35. Résoudre le système : → page 28

$$(S)\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & 4\,x & - & 2\,y & + & 5\,z & = & 1 \\ & x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 9 \\ & & & 2\,y & - & z & = & -33 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 36. Résoudre le système : → page 28

$$(S)\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & x & - & y & + & z & = & 0 \\ & x & + & y & - & z & = & 0 \\ & x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 37. Résoudre le système : → page 29

$$(S)\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & 2\,x & + & y & - & 5\,z & = & 0 \\ - & 3\,x & & & - & 6\,z & = & 0 \\ & 2\,x & - & y & + & 5\,z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 38. Résoudre le système : → page 29

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrcr} - & 4\,x & & & & & = & 0 \\ - & 8\,x & - & 12\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ - & x & - & 6\,y & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 39. Résoudre le système : → page 30

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrcr} & 2\,x & + & y & + & 3\,z & + & 4\,t & = & 0 \\ & & & y & + & 3\,z & + & 2\,t & = & -1 \\ & & & y & + & 5\,z & + & 6\,t & = & -1 \\ - & 3\,x & & & + & 4\,z & + & 5\,t & = & 3 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 40. Résoudre le système : → page 30

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x & - & y & - & 4\,z & = & 0 \\ & - & 4\,y & - & 6\,z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 41. Résoudre le système : → page 30

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrcr} & 2\,x & - & y & - & 5\,z & = & -1 \\ - & 4\,x & + & 2\,y & + & 10\,z & = & 2 \\ - & 2\,x & + & y & + & 5\,z & = & 1 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 42. Résoudre le système : → page 31

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrcr} - & x & + & y & - & z & - & 2\,t & = & 0 \\ - & x & + & y & - & z & - & 2\,t & = & 0 \\ & x & - & y & + & z & + & 2\,t & = & 0 \\ - & x & + & y & - & z & - & 2\,t & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 43. Résoudre le système : → page 31

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrcr} & x & - & 5\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ - & x & - & 4\,y & - & z & = & 3 \\ - & x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 1 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 44. Résoudre le système : → page 31

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrcr} & 14\,x & & & + & 14\,z & + & t & = & 5 \\ - & 3\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & - & 2\,t & = & 0 \\ - & 8\,x & & & - & 2\,z & - & t & = & 0 \\ & 9\,x & + & y & & & + & 2\,t & = & -3 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 45. Résoudre le système : → page 32

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 5x & + & 3y & + & 3z & - & 4t & = & -6 \\ - & 7x & + & 5y & + & 5z & + & t & = & -79 \\ & & & 2y & + & 2z & - & t & = & -19 \\ - & x & + & 3y & + & 3z & - & t & = & -33 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 46. Résoudre le système : → page 32

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 3x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 \\ & & - & y & + & z & & & = & 2 \\ & 3x & - & 4y & + & 3z & + & 3t & = & 16 \\ - & 4x & + & 7y & - & 3z & - & t & = & 4 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 47. Résoudre le système : → page 33

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrr} 2x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 48. Résoudre le système : → page 33

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & x & & & & & - & t & = & 0 \\ - & 2x & - & 4y & - & z & - & 2t & = & -4 \\ - & x & - & 2y & & & - & t & = & 0 \\ - & 13x & + & 4y & & & - & 9t & = & 4 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 49. Résoudre le système : → page 34

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & x & - & y & + & z & = & 0 \\ & x & + & y & - & z & = & 0 \\ & x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 50. Résoudre le système : → page 34

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 7x & + & 6y & - & 9z & - & t & = & 0 \\ - & 5x & - & 4y & - & 11z & & & = & -1 \\ - & 2x & + & 3y & - & 4z & - & 2t & = & -41 \\ - & 4x & + & 7y & - & 6z & - & 3t & = & -54 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 51. Résoudre le système : → page 35

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} & x & - & y & + & 4z & - & t & = & -1 \\ - & 5x & - & 15y & + & z & + & 6t & = & 0 \\ - & 7x & - & 17y & - & 2z & + & 8t & = & -24 \\ & & & y & - & 3z & + & t & = & -143 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 52. Résoudre le système : → page 35

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 8x & - & y & - & z & - & 2t & = & 1 \\ & 8x & - & y & - & z & - & 2t & = & 1 \\ - & 16x & + & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 4 \\ & 16x & - & 3y & - & z & + & t & = & -72 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 53. Résoudre le système : → page 36

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} & 3x & + & 6y & - & 18z & = & 1 \\ - & x & - & 2y & + & 6z & = & 2 \\ - & x & - & 2y & + & 6z & = & -1 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 54. Résoudre le système : → page 36

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} - & 2x & & & & & = & -1 \\ - & 7x & - & 7y & - & 14z & = & 28 \\ - & 5x & - & 4y & - & 8z & = & 3 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 55. Résoudre le système : → page 36

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrr} & 7x & + & 8y & - & 24z & - & 8t & = & 0 \\ & x & & & - & 6z & - & 3t & = & 0 \\ & x & + & y & - & 3z & - & t & = & 0 \\ - & 25x & - & 2y & & & - & 2t & = & 0 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 56. Résoudre le système : → page 37

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} - & x & + & y & + & z & = & 0 \\ - & 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & 5x & - & 5y & - & 5z & = & 1 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 57. Résoudre le système : → page 37

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} & x & + & 5y & + & z & = & 0 \\ - & 3x & - & 15y & - & 3z & = & 0 \\ - & x & - & 5y & - & z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 58. Résoudre le système : → page 37

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrr} - & x & - & 3y & + & 8z & - & 4t & = & 3 \\ - & 3x & + & y & - & 4z & & & = & 13 \\ - & 3x & & & - & 3z & - & t & = & 0 \\ - & 6x & + & y & - & 7z & - & t & = & 13 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 59. Résoudre le système : → page 38

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} & 2x & - & 4y & - & 6z & = & 0 \\ - & x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ - & 2x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 60. Résoudre le système : → page 38

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} -&3\,x&-&11\,y&+&2\,z&+&t&=&3\\ -&7\,x&-&17\,y&-&4\,z&-&7\,t&=&-1\\ &3\,x&+&2\,y&-&5\,z&&&=&-1\\ &&-&14\,y&-&4\,z&+&2\,t&=&8 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$.

Exercice 61. Résoudre le système : → page 39

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} &2\,x&-&4\,y&-&2\,z&-&6\,t&=&2\\ -&x&+&2\,y&+&z&+&3\,t&=&1\\ &x&-&2\,y&-&z&-&3\,t&=&0\\ &x&-&2\,y&-&z&-&3\,t&=&0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$.

Exercice 62. Résoudre le système : → page 39

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} -&x&-&9\,y&-&10\,z&=&0\\ &x&+&6\,y&+&z&=&0\\ &&-&y&-&z&=&0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 63. Résoudre le système : → page 39

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} -&2\,x&-&10\,y&-&2\,z&-&t&=&0\\ &2\,x&+&10\,y&+&2\,z&+&t&=&7\\ &2\,x&+&10\,y&+&2\,z&+&t&=&4\\ &2\,x&+&10\,y&+&2\,z&+&t&=&-2 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$.

Exercice 64. Résoudre le système : → page 39

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} &x&-&2\,y&+&5\,z&-&8\,t&=&-1\\ &2\,x&&&-&2\,z&&&=&1\\ &x&-&y&+&2\,z&-&4\,t&=&-1\\ -&2\,x&&&+&2\,z&&&=&1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$.

Exercice 65. Résoudre le système : → page 40

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} -&8\,x&-&24\,y&+&4\,z&=&4\\ &6\,x&+&18\,y&-&3\,z&=&-3\\ &2\,x&+&6\,y&-&z&=&-1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 66. Résoudre le système : → page 40

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} -&6\,x&+&12\,y&-&2\,z&=&-2\\ &3\,x&-&4\,y&+&3\,z&=&1\\ &&&4\,y&+&4\,z&=&0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 67. Résoudre le système : → page 40

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} &11\,x&+&13\,y&-&5\,z&=&0\\ -&10\,x&-&12\,y&+&z&=&0\\ -&10\,x&-&12\,y&-&7\,z&=&0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 68. Résoudre le système : → page 41

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 2y & - & z & = & -3 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & & & = & -1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 69. Résoudre le système : → page 41

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -4x & - & 4y & + & 8z & = & 4 \\ 8x & + & 8y & - & 16z & = & -8 \\ x & + & y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 70. Résoudre le système : → page 41

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 71. Résoudre le système : → page 42

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 16y & - & 4z & = & 0 \\ x & + & 8y & - & 2z & = & 0 \\ -x & - & 8y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 72. Résoudre le système : → page 42

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & -1 \\ -2x & + & y & - & z & - & t & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 73. Résoudre le système : → page 42

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x & - & 20y & + & 10z & + & 10t & = & 2 \\ x & - & 2y & + & z & + & t & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & - & t & = & -1 \\ -3x & + & 6y & - & 3z & - & 3t & = & 6 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 74. Résoudre le système : → page 43

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & & & = & 0 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 2y & & & = & 1 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 75. Résoudre le système : → page 43

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} & 3\,x & + & y & + & z & = & -1\\ & 7\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & -2\\ - & 12\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 2\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 76. Résoudre le système : → page 43

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} & x & - & y & - & 2\,z & + & t & = & 0\\ & x & - & y & - & 2\,z & + & t & = & 0\\ - & 4\,x & + & 4\,y & + & 8\,z & - & 4\,t & = & 0\\ & x & - & y & - & 2\,z & + & t & = & 0\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 77. Résoudre le système : → page 43

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} & 6\,x & - & 2\,y & + & 6\,z & = & 2\\ & 12\,x & - & 4\,y & + & 12\,z & = & 4\\ - & 6\,x & + & 2\,y & - & 6\,z & = & -2\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 78. Résoudre le système : → page 44

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 2\,x & + & y & + & 3\,z & & & = & 0\\ - & 2\,x & + & y & + & 5\,z & - & 2\,t & = & 2\\ - & x & & & + & 9\,z & & & = & 6\\ & 5\,x & - & 4\,y & + & 3\,z & + & 9\,t & = & 0\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$.

Exercice 79. Résoudre le système : → page 44

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & x & + & 4\,y & + & 3\,z & + & t & = & 16\\ - & 2\,x & & & + & 7\,z & - & t & = & -9\\ & & - & 3\,y & + & 2\,z & - & t & = & -2\\ & x & + & 4\,y & - & 4\,z & + & 2\,t & = & -2\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$.

