## Norme et sphère unité

💡 Étude d'une norme sur $\mathbb{R}^2$. Vérifiez soigneusement le caractère séparé. Pour le tracé de la sphère unité, consultez votre cours (pour la norme $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$) ou mes documents *Méthodes*.

**Exercice 1.** Montrer que l'application : → page 12

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |x+2\,y| + |x+y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 2.** Montrer que l'application : → page 14

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |-x+3\,y| + |2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 3.** Montrer que l'application : → page 16

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |2\,x| + |2\,x+y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 4.** Montrer que l'application : → page 18

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |5\,x| + |-3\,x+y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 5.** Montrer que l'application : → page 20

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |x+4\,y| + |x+y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 6.** Montrer que l'application : → page 22

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |2\,y| + |2\,x+y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 7.** Montrer que l'application : → page 24

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |x+6\,y| + |2\,x-y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 8.** Montrer que l'application : → page 26

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |-x+2\,y| + |5\,x+2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 9.** Montrer que l'application : → page 28

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-x + y| + |x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 10.** Montrer que l'application : → page 30

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x| + |x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 11.** Montrer que l'application : → page 32

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |6\,x - y| + |2\,x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 12.** Montrer que l'application : → page 34

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-2\,x + y| + |6\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 13.** Montrer que l'application : → page 36

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - y| + |x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 14.** Montrer que l'application : → page 38

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |4\,x| + |x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 15.** Montrer que l'application : → page 40

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |9\,x + y| + |2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 16.** Montrer que l'application : → page 42

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |3\,x| + |3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 17.** Montrer que l'application : → page 44

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |2\,x + y| + |-x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 18.** Montrer que l'application : → page 46

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - 2\,y| + |y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 19.** Montrer que l'application : → page 48

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |2\,x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 20.** Montrer que l'application : → page 50

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |2\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 21.** Montrer que l'application : → page 52

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |2\,x + 2\,y| + |2\,x + 3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 22.** Montrer que l'application : → page 54

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |3\,x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 23.** Montrer que l'application : → page 56

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - 10\,y| + |-2\,x + 5\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 24.** Montrer que l'application : → page 58

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |3\,x + y| + |x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 25.** Montrer que l'application : → page 60

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-3\,x + y| + |x - 7\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 26.** Montrer que l'application : → page 62

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x + y| + |4\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 27.** Montrer que l'application : → page 64

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-3\,x + y| + |x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 28.** Montrer que l'application : → page 66

$$N : (x, y) \mapsto |x| + |8\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 29.** Montrer que l'application : → page 68

$$N : (x, y) \mapsto |x + y| + |2\,x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 30.** Montrer que l'application : → page 70

$$N : (x, y) \mapsto |x + y| + |2\,x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 31.** Montrer que l'application : → page 72

$$N : (x, y) \mapsto |8\,x + 2\,y| + |2\,x - 3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 32.** Montrer que l'application : → page 74

$$N : (x, y) \mapsto |x - y| + |x - 4\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 33.** Montrer que l'application : → page 76

$$N : (x, y) \mapsto |x + y| + |5\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 34.** Montrer que l'application : → page 78

$$N : (x, y) \mapsto |9\,x - 2\,y| + |4\,x + 5\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 35.** Montrer que l'application : → page 80

$$N : (x, y) \mapsto |10\,y| + |x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 36.** Montrer que l'application : → page 82

$$N : (x, y) \mapsto |x| + |6\,x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 37.** Montrer que l'application : → page 84

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-3\,x + y| + |x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 38.** Montrer que l'application : → page 86

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |6\,x| + |x + 7\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 39.** Montrer que l'application : → page 88

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-2\,x + 6\,y| + |-x + 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 40.** Montrer que l'application : → page 90

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x + y| + |2\,x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 41.** Montrer que l'application : → page 92

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |4\,x - y| + |3\,x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 42.** Montrer que l'application : → page 94

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x + 2\,y| + |y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 43.** Montrer que l'application : → page 96

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-2\,x + 3\,y| + |-5\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 44.** Montrer que l'application : → page 98

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - 5\,y| + |y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 45.** Montrer que l'application : → page 99

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x + y| + |-x + 4\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 46.** Montrer que l'application : → page 101

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x| + |x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 47.** Montrer que l'application : → page 103

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |x + 3\,y| + |2\,x - 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 48.** Montrer que l'application : → page 105

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |x - y| + |2\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 49.** Montrer que l'application : → page 107

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |2\,x - 2\,y| + |3\,x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 50.** Montrer que l'application : → page 109

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |3\,y| + |10\,x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 51.** Montrer que l'application : → page 111

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |2\,y| + |x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 52.** Montrer que l'application : → page 113

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |x + 2\,y| + |x + 4\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 53.** Montrer que l'application : → page 115

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |x| + |2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 54.** Montrer que l'application : → page 117

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |9\,x - y| + |y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 55.** Montrer que l'application : → page 119

$$\mathrm{N} : (x,y) \mapsto |y| + |8\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 56.** Montrer que l'application : → page 121

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |4\,x| + |-x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 57.** Montrer que l'application : → page 123

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |2\,x + 5\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 58.** Montrer que l'application : → page 125

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-x + 4\,y| + |4\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 59.** Montrer que l'application : → page 127

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |3\,x + y| + |7\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 60.** Montrer que l'application : → page 129

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-2\,x + 8\,y| + |x - 6\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 61.** Montrer que l'application : → page 131

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |6\,x - y| + |4\,x - 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 62.** Montrer que l'application : → page 133

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - 2\,y| + |6\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 63.** Montrer que l'application : → page 135

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |6\,y| + |x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 64.** Montrer que l'application : → page 137

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x| + |-2\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 65.** Montrer que l'application : → page 139

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |3\,x + y| + |2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 66.** Montrer que l'application : → page 141

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x + y| + |2\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 67.** Montrer que l'application : → page 143

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - y| + |2\,x - 3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 68.** Montrer que l'application : → page 145

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |6\,x + 4\,y| + |x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 69.** Montrer que l'application : → page 147

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x + y| + |5\,x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 70.** Montrer que l'application : → page 149

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |x + 3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 71.** Montrer que l'application : → page 151

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-x + 4\,y| + |x + 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 72.** Montrer que l'application : → page 153

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - y| + |-4\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 73.** Montrer que l'application : → page 155

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-4\,x + 2\,y| + |y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 74.** Montrer que l'application : → page 157

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |2\,x - y| + |x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 75.** Montrer que l'application : → page 159

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |-x + 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 76.** Montrer que l'application : → page 161

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-x + 2\,y| + |y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 77.** Montrer que l'application : → page 163

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |x + 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 78.** Montrer que l'application : → page 165

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |3\,x - 2\,y| + |x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 79.** Montrer que l'application : → page 167

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |5\,x - 2\,y| + |2\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 80.** Montrer que l'application : → page 169

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |3\,y| + |x + 4\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 81.** Montrer que l'application : → page 171

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-9\,x + y| + |2\,x|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 82.** Montrer que l'application : → page 173

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |3\,y| + |x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 83.** Montrer que l'application : → page 175

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x + 2\,y| + |7\,x + 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 84.** Montrer que l'application : → page 177

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |5\,x - 3\,y| + |y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 85.** Montrer que l'application : → page 179

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-x + 2\,y| + |x - 3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 86.** Montrer que l'application : → page 181

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |10\,y| + |4\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 87.** Montrer que l'application : → page 183

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x + 4\,y| + |6\,x + 3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 88.** Montrer que l'application : → page 185

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - y| + |x - 3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 89.** Montrer que l'application : → page 187

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |-3\,x + 5\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 90.** Montrer que l'application : → page 189

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |6\,x + 3\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 91.** Montrer que l'application : → page 191

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |x - 2\,y| + |-x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 92.** Montrer que l'application : → page 193

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-4\,x + y| + |6\,x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 93.** Montrer que l'application : → page 195

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |-x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 94.** Montrer que l'application : → page 197

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |4\,x| + |x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 95.** Montrer que l'application : → page 199

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |2\,y| + |x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 96.** Montrer que l'application : → page 201

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |x + 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 97.** Montrer que l'application : → page 203

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |y| + |-4\,x + 2\,y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 98.** Montrer que l'application : → page 205

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |2\,x| + |x + y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 99.** Montrer que l'application : → page 207

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |5\,x + 2\,y| + |x - y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Exercice 100.** Montrer que l'application : → page 209

$$\mathrm{N} : (x, y) \mapsto |-x + 5\,y| + |y|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner sa sphère unité.