Exercice 80. Résoudre le système : → page 45

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 10\,x & - & 10\,y & + & 10\,z & = & 0\\ & x & + & y & - & z & = & 0\\ - & 3\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 81. Résoudre le système : → page 45

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} & x & - & 2\,y & - & z & = & 5\\ & x & - & 2\,y & - & z & = & 5\\ - & 6\,x & + & 12\,y & + & 6\,z & = & -30\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 82. Résoudre le système : → page 45

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 3\,x & - & 7\,y & + & 7\,z & = & -4\\ & & & y & - & z & = & 1\\ - & x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & -2\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 83. Résoudre le système : → page 46

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x & - & 2\,y & - & 7\,z & = & 0 \\ & - & y & - & 5\,z & = & 0 \\ -\ \ x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 84. Résoudre le système : → page 46

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\ \ x & + & y & - & 2\,z & = & -3 \\ -\ \ x & + & y & - & 2\,z & = & -3 \\ -\ 3\,x & + & 3\,y & - & 6\,z & = & -9 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 85. Résoudre le système : → page 46

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -\ 7\,x & + & y & - & 5\,z & - & 2\,t & = & -1 \\ 3\,x & + & 7\,y & + & 9\,z & + & 6\,t & = & -11 \\ & - & 2\,y & - & 4\,z & - & 3\,t & = & -5 \\ -\ 5\,x & & & + & 5\,z & + & 5\,t & = & 35 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 86. Résoudre le système : → page 47

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\ 7\,x & + & 7\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & & & = & 0 \\ -\ 7\,x & + & 8\,y & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 87. Résoudre le système : → page 48

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 3\,z & = & 0 \\ 20\,x & + & 3\,y & + & 10\,z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 88. Résoudre le système : → page 48

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\ 5\,x & - & y & - & z & = & 0 \\ -\ 5\,x & - & y & - & z & = & -1 \\ 5\,x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 89. Résoudre le système : → page 48

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\ 2\,x & - & 3\,y & - & 15\,z & = & 0 \\ 3\,x & - & y & + & 12\,z & = & 0 \\ -\ 2\,x & + & 2\,y & - & 6\,z & = & -6 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 90. Résoudre le système : → page 49

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -\ \ x & + & 4\,y & + & 6\,z & - & t & = & 0 \\ -\ 2\,x & + & 2\,y & - & 3\,z & - & 2\,t & = & 6 \\ & - & y & - & 7\,z & - & 3\,t & = & 4 \\ x & + & 2\,y & & & - & 5\,t & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 91. Résoudre le système : → page 49

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & x & + & y & + & 2z & + & t & = -2 \\ - & x & + & y & + & 2z & + & t & = -2 \\ - & 2x & + & 2y & + & 4z & + & 2t & = -4 \\ - & x & + & y & + & 2z & + & t & = -2 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 92. Résoudre le système : → page 49

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 6x & + & 6y & - & z & + & 5t & = 2 \\ & 2x & - & 2y & + & z & - & t & = 2 \\ & 7x & - & 7y & + & 2z & - & 5t & = 1 \\ - & 21x & + & 21y & - & 8z & + & 13t & = -11 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 93. Résoudre le système : → page 50

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrr} - & x & + & 2y & + & 5z & = 0 \\ - & x & + & y & + & 2z & = 0 \\ & x & - & y & - & 2z & = 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 94. Résoudre le système : → page 50

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrr} & x & - & y & - & z & = 0 \\ - & 7x & + & 7y & + & 7z & = 0 \\ & 4x & - & 4y & - & 4z & = 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 95. Résoudre le système : → page 51

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrr} & x & + & 3y & + & 3z & = 1 \\ & x & - & y & - & 3z & = -1 \\ - & x & - & 5y & - & 6z & = 4 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 96. Résoudre le système : → page 51

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & 5x & - & y & + & z & + & t & = -1 \\ - & 10x & + & 2y & - & 2z & - & 2t & = 0 \\ - & 5x & + & y & - & z & - & t & = 1 \\ & 10x & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = -6 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 97. Résoudre le système : → page 51

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & 2x & - & 11y & - & 3z & + & t & = 0 \\ - & 2x & + & 11y & + & 3z & - & t & = 0 \\ - & 2x & + & 11y & + & 3z & - & t & = 0 \\ & 4x & - & 22y & - & 6z & + & 2t & = 0 \end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 98. Résoudre le système : → page 52

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} - & x & + & y & & & = & 0 \\ & 2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \\ & & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 99. Résoudre le système : → page 52

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & - & 24\,y & & & - & 4\,t & = & 0 \\ & - & 6\,y & & & - & t & = & 0 \\ 4\,x & - & 14\,y & + & 4\,z & + & t & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Si l'ensemble des solutions est non trivial : l'écrire comme un « Vect ».

Exercice 100. Résoudre le système : → page 53

$$(S)\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} & x & - & y & + & 2\,z & = & 2 \\ - & x & & & & & = & 2 \\ & 3\,x & - & 4\,y & + & 8\,z & = & -1 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Corrigé 1. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -9x & + & 3y & - & 3z & = & 0\\ 3x & - & y & + & z & = & 0\\ -3x & + & y & - & z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3x & - & y & + & z & = & 0 & (L_2\leftrightarrow L_1)\\ -9x & + & 3y & - & 3z & = & 0 & \\ -3x & + & y & - & z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3x & - & y & + & z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2\leftarrow L_2+3L_1)\\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3\leftarrow L_3+L_1)\end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & z & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right. \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\\ y & = & a\\ z & = & b\end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b\\ y & = & a\\ z & = & b\end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{1}{3},\,1,\,0\right),\left(-\frac{1}{3},\,0,\,1\right)\right).$$

Corrigé 2. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & & & + & 4z & & & = & -72\\ -6x & & & - & 5z & + & t & = & 0\\ -4x & + & y & - & z & - & t & = & 1\\ -16x & + & 3y & - & 9z & - & 2t & = & -36\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 4x & & & + & 4z & & & = & -72 & \\ & & & & z & + & t & = & -108 & (L_2\leftarrow L_2+\frac{3}{2}L_1)\\ & & y & + & 3z & - & t & = & -71 & (L_3\leftarrow L_3+L_1)\\ & & 3y & + & 7z & - & 2t & = & -324 & (L_4\leftarrow L_4+4L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 4x & & & + & 4z & & & = & -72 & \\ & & y & + & 3z & - & t & = & -71 & \\ & & & & z & + & t & = & -108 & (L_3\leftrightarrow L_2)\\ & & 3y & + & 7z & - & 2t & = & -324 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 4x & & & + & 4z & & & = & -72 & \\ & & y & + & 3z & - & t & = & -71 & \\ & & & & z & + & t & = & -108 & \\ & & & - & 2z & + & t & = & -111 & (L_4\leftarrow L_4-3L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 4x & & & + & 4z & & & = & -72 & \\ & & y & + & 3z & - & t & = & -71 & \\ & & & & z & + & t & = & -108 & \\ & & & & & & 3t & = & -327 & (L_4\leftarrow L_4+2L_3)\end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & & & + & 4z & & & = & -72\\ & & y & + & 3z & - & t & = & -71\\ & & & & z & + & t & = & -108\\ & & & & & & 3t & = & -327\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z-18\\ y & = & -3z+t-71\\ z & = & -t-108\\ t & = & -109\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -19\\ y & = & -183\\ z & = & 1\\ t & = & -109\end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 3. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & - & 2z & = & 0 & \\ 2x & - & 2y & - & 3z & = & 0 & \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & - & 2z & = & 0 & \\ & & & & z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & 4y & + & 6z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & - & 2z & = & 0 & \\ & & 4y & + & 6z & = & 0 & \\ & & & & z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & + & 6z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y + 2z \\ y & = & -\frac{3}{2}z \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 4. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 5y & & & + & 2t & = & 0 \\ 8x & - & 2y & + & z & + & 12t & = & 0 \\ -2x & + & 7y & & & + & 6t & = & 0 \\ 5x & + & 9y & + & z & + & 23t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & - & 5y & & & + & 2t & = & 0 & \\ & & 18y & + & z & + & 4t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & & 2y & & & + & 8t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & & \frac{43}{2}y & + & z & + & 18t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{5}{2}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & - & 5y & & & + & 2t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & 2y & & & + & 8t & = & 0 & \\ & & 18y & + & z & + & 4t & = & 0 & \\ & & \frac{43}{2}y & + & z & + & 18t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & - & 5y & & & + & 2t & = & 0 & \\ & & 2y & & & + & 8t & = & 0 & \\ & & & & z & - & 68t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2) \\ & & & & z & - & 68t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{43}{4}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & - & 5y & & & + & 2t & = & 0 & \\ & & 2y & & & + & 8t & = & 0 & \\ & & & & z & - & 68t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons trois équations principales (trois pivots non nuls : x, y, z) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 5y & & & + & 2t & = & 0 \\ & & 2y & & & + & 8t & = & 0 \\ & & & & z & - & 68t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{5}{2}y - t \\ y & = & -4t \\ z & = & 68t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -11a \\ y & = & -4a \\ z & = & 68a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-11,\, -4,\, 68,\, 1)\right).$$

Corrigé 5. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -8x & + & 6y & + & 5z & = & -1 \\ -4x & + & 2y & + & z & = & -5 \\ 4x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -4x & + & 2y & + & z & = & -5 & \\ -8x & + & 6y & + & 5z & = & -1 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 4x & - & y & + & z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -4x & + & 2y & + & z & = & -5 & \\ & & 2y & + & 3z & = & 9 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & y & + & 2z & = & -5 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -4x & + & 2y & + & z & = & -5 & \\ & & y & + & 2z & = & -5 & \\ & & 2y & + & 3z & = & 9 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -4x & + & 2y & + & z & = & -5 & \\ & & y & + & 2z & = & -5 & \\ & & & - & z & = & 19 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -4x & + & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & + & 2z & = & -5 \\ & & & - & z & = & 19 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z + \frac{5}{4} \\ y & = & -2z - 5 \\ z & = & -19 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 13 \\ y & = & 33 \\ z & = & -19 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 6. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -3 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ 4x & - & y & - & 9z & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & & & - & 3z & = & -3 & \\ & - & y & + & 3z & = & 4 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & - & y & + & 3z & = & 17 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & & & - & 3z & = & -3 & \\ & - & y & + & 3z & = & 4 & \\ & & & & 0 & = & 13 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 7. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 2y & + & 11z & = & 7 \\ -2x & - & 2y & + & 11z & = & 7 \\ 4x & + & 4y & - & 22z & = & -14 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -2x & - & 2y & + & 11z & = & 7 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 2y & + & 11z & = & 7 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y + \frac{11}{2}z - \frac{7}{2} \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a + \frac{11}{2}b - \frac{7}{2} \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 8. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ 6x & - & 3y & - & 12z & = & 0 \\ 2x & & & - & 3z & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -2x & + & y & + & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & & y & + & z & = & -3 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -2x & + & y & + & 4z & = & 0 & \\ & & y & + & z & = & -3 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}y + 2z \\ y & = & -z-3 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3}{2}a - \frac{3}{2} \\ y & = & -a-3 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 9. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -4x & - & 4y & - & 4z & - & 16t & = & 44 \\ -4x & - & 4y & - & 4z & - & 16t & = & 44 \\ -2x & - & 2y & - & 2z & - & 8t & = & 22 \\ -x & - & y & - & z & - & 4t & = & 11 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -x & - & y & - & z & - & 4t & = & 11 & \\ -4x & - & 4y & - & 4z & - & 16t & = & 44 & \\ -2x & - & 2y & - & 2z & - & 8t & = & 22 & \\ -4x & - & 4y & - & 4z & - & 16t & = & 44 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -x & - & y & - & z & - & 4t & = & 11 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et trois équations auxiliaires. Il y a par conséquent trois inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & - & y & - & z & - & 4t & = & 11 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y-z-4t-11 \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a-b-4c-11 \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 10. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & y & - & z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 & \\ x & + & y & + & z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & y & - & z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y-z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a-b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\, 1,\, 0), (-1,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 11. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 7y & - & z & - & t & = & -5 \\ 4x & + & 11y & + & 3z & - & 4t & = & 1 \\ -\ 9x & - & 23y & - & 5z & - & 5t & = & 1 \\ 7x & + & 18y & + & 4z & + & 3t & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 7y & - & z & - & t & = & -5 & \\ & - & 17y & + & 7z & & & = & 21 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & & 40y & - & 14z & - & 14t & = & -44 & (L_3 \leftarrow L_3 + 9L_1) \\ & - & 31y & + & 11z & + & 10t & = & 36 & (L_4 \leftarrow L_4 - 7L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 7y & - & z & - & t & = & -5 & \\ & - & 17y & + & 7z & & & = & 21 & \\ & & & & \frac{42}{17}z & - & 14t & = & \frac{92}{17} & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{40}{17}L_2) \\ & & & - & \frac{30}{17}z & + & 10t & = & -\frac{39}{17} & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{31}{17}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 7y & - & z & - & t & = & -5 & \\ & - & 17y & + & 7z & & & = & 21 & \\ & & & - & \frac{30}{17}z & + & 10t & = & -\frac{39}{17} & \\ & & & & \frac{42}{17}z & - & 14t & = & \frac{92}{17} & (L_4 \leftrightarrow L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 7y & - & z & - & t & = & -5 & \\ & - & 17y & + & 7z & & & = & 21 & \\ & & & - & \frac{30}{17}z & + & 10t & = & -\frac{39}{17} & \\ & & & & & & 0 & = & \frac{11}{5} & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{5}L_3) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 12. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\ 5x & + & 5y & + & 5z & = & -45 \\ -\ x & + & y & + & z & = & -9 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 18 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -\ x & + & y & + & z & = & -9 & \\ -\ 5x & + & 5y & + & 5z & = & -45 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 18 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -\ x & + & y & + & z & = & -9 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\ x & + & y & + & z & = & -9 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y+z+9 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a+b+9 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 13. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -\ 4x & + & 24y & - & 4z & - & 8t & = & 154 \\ -\ x & + & 6y & - & z & - & 2t & = & 12 \\ -\ x & + & 6y & - & z & - & 2t & = & -3 \\ x & - & 6y & + & z & + & 2t & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -\ x & + & 6y & - & z & - & 2t & = & 12 & \\ -\ 4x & + & 24y & - & 4z & - & 8t & = & 154 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -\ x & + & 6y & - & z & - & 2t & = & -3 & \\ x & - & 6y & + & z & + & 2t & = & 3 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -\ x & + & 6y & - & z & - & 2t & = & 12 & \\ & & & & & & 0 & = & 106 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ & & & & & & 0 & = & -15 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 15 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 14. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 6z & = & 0 \\ -2x & + & y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 3z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & - & y & + & 2z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 3z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & y & + & 2z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & y - 3z \\ y & = & 2z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -a \\ y & = & 2a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\, 2,\, 1)\right).$$