**Corrigé 1.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 1

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+2\,y_1+2\,y_2| + |x_1+x_2+y_1+y_2| \\ &\leqslant |x_1+2\,y_1| + |x_2+2\,y_2| + |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \\ &\leqslant |x_1+2\,y_1| + |x_1+y_1| + |x_2+2\,y_2| + |x_2+y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + 2\,y| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + 2\,y| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + 2\,y = 0$ et $x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2\,y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & 2\,y & = & 0 & \\ & - & y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x+2\,y| + |x+y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + 2\,y$ et $x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + 2\,y \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+2\,y) + (x+y) = 1 \iff 2\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $x + 2\,y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+2\,y) - (x+y) = 1 \iff y = 1\,;$$

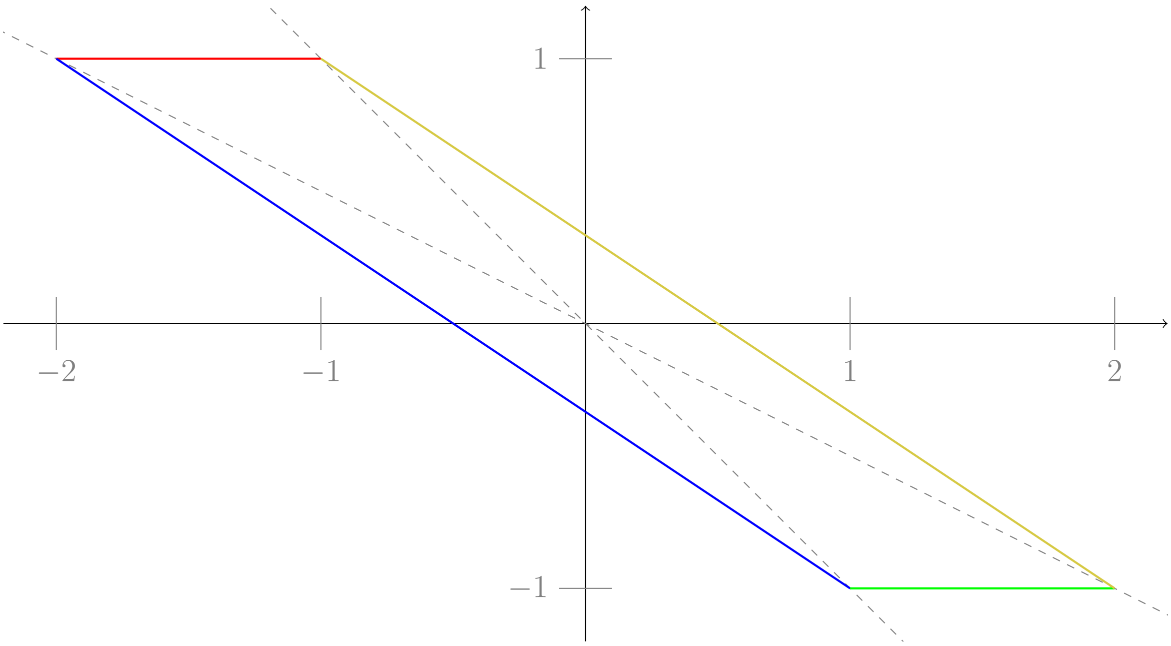
— si $x + 2\,y \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+2\,y) + (x+y) = 1 \iff -y = 1\,;$$

— si $x + 2\,y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+2\,y) - (x+y) = 1 \iff -2\,x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $y = 1$

en bleu : $-2\,x - 3\,y = 1$

en vert : $-y = 1$

en jaune : $2\,x + 3\,y = 1$

**Corrigé 2.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 1

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-x_1 - x_2 + 3\,y_1 + 3\,y_2| + |2\,y_1 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |-x_1 + 3\,y_1| + |-x_2 + 3\,y_2| + |2\,y_1| + |2\,y_2| \\ &\leqslant |-x_1 + 3\,y_1| + |2\,y_1| + |-x_2 + 3\,y_2| + |2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-x + 3\,y| + |2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-x + 3\,y| = |2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $-x+3\,y = 0$ et $2\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |-x + 3\,y| + |2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-x+3\,y$ et $2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-x + 3\,y \geqslant 0$ et $2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-x + 3\,y) + (2\,y) = 1 \iff -x + 5\,y = 1\,;$$

— si $-x + 3\,y \geqslant 0$ et $2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-x + 3\,y) - (2\,y) = 1 \iff -x + y = 1\,;$$

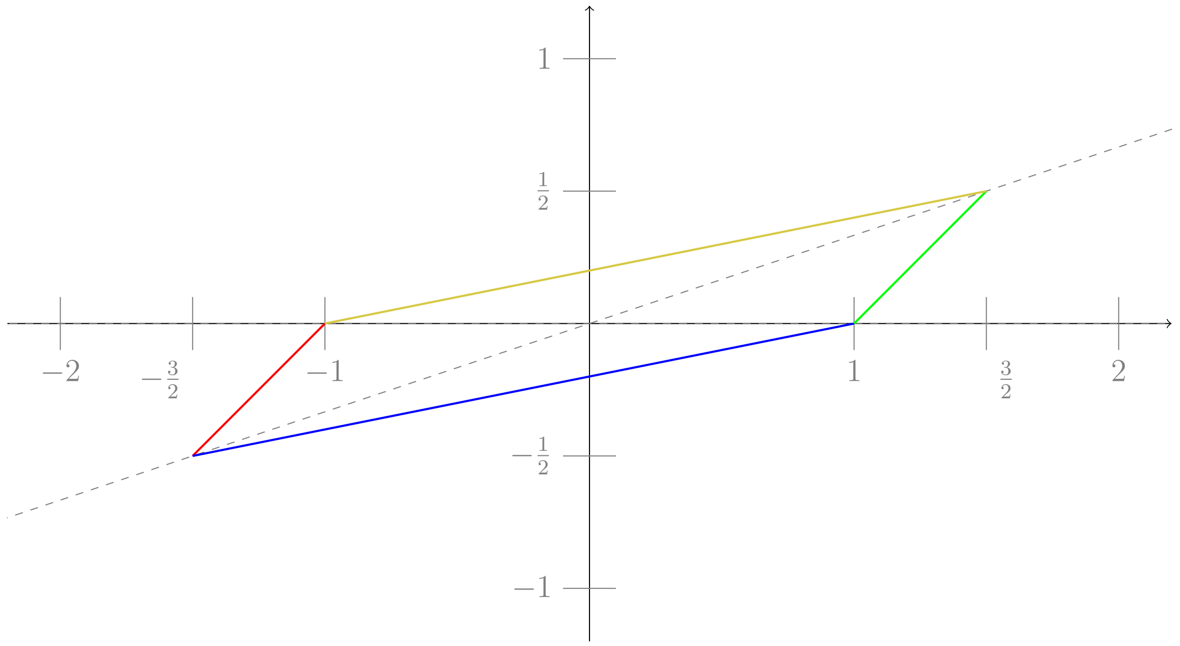
— si $-x + 3\,y \leqslant 0$ et $2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-x + 3\,y) + (2\,y) = 1 \iff x - y = 1\,;$$

— si $-x + 3\,y \leqslant 0$ et $2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-x + 3\,y) - (2\,y) = 1 \iff x - 5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + y = 1$

en bleu : $x - 5\,y = 1$

en vert : $x - y = 1$

en jaune : $-x + 5\,y = 1$

**Corrigé 3.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 1

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |2\,x_1 + 2\,x_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |2\,x_1| + |2\,x_2| + |2\,x_1 + y_1| + |2\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |2\,x_1| + |2\,x_1 + y_1| + |2\,x_2| + |2\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,x| + |2\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,x| = |2\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,x = 0$ et $2\,x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |2\,x| + |2\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,x$ et $2\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,x \geqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,x) + (2\,x + y) = 1 \iff 4\,x + y = 1\,;$$

— si $2\,x \geqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,x) - (2\,x + y) = 1 \iff -y = 1\,;$$

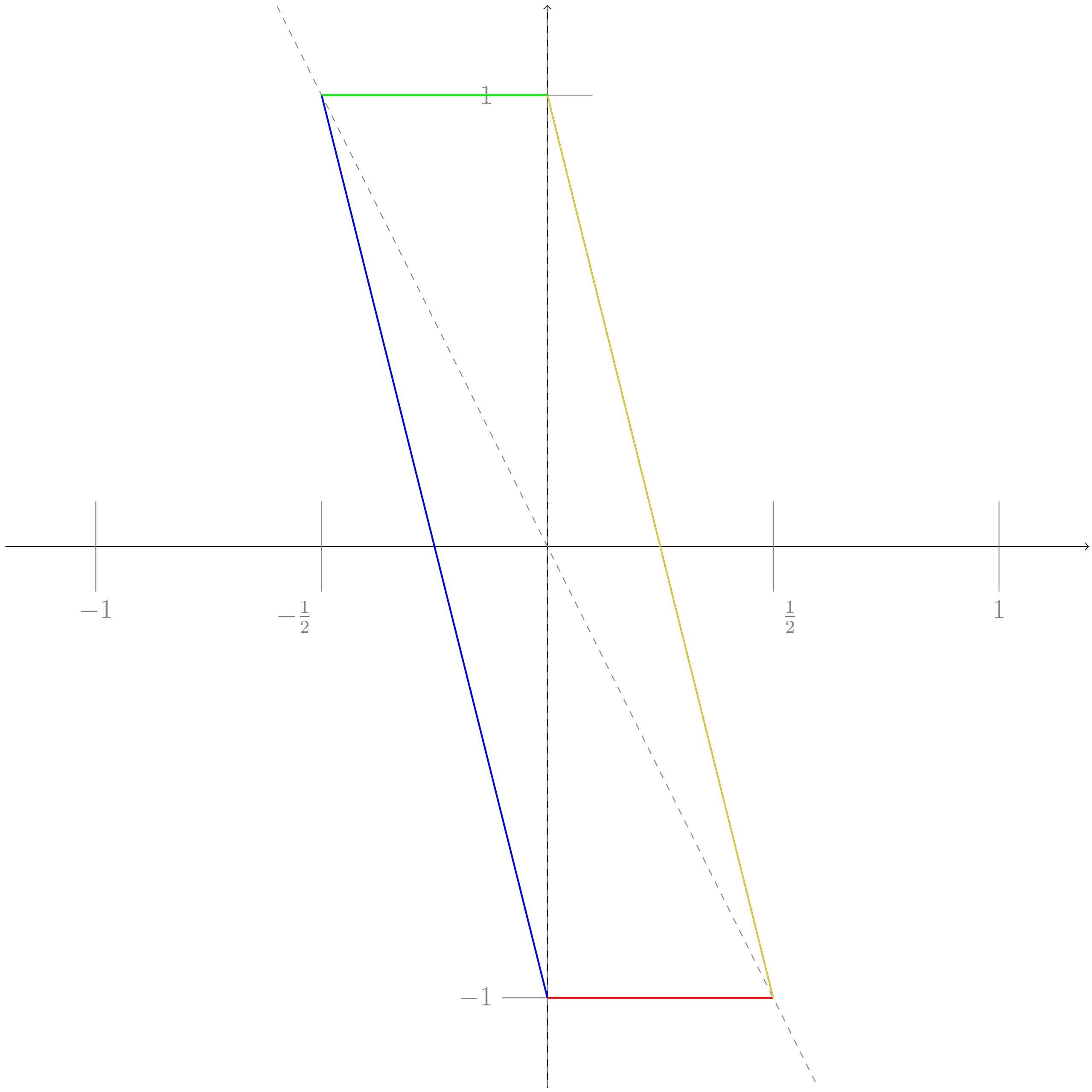
— si $2\,x \leqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(2\,x) + (2\,x + y) = 1 \iff y = 1\,;$$

— si $2\,x \leqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(2\,x) - (2\,x + y) = 1 \iff -4\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-y = 1$

en bleu : $-4\,x - y = 1$

en vert : $y = 1$

en jaune : $4\,x + y = 1$

← page 1

**Corrigé 4.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue.

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |5\,x_1 + 5\,x_2| + |-3\,x_1 - 3\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |5\,x_1| + |5\,x_2| + |-3\,x_1 + y_1| + |-3\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |5\,x_1| + |-3\,x_1 + y_1| + |5\,x_2| + |-3\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|5\,x| + |-3\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|5\,x| = |-3\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $5\,x = 0$ et $-3\,x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |5\,x| + |-3\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $5\,x$ et $-3\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $5\,x \geqslant 0$ et $-3\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (5\,x) + (-3\,x + y) = 1 \iff 2\,x + y = 1\,;$$

— si $5\,x \geqslant 0$ et $-3\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (5\,x) - (-3\,x + y) = 1 \iff 8\,x - y = 1\,;$$

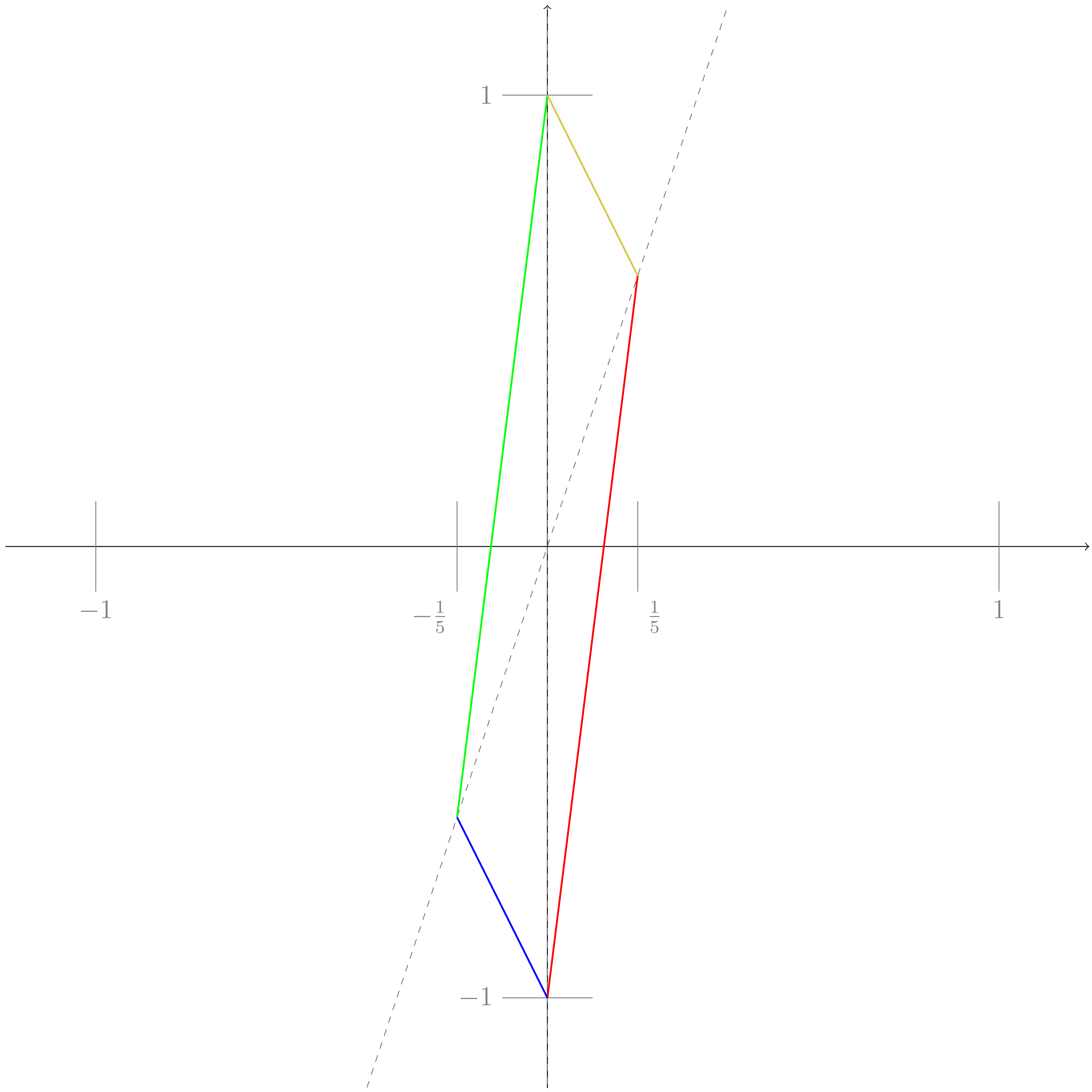
— si $5\,x \leqslant 0$ et $-3\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(5\,x) + (-3\,x + y) = 1 \iff -8\,x + y = 1\,;$$

— si $5\,x \leqslant 0$ et $-3\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(5\,x) - (-3\,x + y) = 1 \iff -2\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $8\,x - y = 1$

en bleu : $-2\,x - y = 1$

en vert : $-8\,x + y = 1$

en jaune : $2\,x + y = 1$

**Corrigé 5.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 1

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+4\,y_1+4\,y_2| + |x_1+x_2+y_1+y_2| \\ &\leqslant |x_1+4\,y_1| + |x_2+4\,y_2| + |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \\ &\leqslant |x_1+4\,y_1| + |x_1+y_1| + |x_2+4\,y_2| + |x_2+y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + 4\,y| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + 4\,y| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + 4\,y = 0$ et $x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 4\,y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & 4\,y & = & 0 & \\ & - & 3\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x+4\,y| + |x+y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x+4\,y$ et $x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + 4\,y \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+4\,y)+(x+y) = 1 \iff 2\,x+5\,y = 1\,;$$

— si $x + 4\,y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+4\,y)-(x+y) = 1 \iff 3\,y = 1\,;$$