Corrigé 15. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 17z & = & 0 \\ x & - & y & + & 17z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 17z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & + & y & - & 17z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 17z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & y - 17z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & a - 17b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 1,\, 0),(-17,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 16. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1 \\ -7x & - & 7y & - & 7z & + & 14t & = & -1 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 6t & = & 1 \\ -x & - & y & - & z & + & 2t & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1 & \\ & & & & & & 0 & = & 6 & (L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1) \\ & & & & & & 0 & = & -2 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et trois équations auxiliaires. Il y a par conséquent trois inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 6 \\ & & & & & & 0 & = & -2 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -y - z + 2t + 1 \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -a - b + 2c + 1 \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 17. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 3

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 3x & + & 3y & - & 6z & = & -21 \\ & x & - & 2y & + & 6z & = & -1 \\ & x & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} & x & - & 2y & + & 6z & = & -1 & \\ - & 3x & + & 3y & - & 6z & = & -21 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & x & - & y & + & 2z & = & 7 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & - & 2y & + & 6z & = & -1 \\ & - & 3y & + & 12z & = & -24 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & & y & - & 4z & = & 8 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & - & 2y & + & 6z & = & -1 \\ & & y & - & 4z & = & 8 \\ & - & 3y & + & 12z & = & -24 \quad (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & - & 2y & + & 6z & = & -1 \\ & & y & - & 4z & = & 8 \\ & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} x & - & 2y & + & 6z & = & -1 \\ & & y & - & 4z & = & 8 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2y - 6z - 1 \\ y & = & 4z + 8 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2a + 15 \\ y & = & 4a + 8 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 18. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 3

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} 2x & + & y & - & 5z & = & -4 \\ 2x & + & y & - & 5z & = & 40 \\ 2x & + & y & - & 5z & = & 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} 2x & + & y & - & 5z & = & -4 & \\ & & & & 0 & = & 44 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & & 0 & = & 12 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 19. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 3

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} & 2x & - & 4y & - & 5z & = & 0 \\ - & x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & - & y & - & 2z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & 2x & - & 4y & - & 5z & = & 0 & \\ & & & 2y & + & 3z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & - & y & - & 2z & = & 0 & \\ & & - & 6y & - & 9z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & & 2y & + & 3z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & - & y & - & 2z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & & 2y & + & 3z & = & 0 & \\ & & - & 6y & - & 9z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & - & y & - & 2z & = & 0 & \\ & & & 2y & + & 3z & = & 0 & \\ & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y - 2z \\ y & = & -\frac{3}{2}z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2}a \\ y & = & -\frac{3}{2}a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)\right).$$

Corrigé 20. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 10z & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & - & 3z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 2x & + & 3y & - & 10z & = & 0 & \\ -2x & - & y & + & 2z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & - & 3z & = & 0 & \\ & & y & - & 4z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & y & - & 4z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & - & 3z & = & 0 & \\ & & y & - & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ & & y & - & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -y+3z \\ y & = & 4z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -a \\ y & = & 4a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1, 4, 1)\right).$$

Corrigé 21. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & 2y & + & 4z & + & t & = & 0 \\ -x & & & - & 2z & - & t & = & 0 \\ 4x & - & 3y & - & z & + & t & = & 0 \\ & - & y & - & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -x & + & 2y & + & 4z & + & t & = & 0 & \\ & - & 2y & - & 6z & - & 2t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & 5y & + & 15z & + & 5t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \\ & - & y & - & 3z & - & t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -x & + & 2y & + & 4z & + & t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & - & y & - & 3z & - & t & = & 0 & \\ & & 5y & + & 15z & + & 5t & = & 0 & \\ & - & 2y & - & 6z & - & 2t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -x & + & 2y & + & 4z & + & t & = & 0 & \\ & - & y & - & 3z & - & t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & 2y & + & 4z & + & t & = & 0 \\ & - & y & - & 3z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+4z+t \\ y & = & -3z-t \\ z & = & a \\ t & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2a-b \\ y & = & -3a-b \\ z & = & a \\ t & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\, -3,\, 1,\, 0)\,,(-1,\, -1,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 22. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 6\,y & - & 7\,z & = & 0 \\ -\ x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & + & 3\,y & - & 5\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 2\,x & + & 6\,y & - & 7\,z & = & 0 & \\ x & + & 3\,y & - & 5\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\ x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & 0 & \\ & & & - & 3\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & & - & 3\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, z) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\ x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y + 2z \\ y & = & a \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3a \\ y & = & a \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\, 1,\, 0)\right).$$

Corrigé 23. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 4

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 7\,x & + & 16\,y & + & z & - & 5\,t & = & 0 \\ -\ 2\,x & - & 13\,y & - & 2\,z & + & 2\,t & = & 0 \\ 3\,x & + & 5\,y & & & - & 2\,t & = & 0 \\ 2\,x & - & 13\,y & - & 4\,z & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -\ 2\,x & - & 13\,y & - & 2\,z & + & 2\,t & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 7\,x & + & 16\,y & + & z & - & 5\,t & = & 0 & \\ 3\,x & + & 5\,y & & & - & 2\,t & = & 0 & \\ 2\,x & - & 13\,y & - & 4\,z & & & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -\ 2\,x & - & 13\,y & - & 2\,z & + & 2\,t & = & 0 & \\ & - & \frac{59}{2}\,y & - & 6\,z & + & 2\,t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{2}L_1) \\ & - & \frac{29}{2}\,y & - & 3\,z & + & t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_1) \\ & - & 26\,y & - & 6\,z & + & 2\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -\ 2\,x & - & 13\,y & - & 2\,z & + & 2\,t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & \frac{29}{2}\,y & - & 3\,z & + & t & = & 0 & \\ & - & \frac{59}{2}\,y & - & 6\,z & + & 2\,t & = & 0 & \\ & - & 26\,y & - & 6\,z & + & 2\,t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -\ 2\,x & - & 13\,y & - & 2\,z & + & 2\,t & = & 0 & \\ & - & \frac{29}{2}\,y & - & 3\,z & + & t & = & 0 & \\ & & & & \frac{3}{29}\,z & - & \frac{1}{29}\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{59}{29}L_2) \\ & & & - & \frac{18}{29}\,z & + & \frac{6}{29}\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{52}{29}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -\ 2\,x & - & 13\,y & - & 2\,z & + & 2\,t & = & 0 & \\ & - & \frac{29}{2}\,y & - & 3\,z & + & t & = & 0 & \\ & & & & \frac{3}{29}\,z & - & \frac{1}{29}\,t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 6L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons trois équations principales (trois pivots non nuls : x, y, z) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des

solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & - & 13y & - & 2z & + & 2t & = & 0 \\ & - & \frac{29}{2}y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ & & & & \frac{3}{29}z & - & \frac{1}{29}t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{13}{2}y - z + t \\ y & = & -\frac{6}{29}z + \frac{2}{29}t \\ z & = & \frac{1}{3}t \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{2}{3}a \\ y & = & 0 \\ z & = & \frac{1}{3}a \\ t & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{2}{3},\, 0,\, \frac{1}{3},\, 1\right)\right).$$

Corrigé 24. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 4

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -6x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ -18x & + & 6y & + & 3z & + & 6t & = & -3 \\ -6x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ 6x & - & 2y & - & z & - & 2t & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -6x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et trois équations auxiliaires. Il y a par conséquent trois inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -6x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z + \frac{1}{3}t + \frac{1}{6} \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{6} \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 25. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 4

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 4y & + & 4z & = & -5 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 2z & = & 11 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3x & + & 3y & - & z & = & 0 & \\ 4x & - & 4y & + & 4z & = & -5 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & - & 3y & + & 2z & = & 11 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3x & + & 3y & - & z & = & 0 & \\ & - & 8y & + & \frac{16}{3}z & = & -5 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{3}L_1) \\ & - & 3y & + & 2z & = & 11 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3x & + & 3y & - & z & = & 0 & \\ & - & 3y & + & 2z & = & 11 & \\ & - & 8y & + & \frac{16}{3}z & = & -5 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3x & + & 3y & - & z & = & 0 & \\ & - & 3y & + & 2z & = & 11 & \\ & & & & 0 & = & -\frac{103}{3} & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{3}L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 26. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 4

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -4x & + & 2y & + & 8z & + & 2t & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 4z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 4z & - & t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 4z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -2x & + & y & + & 4z & + & t & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -4x & + & 2y & + & 8z & + & 2t & = & 0 & \\ 2x & - & y & - & 4z & - & t & = & 0 & \\ 2x & - & y & - & 4z & - & t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -2x & + & y & + & 4z & + & t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et trois équations auxiliaires. Il y a par conséquent trois inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & + & y & + & 4z & + & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}y + 2z + \frac{1}{2}t \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}a + 2b + \frac{1}{2}c \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 0,\ 0\right), (2,\ 0,\ 1,\ 0), \left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 1\right)\right).$$

Corrigé 27. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 4

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -8x & & & - & 6z & = & 0 \\ & & y & - & 18z & = & 0 \\ -4x & - & y & + & 14z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -4x & - & y & + & 14z & = & 0 & \\ & & y & - & 18z & = & 0 & \\ -8x & & & - & 6z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -4x & - & y & + & 14z & = & 0 & \\ & & y & - & 18z & = & 0 & \\ & & 2y & - & 34z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -4x & - & y & + & 14z & = & 0 & \\ & & y & - & 18z & = & 0 & \\ & & & & 2z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & y & + & 14z & = & 0 \\ & & y & - & 18z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{4}y + \frac{7}{2}z \\ y & = & 18z \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 28. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 4

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -8x & + & 8y & - & 7z & = & 1 \\ -x & & & + & 2z & = & 7 \\ x & - & y & & & = & -8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & & & + & 2z & = & 7 & \\ -8x & + & 8y & - & 7z & = & 1 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ x & - & y & & & = & -8 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & & & + & 2z & = & 7 & \\ & & 8y & - & 23z & = & -55 & (L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1) \\ & - & y & + & 2z & = & -1 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & & & + & 2z & = & 7 & \\ & - & y & + & 2z & = & -1 & \\ & & 8y & - & 23z & = & -55 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & & & + & 2z & = & 7 & \\ & - & y & + & 2z & = & -1 & \\ & & & - & 7z & = & -63 & (L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2z &=& 7 \\ -y+2z &=& -1 \\ -7z &=& -63 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2z-7 \\ y &=& 2z+1 \\ z &=& 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 11 \\ y &=& 19 \\ z &=& 9 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 29. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 4

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x-14y-z &=& 0 \\ x-2y-z+2t &=& 0 \\ x+14y+z &=& 0 \\ x+14y+z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} -x-14y-z &=& 0 & \\ -16y-2z+2t &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \\ 0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3+L_1) \\ 0 &=& 0 & (L_4 \leftarrow L_4+L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x-14y-z &=& 0 \\ -16y-2z+2t &=& 0 \\ 0 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -14y-z \\ y &=& -\frac{1}{8}z+\frac{1}{8}t \\ z &=& a \\ t &=& b \end{array}\right. \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{3}{4}a-\frac{7}{4}b \\ y &=& -\frac{1}{8}a+\frac{1}{8}b \\ z &=& a \\ t &=& b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}, 1, 0\right), \left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{8}, 0, 1\right)\right).$$