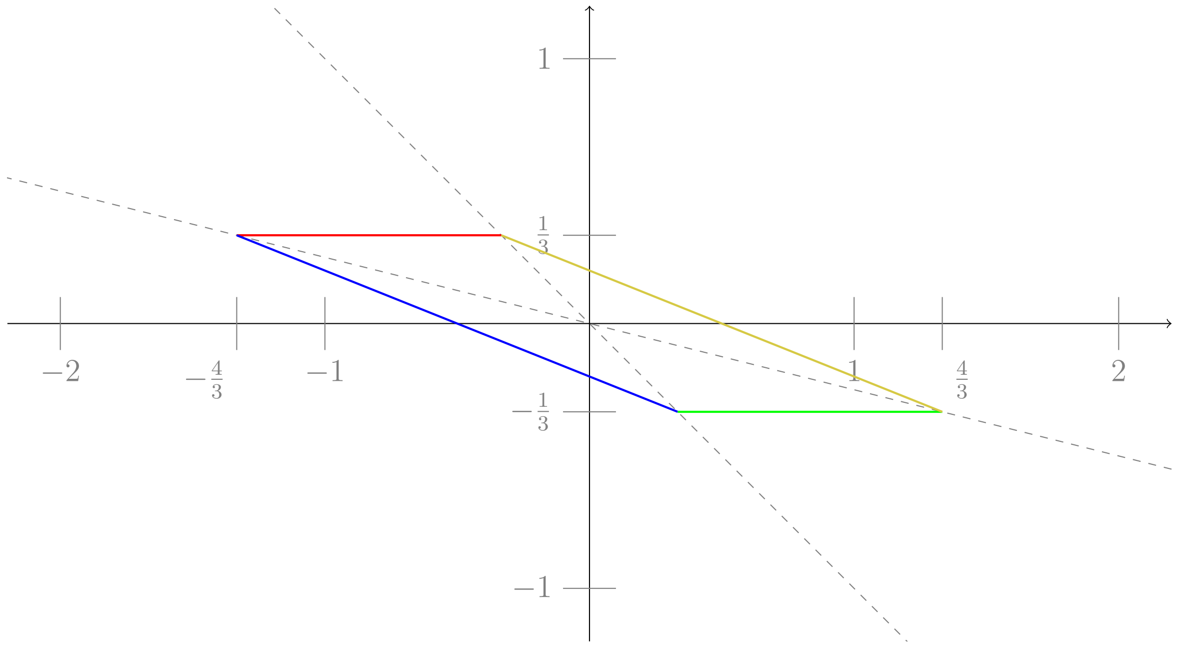
— si $x + 4\,y \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+4\,y)+(x+y) = 1 \iff -3\,y = 1\,;$$

— si $x + 4\,y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+4\,y)-(x+y) = 1 \iff -2\,x-5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,y = 1$ — en bleu : $-2\,x - 5\,y = 1$

en vert : $-3\,y = 1$ — en jaune : $2\,x + 5\,y = 1$

**Corrigé 6.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 1

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |2\,y_1 + 2\,y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |2\,y_1| + |2\,y_2| + |2\,x_1 + y_1| + |2\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |2\,y_1| + |2\,x_1 + y_1| + |2\,y_2| + |2\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,y| + |2\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,y| = |2\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,y = 0$ et $2\,x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |2\,y| + |2\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,y$ et $2\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,y \geqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,y) + (2\,x + y) = 1 \iff 2\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $2\,y \geqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,y) - (2\,x + y) = 1 \iff -2\,x + y = 1\,;$$

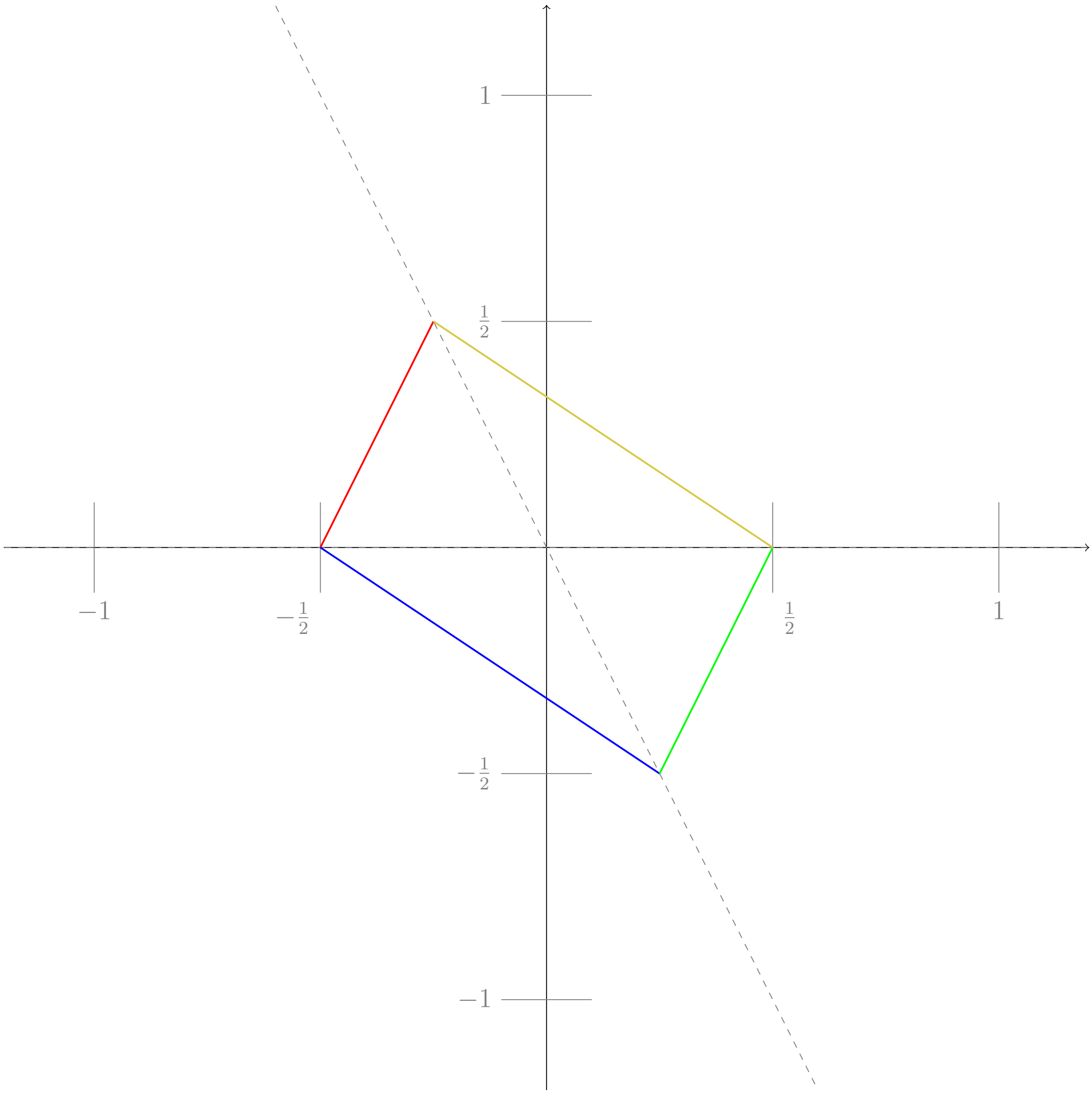
— si $2\,y \leqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(2\,y) + (2\,x + y) = 1 \iff 2\,x - y = 1\,;$$

— si $2\,y \leqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(2\,y) - (2\,x + y) = 1 \iff -2\,x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,x + y = 1$ — en bleu : $-2\,x - 3\,y = 1$

en vert : $2\,x - y = 1$ — en jaune : $2\,x + 3\,y = 1$

**Corrigé 7.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 1

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+6\,y_1+6\,y_2| + |2\,x_1+2\,x_2-y_1-y_2| \\ &\leqslant |x_1+6\,y_1| + |x_2+6\,y_2| + |2\,x_1-y_1| + |2\,x_2-y_2| \\ &\leqslant |x_1+6\,y_1| + |2\,x_1-y_1| + |x_2+6\,y_2| + |2\,x_2-y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + 6\,y| + |2\,x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + 6\,y| = |2\,x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $x+6\,y = 0$ et $2\,x - y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 6\,y & = & 0 \\ 2\,x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 6\,y & = & 0 \\ & - & 13\,y & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x+6\,y| + |2\,x-y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x+6\,y$ et $2\,x-y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + 6\,y \geqslant 0$ et $2\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+6\,y)+(2\,x-y) = 1 \iff 3\,x+5\,y = 1\,;$$

— si $x + 6\,y \geqslant 0$ et $2\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+6\,y)-(2\,x-y) = 1 \iff -x+7\,y = 1\,;$$