Corrigé 30. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 4

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-16z+4t &=& 4 \\ -x+21z-5t &=& 1 \\ 2x-2z+2t &=& 1 \\ -2x-2y-11z-2t &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x-16z+4t &=& 4 & \\ 5z-t &=& 5 & (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \\ 30z-6t &=& -7 & (L_3 \leftarrow L_3-2L_1) \\ -2y-43z+6t &=& 7 & (L_4 \leftarrow L_4+2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x-16z+4t &=& 4 & \\ -2y-43z+6t &=& 7 & \\ 30z-6t &=& -7 & \\ 5z-t &=& 5 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x-16z+4t &=& 4 & \\ -2y-43z+6t &=& 7 & \\ 5z-t &=& 5 & \\ 30z-6t &=& -7 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x-16z+4t &=& 4 & \\ -2y-43z+6t &=& 7 & \\ 5z-t &=& 5 & \\ 0 &=& -37 & (L_4 \leftarrow L_4-6L_3) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 31. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ -2x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ -25x & + & 12y & - & 13z & + & 13t & = & 0 \\ -4x & + & y & - & 3z & + & 3t & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 1 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & - & \frac{1}{2}y & - & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{2}t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{25}{2}L_1) \\ & - & y & - & z & + & t & = & 2 & (L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 & \\ & - & \frac{1}{2}y & - & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{2}t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 1 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & y & - & z & + & t & = & 2 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 & \\ & - & \frac{1}{2}y & - & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{2}t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 1 & \\ & & & & & & 0 & = & 2 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 32. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 6z & - & 2t & = & 3 \\ x & + & y & + & 3z & - & t & = & 0 \\ -x & - & y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ 4x & + & 4y & + & 12z & - & 4t & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & + & 3z & - & t & = & 0 & \\ 2x & + & 2y & + & 6z & - & 2t & = & 3 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -x & - & y & - & 3z & + & t & = & 0 & \\ 4x & + & 4y & + & 12z & - & 4t & = & -3 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & + & 3z & - & t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 3 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & & & & & & 0 & = & -3 & (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 33. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -10x & + & 4y & - & 6z & - & 6t & = & 0 \\ x & - & 6y & - & z & - & t & = & 0 \\ 4x & + & 6y & + & 2z & + & 4t & = & 0 \\ & & 9y & & & + & 2t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 6y & - & z & - & t & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -10x & + & 4y & - & 6z & - & 6t & = & 0 & \\ 4x & + & 6y & + & 2z & + & 4t & = & 0 & \\ & & 9y & & & + & 2t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 6y & - & z & - & t & = & 0 & \\ & - & 56y & - & 16z & - & 16t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1) \\ & & 30y & + & 6z & + & 8t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \\ & & 9y & & & + & 2t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 6y & - & z & - & t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \\ & & 9y & & & + & 2t & = & 0 & \\ & & 30y & + & 6z & + & 8t & = & 0 & \\ & - & 56y & - & 16z & - & 16t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 6y & - & z & - & t & = & 0 & \\ & & 9y & & & + & 2t & = & 0 & \\ & & & & 6z & + & \frac{4}{3}t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{10}{3}L_2) \\ & & & - & 16z & - & \frac{32}{9}t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{56}{9}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 6y & - & z & - & t & = & 0 & \\ & & 9y & & & + & 2t & = & 0 & \\ & & & & 6z & + & \frac{4}{3}t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{8}{3}L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons trois équations principales (trois pivots non nuls : x, y, z) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des

solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 6\,y & - & z & - & t & = & 0\\ & & 9\,y & & & + & 2\,t & = & 0\\ & & & & 6\,z & + & \frac{4}{3}\,t & = & 0\\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6y+z+t\\ y & = & -\frac{2}{9}t\\ z & = & -\frac{2}{9}t\\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{5}{9}a\\ y & = & -\frac{2}{9}a\\ z & = & -\frac{2}{9}a\\ t & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(-\frac{5}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, 1\right)\right).$$

Corrigé 34. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} & 3\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 20\\ & 5\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 6\\ - & x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} - & x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 & \\ & 5\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 6 & \\ & 3\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 20 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} - & x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 & \\ & & - & 11\,y & + & 12\,z & = & -19 & (L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1)\\ & & - & 7\,y & + & 8\,z & = & 5 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} - & x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 & \\ & & - & 7\,y & + & 8\,z & = & 5 & \\ & & - & 11\,y & + & 12\,z & = & -19 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} - & x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 & \\ & & - & 7\,y & + & 8\,z & = & 5 & \\ & & & & - & \frac{4}{7}\,z & = & -\frac{188}{7} & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{7}L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & x & - & 3\,y & + & 2\,z & = & -5\\ & & - & 7\,y & + & 8\,z & = & 5\\ & & & & - & \frac{4}{7}\,z & = & -\frac{188}{7} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3y+2z+5\\ y & = & \frac{8}{7}z - \frac{5}{7}\\ z & = & 47 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -60\\ y & = & 53\\ z & = & 47 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 35. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & 4\,x & - & 2\,y & + & 5\,z & = & 1\\ & x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 9\\ & & & 2\,y & - & z & = & -33 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} & x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 9 & \\ - & 4\,x & - & 2\,y & + & 5\,z & = & 1 & (L_2 \leftrightarrow L_1)\\ & & & 2\,y & - & z & = & -33 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 9 & \\ & & 6\,y & - & 3\,z & = & 37 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1)\\ & & 2\,y & - & z & = & -33 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 9 & \\ & & 2\,y & - & z & = & -33 & \\ & & 6\,y & - & 3\,z & = & 37 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 9 & \\ & & 2\,y & - & z & = & -33 & \\ & & & & 0 & = & 136 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 36. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & - & y & + & z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y+z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$
$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a+b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\, 1,\, 0)\,,(1,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 37. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 5

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & 5z & = & 0 \\ -3x & & & - & 6z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -2x & + & y & - & 5z & = & 0 & \\ & - & \frac{3}{2}y & + & \frac{3}{2}z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & 5z & = & 0 \\ & - & \frac{3}{2}y & + & \frac{3}{2}z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}z \\ y & = & z \\ z & = & a \end{array}\right.$$
$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2a \\ y & = & a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\, 1,\, 1)\right).$$

Corrigé 38. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 6

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & & & & & = & 0 \\ -8x & - & 12y & + & 4z & = & 0 \\ -x & - & 6y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & - & 6y & + & 2z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -8x & - & 12y & + & 4z & = & 0 & \\ -4x & & & & & = & 0 & \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & - & 6y & + & 2z & = & 0 & \\ & & 36y & - & 12z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1) \\ & & 24y & - & 8z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & - & 6y & + & 2z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & 24y & - & 8z & = & 0 & \\ & & 36y & - & 12z & = & 0 & \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & - & 6y & + & 2z & = & 0 & \\ & & 24y & - & 8z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions.

Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 6y & + & 2z & = & 0 \\ & & 24y & - & 8z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -6y+2z \\ y & = & \frac{1}{3}z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{3}a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(0,\, \frac{1}{3},\, 1\right)\right).$$

Corrigé 39. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 6

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 0 \\ & & y & + & 3z & + & 2t & = & -1 \\ & & y & + & 5z & + & 6t & = & -1 \\ -3x & & & + & 4z & + & 5t & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 0 & \\ & & y & + & 3z & + & 2t & = & -1 & \\ & & y & + & 5z & + & 6t & = & -1 & \\ & & \frac{3}{2}y & + & \frac{17}{2}z & + & 11t & = & 3 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 0 & \\ & & y & + & 3z & + & 2t & = & -1 & \\ & & & & 2z & + & 4t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ & & & & 4z & + & 8t & = & \frac{9}{2} & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{2}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 0 & \\ & & y & + & 3z & + & 2t & = & -1 & \\ & & & & 2z & + & 4t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & \frac{9}{2} & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 40. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 6

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 4z & = & 0 \\ & - & 4y & - & 6z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & - & 4z & = & 0 & \\ & - & 4y & - & 6z & = & 0 & \\ & & 2y & + & 6z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & - & 4z & = & 0 & \\ & & 2y & + & 6z & = & 0 & \\ & - & 4y & - & 6z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & - & 4z & = & 0 & \\ & & 2y & + & 6z & = & 0 & \\ & & & & 6z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 4z & = & 0 \\ & & 2y & + & 6z & = & 0 \\ & & & & 6z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y+4z \\ y & = & -3z \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 41. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 6

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 5z & = & -1 \\ -4x & + & 2y & + & 10z & = & 2 \\ -2x & + & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & y & - & 5z & = & -1 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des

solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & - & y & - & 5\,z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}y+\frac{5}{2}z-\frac{1}{2} \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}a+\frac{5}{2}b-\frac{1}{2} \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 42. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 6

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcr} - & x & + & y & - & z & - & 2\,t & = & 0 \\ - & x & + & y & - & z & - & 2\,t & = & 0 \\ & x & - & y & + & z & + & 2\,t & = & 0 \\ - & x & + & y & - & z & - & 2\,t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrcrl} - & x & + & y & - & z & - & 2\,t & = & 0 & \\ & & & & & & & 0 & = & 0 & (L_2\leftarrow L_2-L_1) \\ & & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3\leftarrow L_3+L_1) \\ & & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4\leftarrow L_4-L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et trois équations auxiliaires. Il y a par conséquent trois inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcr} - & x & + & y & - & z & - & 2\,t & = & 0 \\ & & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y-z-2t \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a-b-2c \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 1,\, 0,\, 0)\,,(-1,\, 0,\, 1,\, 0)\,,(-2,\, 0,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 43. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z)\in\mathbb{R}^3$. Alors : ← page 6

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} & x & - & 5\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ - & x & - & 4\,y & - & z & = & 3 \\ - & x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 5\,y & + & 4\,z & = & 0 & \\ & - & 9\,y & + & 3\,z & = & 3 & (L_2\leftarrow L_2+L_1) \\ & - & 3\,y & + & z & = & 1 & (L_3\leftarrow L_3+L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 5\,y & + & 4\,z & = & 0 & \\ & - & 3\,y & + & z & = & 1 & \\ & - & 9\,y & + & 3\,z & = & 3 & (L_3\leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 5\,y & + & 4\,z & = & 0 & \\ & - & 3\,y & + & z & = & 1 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3\leftarrow L_3-3L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 5\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5y-4z \\ y & = & \frac{1}{3}z-\frac{1}{3} \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{7}{3}a-\frac{5}{3} \\ y & = & \frac{1}{3}a-\frac{1}{3} \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 44. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 6

$$\begin{cases} 14x + 14z + t = 5 \\ -3x - 2y + 2z - 2t = 0 \\ -8x - 2z - t = 0 \\ 9x + y + 2t = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - 2y + 2z - 2t = 0 \\ 14x + 14z + t = 5 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -8x - 2z - t = 0 \\ 9x + y + 2t = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - 2y + 2z - 2t = 0 \\ -\frac{28}{3}y + \frac{70}{3}z - \frac{25}{3}t = 5 & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{14}{3}L_1) \\ \frac{16}{3}y - \frac{22}{3}z + \frac{13}{3}t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{3}L_1) \\ -5y + 6z - 4t = -3 & (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - 2y + 2z - 2t = 0 \\ -5y + 6z - 4t = -3 \\ \frac{16}{3}y - \frac{22}{3}z + \frac{13}{3}t = 0 \\ -\frac{28}{3}y + \frac{70}{3}z - \frac{25}{3}t = 5 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - 2y + 2z - 2t = 0 \\ -5y + 6z - 4t = -3 \\ -\frac{14}{15}z + \frac{1}{15}t = -\frac{16}{5} & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{16}{15}L_2) \\ \frac{182}{15}z - \frac{13}{15}t = \frac{53}{5} & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{28}{15}L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - 2y + 2z - 2t = 0 \\ -5y + 6z - 4t = -3 \\ -\frac{14}{15}z + \frac{1}{15}t = -\frac{16}{5} \\ 0 = -31 & (L_4 \leftarrow L_4 + 13L_3) \end{cases}$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 45. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 6

$$\begin{cases} 5x + 3y + 3z - 4t = -6 \\ -7x + 5y + 5z + t = -79 \\ 2y + 2z - t = -19 \\ -x + 3y + 3z - t = -33 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 3y + 3z - t = -33 \\ -7x + 5y + 5z + t = -79 \\ 2y + 2z - t = -19 \\ 5x + 3y + 3z - 4t = -6 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 3y + 3z - t = -33 \\ -16y - 16z + 8t = 152 & (L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1) \\ 2y + 2z - t = -19 \\ 18y + 18z - 9t = -171 & (L_4 \leftarrow L_4 + 5L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 3y + 3z - t = -33 \\ 2y + 2z - t = -19 \\ -16y - 16z + 8t = 152 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ 18y + 18z - 9t = -171 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 3y + 3z - t = -33 \\ 2y + 2z - t = -19 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2) \\ 0 = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 9L_2) \end{cases}$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\begin{cases} -x + 3y + 3z - t = -33 \\ 2y + 2z - t = -19 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 3y + 3z - t + 33 \\ y = -z + \frac{1}{2}t - \frac{19}{2} \\ z = a \\ t = b \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = \frac{1}{2}b + \frac{9}{2} \\ y = -a + \frac{1}{2}b - \frac{19}{2} \\ z = a \\ t = b \end{cases}$$

d'où le résultat.