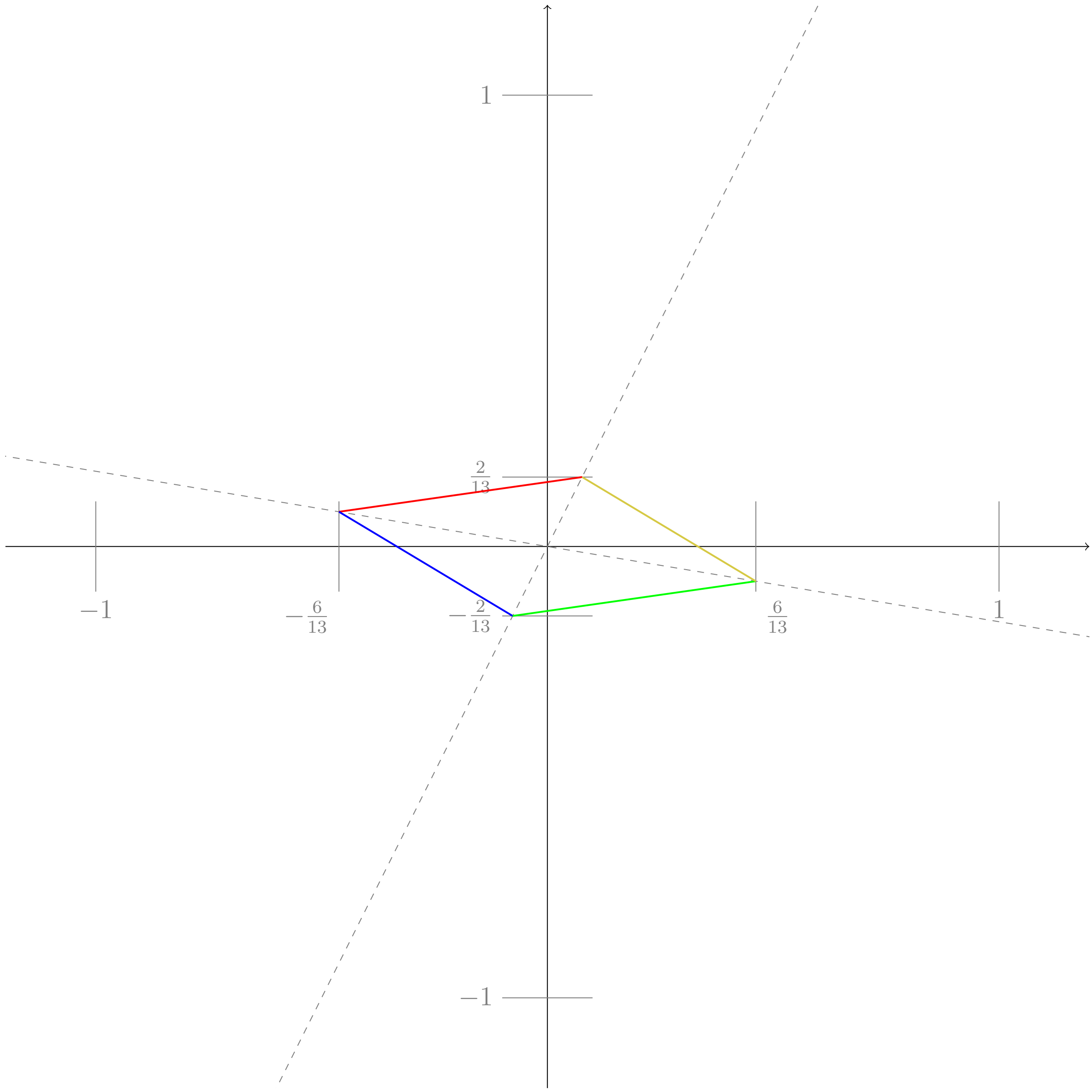
— si $x + 6\,y \leqslant 0$ et $2\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+6\,y)+(2\,x-y) = 1 \iff x-7\,y = 1\,;$$

— si $x + 6\,y \leqslant 0$ et $2\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+6\,y)-(2\,x-y) = 1 \iff -3\,x-5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x+7\,y=1$

en bleu : $-3\,x-5\,y=1$

en vert : $x-7\,y=1$

en jaune : $3\,x+5\,y=1$

**Corrigé 8.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 1

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |-x_1-x_2+2\,y_1+2\,y_2| + |5\,x_1+5\,x_2+2\,y_1+2\,y_2| \\
&\leqslant |-x_1+2\,y_1| + |-x_2+2\,y_2| + |5\,x_1+2\,y_1| + |5\,x_2+2\,y_2| \\
&\leqslant |-x_1+2\,y_1| + |5\,x_1+2\,y_1| + |-x_2+2\,y_2| + |5\,x_2+2\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-x + 2\,y| + |5\,x + 2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-x + 2\,y| = |5\,x + 2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $-x + 2\,y = 0$ et $5\,x + 2\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} - & x & + & 2\,y & = & 0 \\ & 5\,x & + & 2\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} - & x & + & 2\,y & = & 0 & \\ & & & 12\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |-x+2\,y| + |5\,x+2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-x+2\,y$ et $5\,x+2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-x + 2\,y \geqslant 0$ et $5\,x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-x+2\,y) + (5\,x+2\,y) = 1 \iff 4\,x + 4\,y = 1\,;$$

— si $-x + 2\,y \geqslant 0$ et $5\,x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-x+2\,y) - (5\,x+2\,y) = 1 \iff -6\,x = 1\,;$$

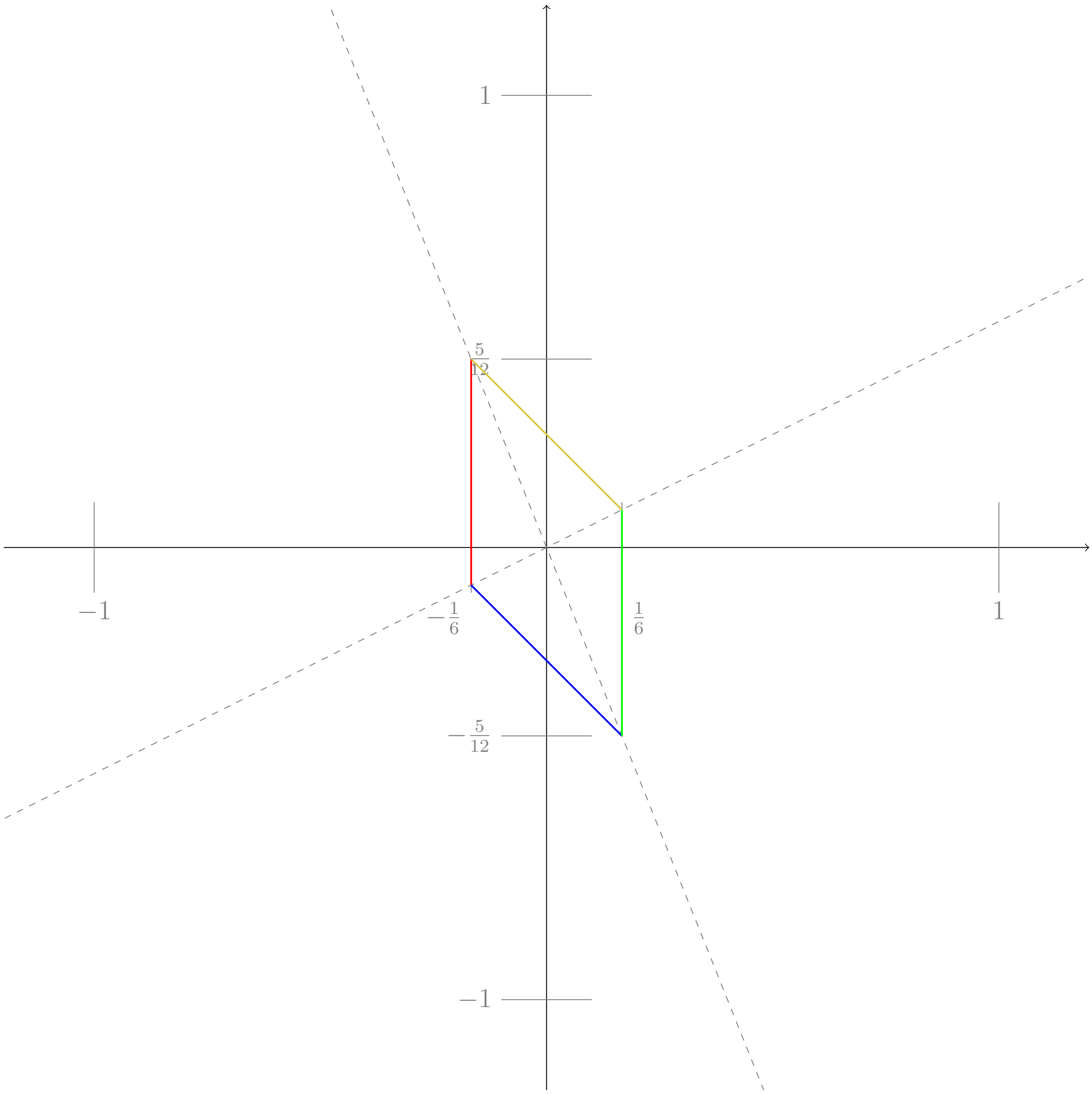
— si $-x + 2\,y \leqslant 0$ et $5\,x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-x+2\,y) + (5\,x+2\,y) = 1 \iff 6\,x = 1\,;$$

— si $-x + 2\,y \leqslant 0$ et $5\,x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-x+2\,y) - (5\,x+2\,y) = 1 \iff -4\,x - 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-6\,x = 1$

en bleu : $-4\,x - 4\,y = 1$

en vert : $6\,x = 1$

en jaune : $4\,x + 4\,y = 1$

**Corrigé 9.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 1

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-x_1 - x_2 + y_1 + y_2| + |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \\
&\leqslant |-x_1 + y_1| + |-x_2 + y_2| + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\
&\leqslant |-x_1 + y_1| + |x_1 + y_1| + |-x_2 + y_2| + |x_2 + y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-x + y| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-x + y| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $-x + y = 0$ et $x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ & & 2\,y & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |-x + y| + |x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-x+y$ et $x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-x + y \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-x + y) + (x + y) = 1 \iff 2\,y = 1\,;$$