Corrigé 46. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 7

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 \\ & - & y & + & z & & & = & 2 \\ 3x & - & 4y & + & 3z & + & 3t & = & 16 \\ -4x & + & 7y & - & 3z & - & t & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 & \\ & - & y & + & z & & & = & 2 & \\ & & & & 4z & + & 6t & = & 16 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & & \frac{5}{3}y & - & \frac{13}{3}z & - & 5t & = & 4 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{4}{3}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 & \\ & - & y & + & z & & & = & 2 & \\ & & & & 4z & + & 6t & = & 16 & \\ & & & - & \frac{8}{3}z & - & 5t & = & \frac{22}{3} & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{5}{3}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 & \\ & - & y & + & z & & & = & 2 & \\ & & & - & \frac{8}{3}z & - & 5t & = & \frac{22}{3} & \\ & & & & 4z & + & 6t & = & 16 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 & \\ & - & y & + & z & & & = & 2 & \\ & & & - & \frac{8}{3}z & - & 5t & = & \frac{22}{3} & \\ & & & & & - & \frac{3}{2}t & = & 27 & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2}L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 \\ & - & y & + & z & & & = & 2 \\ & & & - & \frac{8}{3}z & - & 5t & = & \frac{22}{3} \\ & & & & & - & \frac{3}{2}t & = & 27 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}z + t \\ y & = & z - 2 \\ z & = & -\frac{15}{8}t - \frac{11}{4} \\ t & = & -18 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 31 \\ y & = & 29 \\ z & = & 31 \\ t & = & -18 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 47. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 7

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & = & 1 & \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 2 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ x & + & y & - & z & = & 1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & = & 1 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y + z + 1 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a + b + 1 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 48. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 7

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & & & & & - & t & = & 0 \\ -2x & - & 4y & - & z & - & 2t & = & -4 \\ -x & - & 2y & & & - & t & = & 0 \\ -13x & + & 4y & & & - & 9t & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -x & & & & & - & t & = & 0 & \\ & - & 4y & - & z & & & = & -4 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & - & 2y & & & & & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & & 4y & & & + & 4t & = & 4 & (L_4 \leftarrow L_4 - 13L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -x & & & & & - & t & = & 0 & \\ & - & 2y & & & & & = & 0 & \\ & - & 4y & - & z & & & = & -4 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & 4y & & & + & 4t & = & 4 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -x & & & & & - & t & = & 0 & \\ & - & 2y & & & & & = & 0 & \\ & & & - & z & & & = & -4 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ & & & & & & 4t & = & 4 & (L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} -x & & & -t & = & 0 \\ & -2y & & & = & 0 \\ & & -z & & = & -4 \\ & & & 4t & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & 0 \\ z & = & 4 \\ t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & 0 \\ z & = & 4 \\ t & = & 1 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 49. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 7

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} -x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcrl} -x & -y & +z & = & 0 & \\ & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} -x & -y & +z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y+z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a+b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\, 1,\, 0)\,,(1,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 50. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 7

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} -7x & +6y & -9z & -t & = & 0 \\ -5x & -4y & -11z & & = & -1 \\ -2x & +3y & -4z & -2t & = & -41 \\ -4x & +7y & -6z & -3t & = & -54 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} -2x & +3y & -4z & -2t & = & -41 & \\ -5x & -4y & -11z & & = & -1 & \\ -7x & +6y & -9z & -t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -4x & +7y & -6z & -3t & = & -54 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} -2x & +3y & -4z & -2t & = & -41 & \\ & -\frac{23}{2}y & -z & +5t & = & \frac{203}{2} & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{2}L_1) \\ & -\frac{9}{2}y & +5z & +6t & = & \frac{287}{2} & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{2}L_1) \\ & y & +2z & +t & = & 28 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} -2x & +3y & -4z & -2t & = & -41 & \\ & y & +2z & +t & = & 28 & \\ & -\frac{9}{2}y & +5z & +6t & = & \frac{287}{2} & \\ & -\frac{23}{2}y & -z & +5t & = & \frac{203}{2} & (L_4 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} -2x & +3y & -4z & -2t & = & -41 & \\ & y & +2z & +t & = & 28 & \\ & & 14z & +\frac{21}{2}t & = & \frac{539}{2} & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{9}{2}L_2) \\ & & 22z & +\frac{33}{2}t & = & \frac{847}{2} & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{23}{2}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} -2x & +3y & -4z & -2t & = & -41 & \\ & y & +2z & +t & = & 28 & \\ & & 14z & +\frac{21}{2}t & = & \frac{539}{2} & \\ & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{11}{7}L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons trois équations principales (trois pivots non nuls : x, y, z) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des

solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} -&2x&+&3y&-&4z&-&2t&=&-41\\ &&&y&+&2z&+&t&=&28\\ &&&&&14z&+&\frac{21}{2}t&=&\frac{539}{2}\\ &&&&&&&0&=&0\end{array}\right. \iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&\frac{3}{2}y-2z-t+\frac{41}{2}\\ y&=&-2z-t+28\\ z&=&-\frac{3}{4}t+\frac{77}{4}\\ t&=&a\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&\frac{5}{4}a-\frac{135}{4}\\ y&=&\frac{1}{2}a-\frac{21}{2}\\ z&=&-\frac{3}{4}a+\frac{77}{4}\\ t&=&a\end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 51. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 7

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} &x&-&y&+&4z&-&t&=&-1\\ -&5x&-&15y&+&z&+&6t&=&0\\ -&7x&-&17y&-&2z&+&8t&=&-24\\ &&&y&-&3z&+&t&=&-143\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x&-&y&+&4z&-&t&=&-1&\\ &-&20y&+&21z&+&t&=&-5&(L_2\leftarrow L_2+5L_1)\\ &-&24y&+&26z&+&t&=&-31&(L_3\leftarrow L_3+7L_1)\\ &&y&-&3z&+&t&=&-143&\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x&-&y&+&4z&-&t&=&-1&\\ &&y&-&3z&+&t&=&-143&\\ &-&24y&+&26z&+&t&=&-31&\\ &-&20y&+&21z&+&t&=&-5&(L_4\leftrightarrow L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x&-&y&+&4z&-&t&=&-1&\\ &&y&-&3z&+&t&=&-143&\\ &&&-&46z&+&25t&=&-3463&(L_3\leftarrow L_3+24L_2)\\ &&&-&39z&+&21t&=&-2865&(L_4\leftarrow L_4+20L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x&-&y&+&4z&-&t&=&-1&\\ &&y&-&3z&+&t&=&-143&\\ &&&-&39z&+&21t&=&-2865&\\ &&&-&46z&+&25t&=&-3463&(L_4\leftrightarrow L_3)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x&-&y&+&4z&-&t&=&-1&\\ &&y&-&3z&+&t&=&-143&\\ &&&-&39z&+&21t&=&-2865&\\ &&&&&&\frac{3}{13}t&=&-\frac{1089}{13}&(L_4\leftarrow L_4-\frac{46}{39}L_3)\end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x&-&y&+&4z&-&t&=&-1\\ &&y&-&3z&+&t&=&-143\\ &&&-&39z&+&21t&=&-2865\\ &&&&&&\frac{3}{13}t&=&-\frac{1089}{13}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&y-4z+t-1\\ y&=&3z-t-143\\ z&=&\frac{7}{13}t+\frac{955}{13}\\ t&=&-363\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&-22\\ y&=&-146\\ z&=&-122\\ t&=&-363\end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 52. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 7

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} &8x&-&y&-&z&-&2t&=&1\\ &8x&-&y&-&z&-&2t&=&1\\ -&16x&+&2y&+&2z&+&2t&=&4\\ &16x&-&3y&-&z&+&t&=&-72\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} 8x&-&y&-&z&-&2t&=&1&\\ &&&&&&0&=&0&(L_2\leftarrow L_2-L_1)\\ &&&&&-&2t&=&6&(L_3\leftarrow L_3+2L_1)\\ &-&y&+&z&+&5t&=&-74&(L_4\leftarrow L_4-2L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} 8x&-&y&-&z&-&2t&=&1&\\ &-&y&+&z&+&5t&=&-74&\\ &&&&&-&2t&=&6&\\ &&&&&&0&=&0&(L_4\leftrightarrow L_2)\end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons trois équations principales (trois pivots non nuls : x, y, t) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des

solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} 8\,x & - & y & - & z & - & 2\,t & = & 1 \\ & - & y & + & z & + & 5\,t & = & -74 \\ & & & & & - & 2\,t & = & 6 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \\ y & = & z + 5t + 74 \\ z & = & a \\ t & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{4}a + \frac{27}{4} \\ y & = & a + 59 \\ z & = & a \\ t & = & -3 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 8

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} & 3\,x & + & 6\,y & - & 18\,z & = & 1 \\ - & x & - & 2\,y & + & 6\,z & = & 2 \\ - & x & - & 2\,y & + & 6\,z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & - & 2\,y & + & 6\,z & = & 2 & \\ & 3\,x & + & 6\,y & - & 18\,z & = & 1 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ - & x & - & 2\,y & + & 6\,z & = & -1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & - & 2\,y & + & 6\,z & = & 2 & \\ & & & & & 0 & = & 7 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & & & & & 0 & = & -3 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 54. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 8

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 2\,x & & & & & = & -1 \\ - & 7\,x & - & 7\,y & - & 14\,z & = & 28 \\ - & 5\,x & - & 4\,y & - & 8\,z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & 2\,x & & & & & = & -1 & \\ & & - & 7\,y & - & 14\,z & = & \frac{63}{2} & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{2}L_1) \\ & & - & 4\,y & - & 8\,z & = & \frac{11}{2} & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & 2\,x & & & & & = & -1 & \\ & & - & 4\,y & - & 8\,z & = & \frac{11}{2} & \\ & & - & 7\,y & - & 14\,z & = & \frac{63}{2} & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & 2\,x & & & & & = & -1 & \\ & & - & 4\,y & - & 8\,z & = & \frac{11}{2} & \\ & & & & & 0 & = & \frac{175}{8} & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{4}L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 55. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 8