— si $-x + y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-x + y) - (x + y) = 1 \iff -2\,x = 1\,;$$

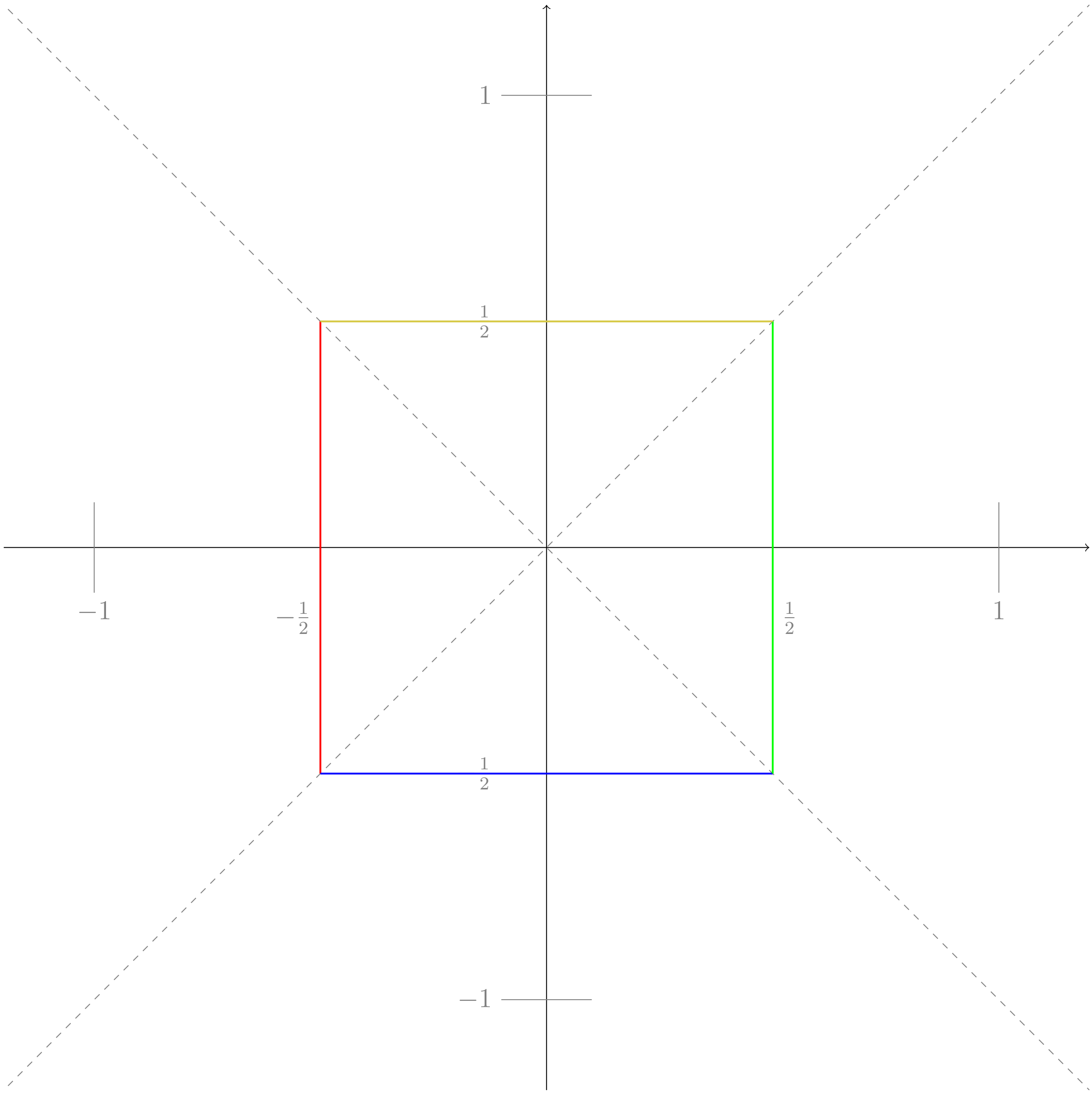
— si $-x + y \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-x + y) + (x + y) = 1 \iff 2\,x = 1\,;$$

— si $-x + y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-x + y) - (x + y) = 1 \iff -2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,x = 1$

en bleu : $-2\,y = 1$

en vert : $2\,x = 1$

en jaune : $2\,y = 1$

**Corrigé 10.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 2

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2| + |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| \\ &\leqslant |x_1| + |x_2| + |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &\leqslant |x_1| + |x_1 - y_1| + |x_2| + |x_2 - y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x| + |x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x| = |x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $x = 0$ et $x - y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x| + |x - y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x$ et $x - y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x \geqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x) + (x - y) = 1 \iff 2\,x - y = 1\,;$$

— si $x \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x) - (x - y) = 1 \iff y = 1\,;$$

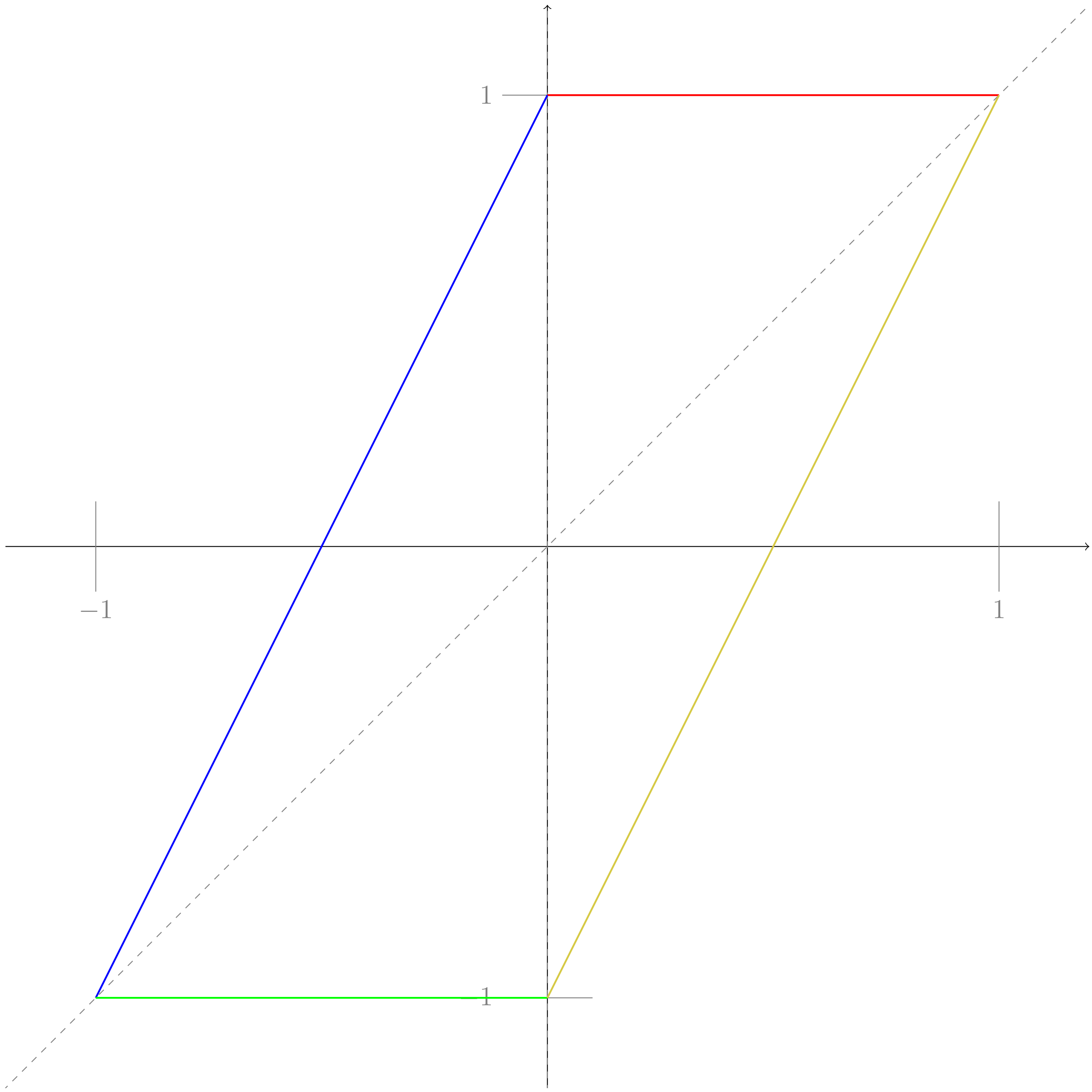
— si $x \leqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x) + (x - y) = 1 \iff -y = 1\,;$$

— si $x \leqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x) - (x - y) = 1 \iff -2\,x + y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $y = 1$

en bleu : $-2\,x + y = 1$

en vert : $-y = 1$

en jaune : $2\,x - y = 1$

**Corrigé 11.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 2

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |6\,x_1 + 6\,x_2 - y_1 - y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2| \\
&\leqslant |6\,x_1 - y_1| + |6\,x_2 - y_2| + |2\,x_1| + |2\,x_2| \\
&\leqslant |6\,x_1 - y_1| + |2\,x_1| + |6\,x_2 - y_2| + |2\,x_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|6\,x - y| + |2\,x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|6\,x - y| = |2\,x| = 0$, ce qui équivaut à : $6\,x - y = 0$ et $2\,x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |6\,x - y| + |2\,x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $6\,x - y$ et $2\,x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $6\,x - y \geqslant 0$ et $2\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (6\,x - y) + (2\,x) = 1 \iff 8\,x - y = 1\,;$$