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 7\,x & + & 8\,y & - & 24\,z & - & 8\,t & = & 0 \\ & x & & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 \\ & x & + & y & - & 3\,z & - & t & = & 0 \\ - & 25\,x & - & 2\,y & & & - & 2\,t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} & x & & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 & \\ & 7\,x & + & 8\,y & - & 24\,z & - & 8\,t & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & x & + & y & - & 3\,z & - & t & = & 0 & \\ - & 25\,x & - & 2\,y & & & - & 2\,t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x & & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 & \\ & & 8\,y & + & 18\,z & + & 13\,t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1) \\ & & y & + & 3\,z & + & 2\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & - & 2\,y & - & 150\,z & - & 77\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 25L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x & & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 & \\ & & y & + & 3\,z & + & 2\,t & = & 0 & \\ & & 8\,y & + & 18\,z & + & 13\,t & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & 2\,y & - & 150\,z & - & 77\,t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 & \\ & y & + & 3\,z & + & 2\,t & = & 0 & \\ & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2) \\ & & - & 144\,z & - & 73\,t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 & \\ & y & + & 3\,z & + & 2\,t & = & 0 & \\ & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 & \\ & & & & - & t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 24L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0\\ & & y & + & 3\,z & + & 2\,t & = & 0\\ & & & - & 6\,z & - & 3\,t & = & 0\\ & & & & & - & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6z+3t\\ y & = & -3z-2t\\ z & = & -\frac{1}{2}t\\ t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0\\ y & = & 0\\ z & = & 0\\ t & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 56. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 8

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcl} - & x & + & y & + & z & = & 0\\ - & 2\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 2\\ & 5\,x & - & 5\,y & - & 5\,z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcll} - & x & + & y & + & z & = & 0 & \\ & & & & & 0 & = & 2 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)\\ & & & & & 0 & = & 1 & (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 57. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 8

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcl} & x & + & 5\,y & + & z & = & 0\\ - & 3\,x & - & 15\,y & - & 3\,z & = & 0\\ - & x & - & 5\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 5\,y & + & z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1)\\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 5\,y & + & z & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -5y-z\\ y & = & a\\ z & = & b \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -5a-b\\ y & = & a\\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-5,\, 1,\, 0)\,, (-1,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 58. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 8

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcl} - & x & - & 3\,y & + & 8\,z & - & 4\,t & = & 3\\ - & 3\,x & + & y & - & 4\,z & & & = & 13\\ - & 3\,x & & & - & 3\,z & - & t & = & 0\\ - & 6\,x & + & y & - & 7\,z & - & t & = & 13 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrcrl} - & x & - & 3\,y & + & 8\,z & - & 4\,t & = & 3 & \\ & & & 10\,y & - & 28\,z & + & 12\,t & = & 4 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1)\\ & & & 9\,y & - & 27\,z & + & 11\,t & = & -9 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1)\\ & & & 19\,y & - & 55\,z & + & 23\,t & = & -5 & (L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrcrl} - & x & - & 3\,y & + & 8\,z & - & 4\,t & = & 3 & \\ & & & 9\,y & - & 27\,z & + & 11\,t & = & -9 & \\ & & & 10\,y & - & 28\,z & + & 12\,t & = & 4 & (L_3 \leftrightarrow L_2)\\ & & & 19\,y & - & 55\,z & + & 23\,t & = & -5 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrcrl} - & x & - & 3\,y & + & 8\,z & - & 4\,t & = & 3 & \\ & & & 9\,y & - & 27\,z & + & 11\,t & = & -9 & \\ & & & & & 2\,z & - & \frac{2}{9}\,t & = & 14 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{10}{9}L_2)\\ & & & & & 2\,z & - & \frac{2}{9}\,t & = & 14 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{19}{9}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrcrl} - & x & - & 3\,y & + & 8\,z & - & 4\,t & = & 3 & \\ & & & 9\,y & - & 27\,z & + & 11\,t & = & -9 & \\ & & & & & 2\,z & - & \frac{2}{9}\,t & = & 14 & \\ & & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons trois équations principales (trois pivots non nuls : x, y, z) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & - & 3y & + & 8z & - & 4t & = & 3 \\ & & 9y & - & 27z & + & 11t & = & -9 \\ & & & & 2z & - & \frac{2}{9}t & = & 14 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y+8z-4t-3 \\ y & = & 3z-\frac{11}{9}t-1 \\ z & = & \frac{1}{9}t+7 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{4}{9}a-7 \\ y & = & -\frac{8}{9}a+20 \\ z & = & \frac{1}{9}a+7 \\ t & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 59. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 8

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 4y & - & 6z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ -2x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & + & 2y & + & 3z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 2x & - & 4y & - & 6z & = & 0 & \\ -2x & + & 4y & + & 6z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & + & 2y & + & 3z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2+2L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3-2L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2y+3z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2a+3b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\, 1,\, 0)\,, (3,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 60. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 8

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x & - & 11y & + & 2z & + & t & = & 3 \\ -7x & - & 17y & - & 4z & - & 7t & = & -1 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & & & = & -1 \\ & - & 14y & - & 4z & + & 2t & = & 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -3x & - & 11y & + & 2z & + & t & = & 3 & \\ & & \frac{26}{3}y & - & \frac{26}{3}z & - & \frac{28}{3}t & = & -8 & (L_2 \leftarrow L_2-\frac{7}{3}L_1) \\ & - & 9y & - & 3z & + & t & = & 2 & (L_3 \leftarrow L_3+L_1) \\ & - & 14y & - & 4z & + & 2t & = & 8 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -3x & - & 11y & + & 2z & + & t & = & 3 & \\ & & \frac{26}{3}y & - & \frac{26}{3}z & - & \frac{28}{3}t & = & -8 & \\ & & & - & 12z & - & \frac{113}{13}t & = & -\frac{82}{13} & (L_3 \leftarrow L_3+\frac{27}{26}L_2) \\ & & & - & 18z & - & \frac{170}{13}t & = & -\frac{64}{13} & (L_4 \leftarrow L_4+\frac{21}{13}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -3x & - & 11y & + & 2z & + & t & = & 3 & \\ & & \frac{26}{3}y & - & \frac{26}{3}z & - & \frac{28}{3}t & = & -8 & \\ & & & - & 12z & - & \frac{113}{13}t & = & -\frac{82}{13} & \\ & & & & & - & \frac{1}{26}t & = & \frac{59}{13} & (L_4 \leftarrow L_4-\frac{3}{2}L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x & - & 11y & + & 2z & + & t & = & 3 \\ & & \frac{26}{3}y & - & \frac{26}{3}z & - & \frac{28}{3}t & = & -8 \\ & & & - & 12z & - & \frac{113}{13}t & = & -\frac{82}{13} \\ & & & & & - & \frac{1}{26}t & = & \frac{59}{13} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{11}{3}y+\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}t-1 \\ y & = & z+\frac{14}{13}t-\frac{12}{13} \\ z & = & -\frac{113}{156}t+\frac{41}{78} \\ t & = & -118 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 171 \\ y & = & -42 \\ z & = & 86 \\ t & = & -118 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 61. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 9

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & 2x & - & 4y & - & 2z & - & 6t & = 2 \\ - & x & + & 2y & + & z & + & 3t & = 1 \\ & x & - & 2y & - & z & - & 3t & = 0 \\ & x & - & 2y & - & z & - & 3t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & x & + & 2y & + & z & + & 3t & = 1 & \\ & 2x & - & 4y & - & 2z & - & 6t & = 2 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & x & - & 2y & - & z & - & 3t & = 0 & \\ & x & - & 2y & - & z & - & 3t & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & x & + & 2y & + & z & + & 3t & = 1 & \\ & & & & & & & 0 & = 4 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & & & & & & 0 & = 1 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & & & & & & & 0 & = 1 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 62. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 9

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} - & x & - & 9y & - & 10z & = 0 \\ & x & + & 6y & + & z & = 0 \\ & & - & y & - & z & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & x & - & 9y & - & 10z & = 0 & \\ & & - & 3y & - & 9z & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & & - & y & - & z & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & x & - & 9y & - & 10z & = 0 & \\ & & - & y & - & z & = 0 & \\ & & - & 3y & - & 9z & = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & x & - & 9y & - & 10z & = 0 & \\ & & - & y & - & z & = 0 & \\ & & & & - & 6z & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} - & x & - & 9y & - & 10z & = 0 \\ & & - & y & - & z & = 0 \\ & & & & - & 6z & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -9y - 10z \\ y = -z \\ z = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 63. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 9

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 2x & - & 10y & - & 2z & - & t & = 0 \\ & 2x & + & 10y & + & 2z & + & t & = 7 \\ & 2x & + & 10y & + & 2z & + & t & = 4 \\ & 2x & + & 10y & + & 2z & + & t & = -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} - & 2x & - & 10y & - & 2z & - & t & = 0 & \\ & & & & & & & 0 & = 7 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & & & & & & & 0 & = 4 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & & & & & & & 0 & = -2 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 64. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 9

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & x & - & 2y & + & 5z & - & 8t & = -1 \\ & 2x & & & - & 2z & & & = 1 \\ & x & - & y & + & 2z & - & 4t & = -1 \\ - & 2x & & & + & 2z & & & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & - & 2y & + & 5z & - & 8t & = -1 & \\ & & 4y & - & 12z & + & 16t & = 3 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & y & - & 3z & + & 4t & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & - & 4y & + & 12z & - & 16t & = -1 & (L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & - & 2y & + & 5z & - & 8t & = -1 & \\ & & y & - & 3z & + & 4t & = 0 & \\ & & 4y & - & 12z & + & 16t & = 3 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & 4y & + & 12z & - & 16t & = -1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & - & 2y & + & 5z & - & 8t & = -1 & \\ & & y & - & 3z & + & 4t & = 0 & \\ & & & & & & 0 & = 3 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2) \\ & & & & & & 0 & = -1 & (L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 65. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 9

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -8x & - & 24y & + & 4z & = & 4 \\ 6x & + & 18y & - & 3z & = & -3 \\ 2x & + & 6y & - & z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 6y & - & z & = & -1 & \\ 6x & + & 18y & - & 3z & = & -3 & \\ -8x & - & 24y & + & 4z & = & 4 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 6y & - & z & = & -1 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & - & z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 66. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 9

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -6x & + & 12y & - & 2z & = & -2 \\ 3x & - & 4y & + & 3z & = & 1 \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & - & 4y & + & 3z & = & 1 & \\ -6x & + & 12y & - & 2z & = & -2 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & - & 4y & + & 3z & = & 1 & \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & - & 4y & + & 3z & = & 1 & \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 4y & + & 3z & = & 1 \\ & & 4y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{4}{3}y - z + \frac{1}{3} \\ y & = & -z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{7}{3}a + \frac{1}{3} \\ y & = & -a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 67. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 9

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 11x & + & 13y & - & 5z & = & 0 \\ -10x & - & 12y & + & z & = & 0 \\ -10x & - & 12y & - & 7z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -10x & - & 12y & + & z & = & 0 & \\ 11x & + & 13y & - & 5z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -10x & - & 12y & - & 7z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -10x & - & 12y & + & z & = & 0 & \\ & - & \frac{1}{5}y & - & \frac{39}{10}z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{11}{10}L_1) \\ & & & - & 8z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 10\,x & - & 12\,y & + & z & = & 0 \\ & & - & \frac{1}{5}\,y & - & \frac{39}{10}\,z & = & 0 \\ & & & & - & 8\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{6}{5}y + \frac{1}{10}z \\ y & = & -\frac{39}{2}z \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 68. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 10

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & -3 \\ & x & + & y & + & z & = & 3 \\ & x & + & y & & & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} & x & + & y & + & z & = & 3 & \\ - & 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & -3 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & x & + & y & & & = & -1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x & + & y & + & z & = & 3 & \\ & & & & z & = & 3 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & & - & z & = & -4 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x & + & y & + & z & = & 3 & \\ & & & & z & = & 3 & \\ & & & & 0 & = & -1 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 69. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 10

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 4\,x & - & 4\,y & + & 8\,z & = & 4 \\ & 8\,x & + & 8\,y & - & 16\,z & = & -8 \\ & x & + & y & - & 2\,z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} & x & + & y & - & 2\,z & = & -1 & \\ & 8\,x & + & 8\,y & - & 16\,z & = & -8 & \\ - & 4\,x & - & 4\,y & + & 8\,z & = & 4 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x & + & y & - & 2\,z & = & -1 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} x & + & y & - & 2\,z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y + 2z - 1 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a + 2b - 1 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 70. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 10

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3\,x & + & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x & - & y & + & z & = & 0 & \\ & & 6\,y & - & 6\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x & - & y & + & z & = & 0 & \\ & & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 & \\ & & 6\,y & - & 6\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x & - & y & + & z & = & 0 & \\ & & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 & \\ & & & & 3\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 3\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y-z \\ y & = & \frac{3}{2}z \\ z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 71. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 10

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcl} & 2\,x & + & 16\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & x & + & 8\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ - & x & - & 8\,y & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcll} & x & + & 8\,y & - & 2\,z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & 2\,x & + & 16\,y & - & 4\,z & = & 0 & \\ - & x & - & 8\,y & + & 2\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 8\,y & - & 2\,z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 8\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -8y+2z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -8a+2b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-8,\, 1,\, 0)\,,(2,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 72. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 10

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcl} & x & - & y & + & z & + & t & = & -1 \\ - & 2\,x & + & y & - & z & - & t & = & 0 \\ & 3\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & + & 2\,t & = & 0 \\ - & x & + & y & - & z & - & t & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & - & y & + & z & + & t & = & -1 & \\ & - & y & + & z & + & t & = & -2 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & y & - & z & - & t & = & 3 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\ & & & & & & 0 & = & -2 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & - & y & + & z & + & t & = & -1 & \\ & - & y & + & z & + & t & = & -2 & \\ & & & & & & 0 & = & 1 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ & & & & & & 0 & = & -2 & \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 73. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 10

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcl} & 10\,x & - & 20\,y & + & 10\,z & + & 10\,t & = & 2 \\ & x & - & 2\,y & + & z & + & t & = & 1 \\ - & x & + & 2\,y & - & z & - & t & = & -1 \\ - & 3\,x & + & 6\,y & - & 3\,z & - & 3\,t & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrcll} & x & - & 2\,y & + & z & + & t & = & 1 & \\ & 10\,x & - & 20\,y & + & 10\,z & + & 10\,t & = & 2 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ - & x & + & 2\,y & - & z & - & t & = & -1 & \\ - & 3\,x & + & 6\,y & - & 3\,z & - & 3\,t & = & 6 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & - & 2\,y & + & z & + & t & = & 1 & \\ & & & & & & 0 & = & -8 & (L_2 \leftarrow L_2 - 10L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 9 & (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 74. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 10

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 2\,y & & & = & 0 \\ 3\,x & + & 3\,y & - & z & = & 1 \\ -\;2\,x & - & 2\,y & & & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x & + & 2\,y & & & = & 0 & \\ & & & - & z & = & 1 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1) \\ & & & & 0 & = & 1 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 75. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 10

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & + & z & = & -1 \\ 7\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & -2 \\ -\;12\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3\,x & + & y & + & z & = & -1 & \\ & - & \frac{1}{3}\,y & - & \frac{1}{3}\,z & = & \frac{1}{3} & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{3}L_1) \\ & & 2\,y & + & 2\,z & = & -2 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3\,x & + & y & + & z & = & -1 & \\ & - & \frac{1}{3}\,y & - & \frac{1}{3}\,z & = & \frac{1}{3} & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & + & z & = & -1 \\ & - & \frac{1}{3}\,y & - & \frac{1}{3}\,z & = & \frac{1}{3} \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} \\ y & = & -z - 1 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -a - 1 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 76. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 11

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & - & 2\,z & + & t & = & 0 \\ -\;4\,x & + & 4\,y & + & 8\,z & - & 4\,t & = & 0 \\ x & - & y & - & 2\,z & + & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & - & y & - & 2\,z & + & t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et trois équations auxiliaires. Il y a par conséquent trois inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & + & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y + 2z - t \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a + 2b - c \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 1,\, 0,\, 0)\,, (2,\, 0,\, 1,\, 0)\,, (-1,\, 0,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 77. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 11

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6\,x & - & 2\,y & + & 6\,z & = & 2 \\ 12\,x & - & 4\,y & + & 12\,z & = & 4 \\ -\;6\,x & + & 2\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 6\,x & - & 2\,y & + & 6\,z & = & 2 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x - 2y + 6z &=& 2 \\ 0 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{3}y - z + \frac{1}{3} \\ y &=& a \\ z &=& b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{3}a - b + \frac{1}{3} \\ y &=& a \\ z &=& b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 78. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 11

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x + y + 3z &=& 0 \\ -2x + y + 5z - 2t &=& 2 \\ -x + 9z &=& 6 \\ 5x - 4y + 3z + 9t &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + 9z &=& 6 & \\ -2x + y + 5z - 2t &=& 2 & \\ -2x + y + 3z &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 5x - 4y + 3z + 9t &=& 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + 9z &=& 6 & \\ y - 13z - 2t &=& -10 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ y - 15z &=& -12 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ -4y + 48z + 9t &=& 30 & (L_4 \leftarrow L_4 + 5L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + 9z &=& 6 & \\ y - 13z - 2t &=& -10 & \\ -2z + 2t &=& -2 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ -4z + t &=& -10 & (L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + 9z &=& 6 & \\ y - 13z - 2t &=& -10 & \\ -2z + 2t &=& -2 & \\ -3t &=& -6 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + 9z &=& 6 \\ y - 13z - 2t &=& -10 \\ -2z + 2t &=& -2 \\ -3t &=& -6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 9z - 6 \\ y &=& 13z + 2t - 10 \\ z &=& t + 1 \\ t &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 21 \\ y &=& 33 \\ z &=& 3 \\ t &=& 2 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 79. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 11

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + 4y + 3z + t &=& 16 \\ -2x + 7z - t &=& -9 \\ -3y + 2z - t &=& -2 \\ x + 4y - 4z + 2t &=& -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + 4y + 3z + t &=& 16 & \\ -8y + z - 3t &=& -41 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ -3y + 2z - t &=& -2 & \\ 8y - z + 3t &=& 14 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + 4y + 3z + t &=& 16 & \\ -3y + 2z - t &=& -2 & \\ -8y + z - 3t &=& -41 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ 8y - z + 3t &=& 14 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + 4y + 3z + t &=& 16 & \\ -3y + 2z - t &=& -2 & \\ -\frac{13}{3}z - \frac{1}{3}t &=& -\frac{107}{3} & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{3}L_2) \\ \frac{13}{3}z + \frac{1}{3}t &=& \frac{26}{3} & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{8}{3}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + 4y + 3z + t &=& 16 & \\ -3y + 2z - t &=& -2 & \\ -\frac{13}{3}z - \frac{1}{3}t &=& -\frac{107}{3} & \\ 0 &=& -27 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 80. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 11

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -10\,x & - & 10\,y & + & 10\,z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ -3\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -10\,x & - & 10\,y & + & 10\,z & = & 0 & \\ -3\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y+z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a+b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left((-1,\, 1,\, 0) \,, (1,\, 0,\, 1) \right).$$

Corrigé 81. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 11

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & - & z & = & 5 \\ x & - & 2\,y & - & z & = & 5 \\ -6\,x & + & 12\,y & + & 6\,z & = & -30 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2\,y & - & z & = & 5 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & - & z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2y+z+5 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2a+b+5 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 82. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 11

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3\,x & - & 7\,y & + & 7\,z & = & -4 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & -2 & \\ & & y & - & z & = & 1 & \\ -3\,x & - & 7\,y & + & 7\,z & = & -4 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & -2 & \\ & & y & - & z & = & 1 & \\ & & 2\,y & - & 2\,z & = & 2 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & -2 & \\ & & y & - & z & = & 1 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions.

Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & 3y & + & 3z & = & -2 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y+3z+2 \\ y & = & z+1 \\ z & = & a \end{array}\right.$$
$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & a+1 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 83. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 12

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & - & 7z & = & 0 \\ & - & y & - & 5z & = & 0 \\ -x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & & & - & z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & - & y & - & 5z & = & 0 & \\ 3x & - & 2y & - & 7z & = & 0 & \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & & & - & z & = & 0 & \\ & - & y & - & 5z & = & 0 & \\ & - & 2y & - & 10z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & & & - & z & = & 0 & \\ & - & y & - & 5z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & & & - & z & = & 0 \\ & - & y & - & 5z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -5z \\ z & = & a \end{array}\right.$$
$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a \\ y & = & -5a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\, -5,\, 1)\right).$$

Corrigé 84. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 12

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ -x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ -3x & + & 3y & - & 6z & = & -9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & y & - & 2z & = & -3 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y-2z+3 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$
$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a-2b+3 \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 85. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 12

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -7x & + & y & - & 5z & - & 2t & = & -1 \\ 3x & + & 7y & + & 9z & + & 6t & = & -11 \\ & - & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -5 \\ -5x & & & + & 5z & + & 5t & = & 35 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & + & 7y & + & 9z & + & 6t & = & -11 & \\ -7x & + & y & - & 5z & - & 2t & = & -1 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & - & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -5 & \\ -5x & & & + & 5z & + & 5t & = & 35 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & + & 7y & + & 9z & + & 6t & = & -11 & \\ & & \frac{52}{3}y & + & 16z & + & 12t & = & -\frac{80}{3} & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{3}L_1) \\ & - & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -5 & \\ & & \frac{35}{3}y & + & 20z & + & 15t & = & \frac{50}{3} & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{5}{3}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & + & 7y & + & 9z & + & 6t & = & -11 & \\ & - & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -5 & \\ & & \frac{52}{3}y & + & 16z & + & 12t & = & -\frac{80}{3} & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & \frac{35}{3}y & + & 20z & + & 15t & = & \frac{50}{3} & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & + & 7y & + & 9z & + & 6t & = & -11 & \\ & - & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -5 & \\ & & & - & \frac{56}{3}z & - & 14t & = & -70 & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{26}{3}L_2) \\ & & & - & \frac{10}{3}z & - & \frac{5}{2}t & = & -\frac{25}{2} & (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{35}{6}L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & + & 7y & + & 9z & + & 6t & = & -11 & \\ & - & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -5 & \\ & & & - & \frac{10}{3}z & - & \frac{5}{2}t & = & -\frac{25}{2} & \\ & & & - & \frac{56}{3}z & - & 14t & = & -70 & (L_4 \leftrightarrow L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & + & 7y & + & 9z & + & 6t & = & -11 & \\ & - & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -5 & \\ & & & - & \frac{10}{3}z & - & \frac{5}{2}t & = & -\frac{25}{2} & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - \frac{28}{5}L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons trois équations principales (trois pivots non nuls : x, y, z) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 7y & + & 9z & + & 6t & = & -11 \\ & - & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -5 \\ & & & - & \frac{10}{3}z & - & \frac{5}{2}t & = & -\frac{25}{2} \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{7}{3}y - 3z - 2t - \frac{11}{3} \\ y & = & -2z - \frac{3}{2}t + \frac{5}{2} \\ z & = & -\frac{3}{4}t + \frac{15}{4} \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{4}a - \frac{13}{4} \\ y & = & -5 \\ z & = & -\frac{3}{4}a + \frac{15}{4} \\ t & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 86. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 12

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -7x & + & 7y & + & 4z & = & 0 \\ x & - & 2y & & & = & 0 \\ -7x & + & 8y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & & & = & 0 & \\ -7x & + & 7y & + & 4z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -7x & + & 8y & + & 2z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & & & = & 0 & \\ & - & 7y & + & 4z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1) \\ & - & 6y & + & 2z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 7L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & & & = & 0 & \\ & - & 6y & + & 2z & = & 0 & \\ & - & 7y & + & 4z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & & & = & 0 & \\ & - & 6y & + & 2z & = & 0 & \\ & & & & \frac{5}{3}z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{6}L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 0 \\ & - & 6y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & \frac{5}{3}z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y \\ y & = & \frac{1}{3}z \\ z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 87. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 12

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 3\,z & = & 0 \\ 20\,x & + & 3\,y & + & 10\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 6\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 & \\ & & & & 3\,z & = & 0 & \\ & - & \frac{1}{3}\,y & + & \frac{10}{3}\,z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{10}{3} L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 6\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 & \\ & - & \frac{1}{3}\,y & + & \frac{10}{3}\,z & = & 0 & \\ & & & & 3\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & - & \frac{1}{3}\,y & + & \frac{10}{3}\,z & = & 0 \\ & & & & 3\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z \\ y & = & 10z \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 88. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 12