— si $6\,x - y \geqslant 0$ et $2\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (6\,x - y) - (2\,x) = 1 \iff 4\,x - y = 1\,;$$

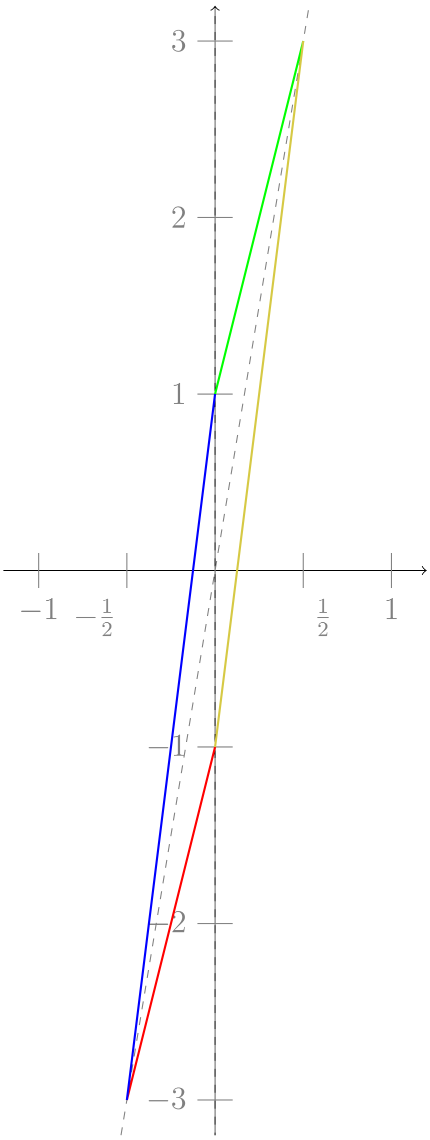
— si $6\,x - y \leqslant 0$ et $2\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(6\,x - y) + (2\,x) = 1 \iff -4\,x + y = 1\,;$$

— si $6\,x - y \leqslant 0$ et $2\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(6\,x - y) - (2\,x) = 1 \iff -8\,x + y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $4\,x - y = 1$

en bleu : $-8\,x + y = 1$

en vert : $-4\,x + y = 1$

en jaune : $8\,x - y = 1$

**Corrigé 12.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 2

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |-2\,x_1 - 2\,x_2 + y_1 + y_2| + |6\,x_1 + 6\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |-2\,x_1 + y_1| + |-2\,x_2 + y_2| + |6\,x_1 + y_1| + |6\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |-2\,x_1 + y_1| + |6\,x_1 + y_1| + |-2\,x_2 + y_2| + |6\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x,y) = 0$. C'est-à-dire : $|-2\,x + y| + |6\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-2\,x + y| = |6\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $-2\,x + y = 0$ et $6\,x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & 0 \\ 6\,x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -2\,x & + & y & = & 0 & \\ & & 4\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x,y) = 0$ alors $(x,y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x,y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |-2\,x + y| + |6\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-2\,x+y$ et $6\,x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-2\,x + y \geqslant 0$ et $6\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-2\,x + y) + (6\,x + y) = 1 \iff 4\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $-2\,x + y \geqslant 0$ et $6\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-2\,x + y) - (6\,x + y) = 1 \iff -8\,x = 1\,;$$

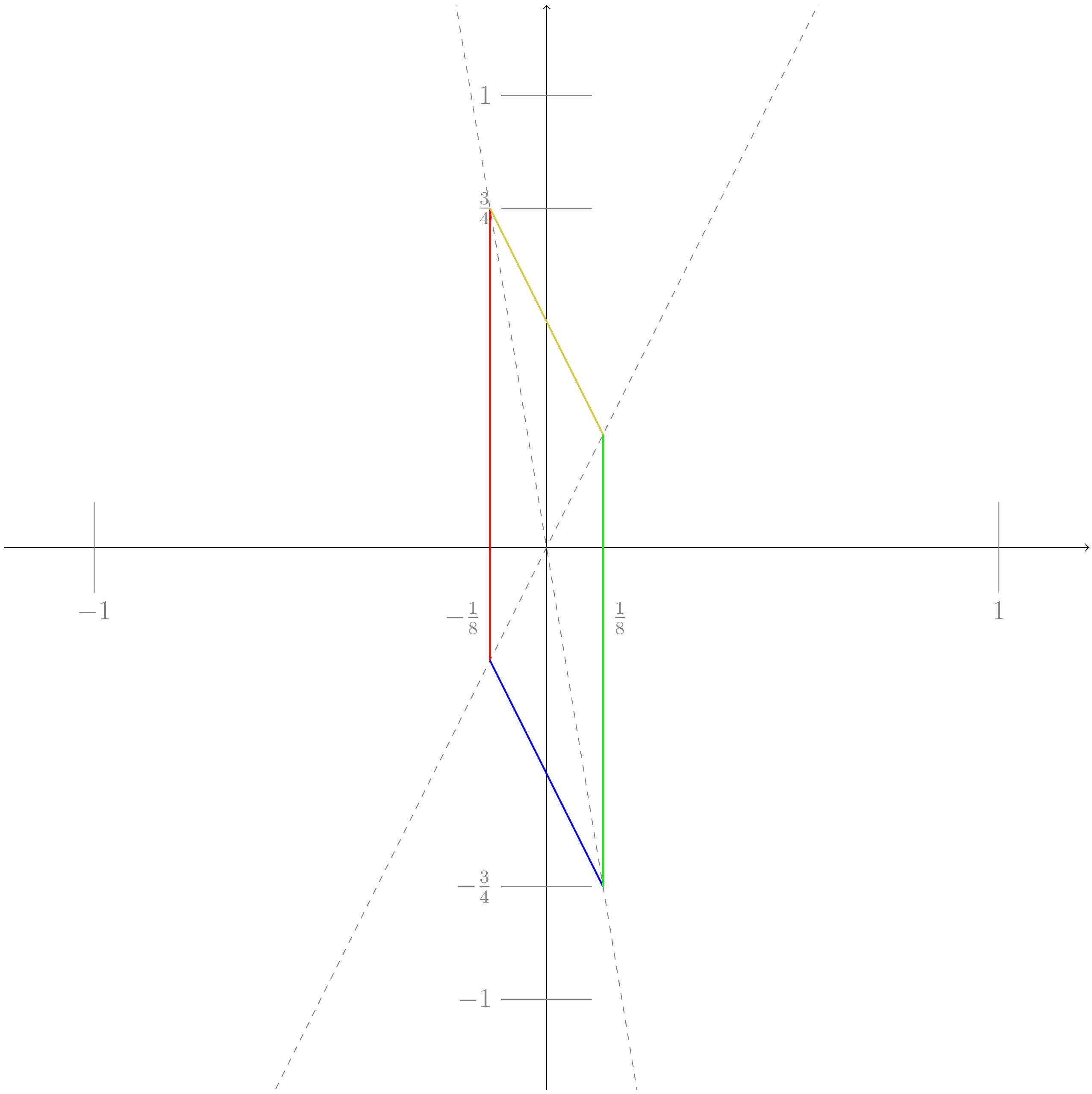
— si $-2\,x + y \leqslant 0$ et $6\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-2\,x + y) + (6\,x + y) = 1 \iff 8\,x = 1\,;$$

— si $-2\,x + y \leqslant 0$ et $6\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-2\,x + y) - (6\,x + y) = 1 \iff -4\,x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-8\,x = 1$

en bleu : $-4\,x - 2\,y = 1$

en vert : $8\,x = 1$

en jaune : $4\,x + 2\,y = 1$

**Corrigé 13.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 2

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2-y_1-y_2| + |x_1+x_2+y_1+y_2| \\
&\leqslant |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \\
&\leqslant |x_1-y_1| + |x_1+y_1| + |x_2-y_2| + |x_2+y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - y| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - y| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - y = 0$ et $x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & - & y & = & 0 & \\ & & 2\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x-y| + |x+y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - y$ et $x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - y \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x-y) + (x+y) = 1 \iff 2\,x = 1\,;$$

— si $x - y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x-y) - (x+y) = 1 \iff -2\,y = 1\,;$$