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & 5\,x & - & y & - & z & = & 0 \\ - & 5\,x & - & y & - & z & = & -1 \\ & 5\,x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} - & 5\,x & - & y & - & z & = & 0 & \\ & & & & & 0 & = & -1 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & 5\,x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & & & 0 & = & -1 \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{5}a - \frac{1}{5}b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 89. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 12

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & 2\,x & - & 3\,y & - & 15\,z & = & 0 \\ & 3\,x & - & y & + & 12\,z & = & 0 \\ - & 2\,x & + & 2\,y & - & 6\,z & = & -6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} - & 2\,x & - & 3\,y & - & 15\,z & = & 0 & \\ & & - & \frac{11}{2}\,y & - & \frac{21}{2}\,z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2} L_1) \\ & & & 5\,y & + & 9\,z & = & -6 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} - & 2\,x & - & 3\,y & - & 15\,z & = & 0 & \\ & & & 5\,y & + & 9\,z & = & -6 & \\ & & - & \frac{11}{2}\,y & - & \frac{21}{2}\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcrl} - & 2\,x & - & 3\,y & - & 15\,z & = & 0 & \\ & & & 5\,y & + & 9\,z & = & -6 & \\ & & & & - & \frac{3}{5}\,z & = & -\frac{33}{5} & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{11}{10} L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. On en déduit aisément qu'il n'existe qu'une seule solution, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & 2\,x & - & 3\,y & - & 15\,z & = & 0 \\ & & & 5\,y & + & 9\,z & = & -6 \\ & & & & - & \frac{3}{5}\,z & = & -\frac{33}{5} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{3}{2}y - \frac{15}{2}z \\ y & = & -\frac{9}{5}z - \frac{6}{5} \\ z & = & 11 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -51 \\ y & = & -21 \\ z & = & 11 \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 90. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 12

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & x & + & 4y & + & 6z & - & t & = 0 \\ - & 2x & + & 2y & - & 3z & - & 2t & = 6 \\ & & - & y & - & 7z & - & 3t & = 4 \\ & x & + & 2y & & & - & 5t & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & + & 4y & + & 6z & - & t & = 0 \\ & & - & 6y & - & 15z & & & = 6 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & - & y & - & 7z & - & 3t & = 4 \\ & & & 6y & + & 6z & - & 6t & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & + & 4y & + & 6z & - & t & = 0 \\ & & - & y & - & 7z & - & 3t & = 4 \\ & & - & 6y & - & 15z & & & = 6 \quad (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & & 6y & + & 6z & - & 6t & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & + & 4y & + & 6z & - & t & = 0 \\ & & - & y & - & 7z & - & 3t & = 4 \\ & & & & & 27z & + & 18t & = -18 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2) \\ & & & & - & 36z & - & 24t & = 24 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + 6L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & + & 4y & + & 6z & - & t & = 0 \\ & & - & y & - & 7z & - & 3t & = 4 \\ & & & & & 27z & + & 18t & = -18 \\ & & & & & & & 0 & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + \frac{4}{3}L_3) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons trois équations principales (trois pivots non nuls : x, y, z) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & x & + & 4y & + & 6z & - & t & = 0 \\ & & - & y & - & 7z & - & 3t & = 4 \\ & & & & & 27z & + & 18t & = -18 \\ & & & & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4y + 6z - t \\ y & = & -7z - 3t - 4 \\ z & = & -\frac{2}{3}t - \frac{2}{3} \\ t & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{5}{3}a - \frac{4}{3} \\ y & = & \frac{5}{3}a + \frac{2}{3} \\ z & = & -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3} \\ t & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 91. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 13

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & x & + & y & + & 2z & + & t & = -2 \\ - & x & + & y & + & 2z & + & t & = -2 \\ - & 2x & + & 2y & + & 4z & + & 2t & = -4 \\ - & x & + & y & + & 2z & + & t & = -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} - & x & + & y & + & 2z & + & t & = -2 \\ & & & & & & & 0 & = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & & & & & 0 & = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ & & & & & & & 0 & = 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et trois équations auxiliaires. Il y a par conséquent trois inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & x & + & y & + & 2z & + & t & = -2 \\ & & & & & & & 0 & = 0 \\ & & & & & & & 0 & = 0 \\ & & & & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y + 2z + t + 2 \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a + 2b + c + 2 \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 92. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 13

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -6x&+&6y&-&z&+&5t&=&2\\ 2x&-&2y&+&z&-&t&=&2\\ 7x&-&7y&+&2z&-&5t&=&1\\ -21x&+&21y&-&8z&+&13t&=&-11\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x&-&2y&+&z&-&t&=&2\\ -6x&+&6y&-&z&+&5t&=&2\\ 7x&-&7y&+&2z&-&5t&=&1\\ -21x&+&21y&-&8z&+&13t&=&-11\end{array}\right. \quad (L_2 \leftrightarrow L_1)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x&-&2y&+&z&-&t&=&2&\\ &&&&2z&+&2t&=&8&(L_2 \leftarrow L_2+3L_1)\\ &&&-&\frac{3}{2}z&-&\frac{3}{2}t&=&-6&(L_3 \leftarrow L_3-\frac{7}{2}L_1)\\ &&&&\frac{5}{2}z&+&\frac{5}{2}t&=&10&(L_4 \leftarrow L_4+\frac{21}{2}L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x&-&2y&+&z&-&t&=&2&\\ &&&-&\frac{3}{2}z&-&\frac{3}{2}t&=&-6&\\ &&&&2z&+&2t&=&8&(L_3 \leftrightarrow L_2)\\ &&&&\frac{5}{2}z&+&\frac{5}{2}t&=&10&\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x&-&2y&+&z&-&t&=&2&\\ &&&-&\frac{3}{2}z&-&\frac{3}{2}t&=&-6&\\ &&&&&&0&=&0&(L_3 \leftarrow L_3+\frac{4}{3}L_2)\\ &&&&&&0&=&0&(L_4 \leftarrow L_4+\frac{5}{3}L_2)\end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, z) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x&-&2y&+&z&-&t&=&2\\ &&&-&\frac{3}{2}z&-&\frac{3}{2}t&=&-6\\ &&&&&&0&=&0\\ &&&&&&0&=&0\end{array}\right. \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t+1\\ y&=&a\\ z&=&-t+4\\ t&=&b\end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&a+b-1\\ y&=&a\\ z&=&-b+4\\ t&=&b\end{array}\right.$$

d'où le résultat.

Corrigé 93. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors : ← page 13

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x&+&2y&+&5z&=&0\\ -x&+&y&+&2z&=&0\\ x&-&y&-&2z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x&+&2y&+&5z&=&0&\\ &-&y&-&3z&=&0&(L_2 \leftarrow L_2-L_1)\\ &&y&+&3z&=&0&(L_3 \leftarrow L_3+L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x&+&2y&+&5z&=&0&\\ &-&y&-&3z&=&0&\\ &&&&0&=&0&(L_3 \leftarrow L_3+L_2)\end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x&+&2y&+&5z&=&0\\ &-&y&-&3z&=&0\\ &&&&0&=&0\end{array}\right. \iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&2y+5z\\ y&=&-3z\\ z&=&a\end{array}\right.$$

$$\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&-a\\ y&=&-3a\\ z&=&a\end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-3,\,1)\right).$$

Corrigé 94. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors : ← page 13

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x&-&y&-&z&=&0\\ -7x&+&7y&+&7z&=&0\\ 4x&-&4y&-&4z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x&-&y&-&z&=&0&\\ &&&&0&=&0&(L_2 \leftarrow L_2+7L_1)\\ &&&&0&=&0&(L_3 \leftarrow L_3-4L_1)\end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y+z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a+b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,1,\,0)\,,(1,\,0,\,1)\right).$$

Corrigé 95. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors : ← page 13

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ x & - & y & - & 3\,z & = & -1 \\ -\,x & - & 5\,y & - & 6\,z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 1 & \\ & - & 4\,y & - & 6\,z & = & -2 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & - & 2\,y & - & 3\,z & = & 5 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 1 & \\ & - & 2\,y & - & 3\,z & = & 5 & \\ & - & 4\,y & - & 6\,z & = & -2 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 1 & \\ & - & 2\,y & - & 3\,z & = & 5 & \\ & & & & 0 & = & -12 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 96. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 13

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 5\,x & - & y & + & z & + & t & = & -1 \\ -\,10\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & - & 2\,t & = & 0 \\ -\,5\,x & + & y & - & z & - & t & = & 1 \\ 10\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & + & 2\,t & = & -6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 5\,x & - & y & + & z & + & t & = & -1 & \\ & & & & & & 0 & = & -2 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & & & & & & 0 & = & -4 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.

Corrigé 97. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors : ← page 13

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x & - & 11\,y & - & 3\,z & + & t & = & 0 \\ -\,2\,x & + & 11\,y & + & 3\,z & - & t & = & 0 \\ -\,2\,x & + & 11\,y & + & 3\,z & - & t & = & 0 \\ 4\,x & - & 22\,y & - & 6\,z & + & 2\,t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2\,x & - & 11\,y & - & 3\,z & + & t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons une équation principale (un pivot non nul : x) et trois équations auxiliaires. Il y a par conséquent trois inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x & - & 11\,y & - & 3\,z & + & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{11}{2}y + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}t \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{11}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c \\ y & = & a \\ z & = & b \\ t & = & c \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{11}{2},\,1,\,0,\,0\right),\left(\frac{3}{2},\,0,\,1,\,0\right),\left(-\frac{1}{2},\,0,\,0,\,1\right)\right).$$

Corrigé 98. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 13

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} - & x & + & y & & = & 0 \\ & 2x & & & + \; 2z & = & 0 \\ & & - & y & - \; z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & x & + & y & & & = & 0 \\ & & & 2y & + & 2z & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & x & + & y & & & = & 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & x & + & y & & & = & 0 \\ & & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et une équation auxiliaire. Il y a par conséquent une inconnue auxiliaire, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & x & + & y & & & = & 0 \\ & & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ y & = & -z \\ z & = & a \end{array}\right.$$
$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a \\ y & = & -a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-1,\,1)\right).$$

Corrigé 99. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\,y,\,z,\,t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : ← page 14

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & - & 24y & & & - & 4t & = & 0 \\ & - & 6y & & & - & t & = & 0 \\ 4x & - & 14y & + & 4z & + & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & - & 24y & & & - & 4t & = & 0 \\ & - & 6y & & & - & t & = & 0 \\ & - & 18y & & & - & 3t & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & - & 6y & & & - & t & = & 0 \\ & - & 24y & & & - & 4t & = & 0 \\ & - & 18y & & & - & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & - & 6y & & & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2) \\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2) \end{array}\right.$$

Le système est ainsi échelonné. Nous avons deux équations principales (deux pivots non nuls : x, y) et deux équations auxiliaires. Il y a par conséquent deux inconnues auxiliaires, nous permettant de paramétrer l'ensemble des solutions. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & - & 6y & & & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y - z - t \\ y & = & -\frac{1}{6}t \\ z & = & a \\ t & = & b \end{array}\right.$$
$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a - \frac{5}{6}b \\ y & = & -\frac{1}{6}b \\ z & = & a \\ t & = & b \end{array}\right.$$

d'où le résultat. On peut aussi écrire l'espace vectoriel des solutions ainsi :

$$\mathscr{S} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,0,\,1,\,0)\,,\left(-\frac{5}{6},\,-\frac{1}{6},\,0,\,1\right)\right).$$

Corrigé 100. On résout ce système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß. Soit $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : ← page 14

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2\,z & = & 2 \\ -\,x & & & & & = & 2 \\ 3\,x & - & 4\,y & + & 8\,z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & 2\,z & = & 2 & \\ & - & y & + & 2\,z & = & 4 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & - & y & + & 2\,z & = & -7 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & 2\,z & = & 2 & \\ & - & y & + & 2\,z & = & 4 & \\ & & & & 0 & = & -11 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

Nous tombons sur une équation fausse, donc le système n'admet pas de solution. D'où le résultat : l'ensemble des solutions est vide.