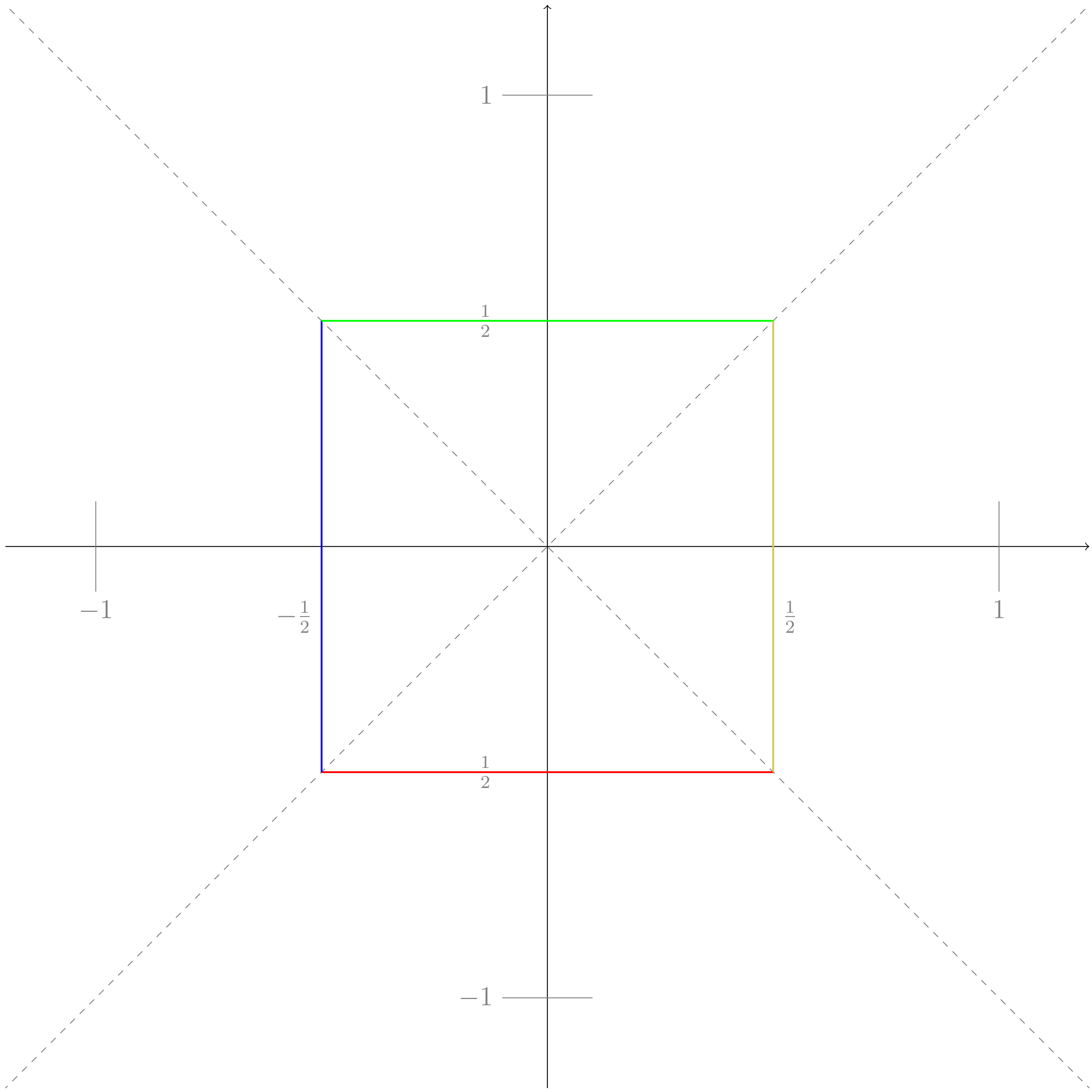
— si $x - y \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x-y) + (x+y) = 1 \iff 2\,y = 1\,;$$

— si $x - y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x-y) - (x+y) = 1 \iff -2\,x = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,y = 1$

en bleu : $-2\,x = 1$

en vert : $2\,y = 1$

en jaune : $2\,x = 1$

← page 2

**Corrigé 14.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue.

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |4\,x_1 + 4\,x_2| + |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \\
&\leqslant |4\,x_1| + |4\,x_2| + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\
&\leqslant |4\,x_1| + |x_1 + y_1| + |4\,x_2| + |x_2 + y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|4\,x| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|4\,x| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $4\,x = 0$ et $x+y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |4\,x| + |x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $4\,x$ et $x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $4\,x \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (4\,x) + (x + y) = 1 \iff 5\,x + y = 1\,;$$

— si $4\,x \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (4\,x) - (x + y) = 1 \iff 3\,x - y = 1\,;$$

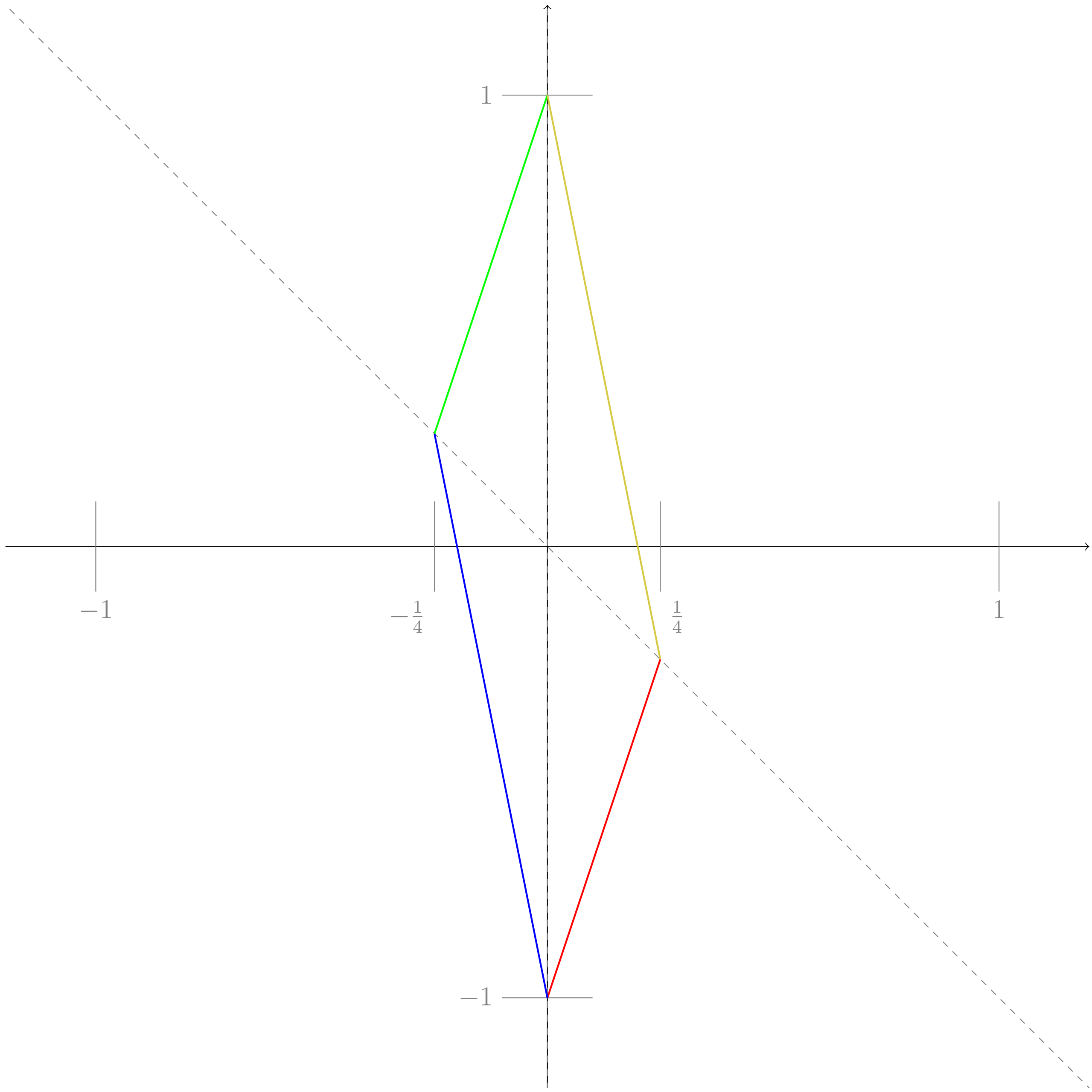
— si $4\,x \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(4\,x) + (x + y) = 1 \iff -3\,x + y = 1\,;$$

— si $4\,x \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(4\,x) - (x + y) = 1 \iff -5\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,x - y = 1$

en bleu : $-5\,x - y = 1$

en vert : $-3\,x + y = 1$

en jaune : $5\,x + y = 1$

**Corrigé 15.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 2

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |9\,x_1 + 9\,x_2 + y_1 + y_2| + |2\,y_1 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |9\,x_1 + y_1| + |9\,x_2 + y_2| + |2\,y_1| + |2\,y_2| \\ &\leqslant |9\,x_1 + y_1| + |2\,y_1| + |9\,x_2 + y_2| + |2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|9\,x + y| + |2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|9\,x + y| = |2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $9\,x + y = 0$ et $2\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |9\,x + y| + |2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $9\,x + y$ et $2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $9\,x + y \geqslant 0$ et $2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (9\,x + y) + (2\,y) = 1 \iff 9\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $9\,x + y \geqslant 0$ et $2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (9\,x + y) - (2\,y) = 1 \iff 9\,x - y = 1\,;$$

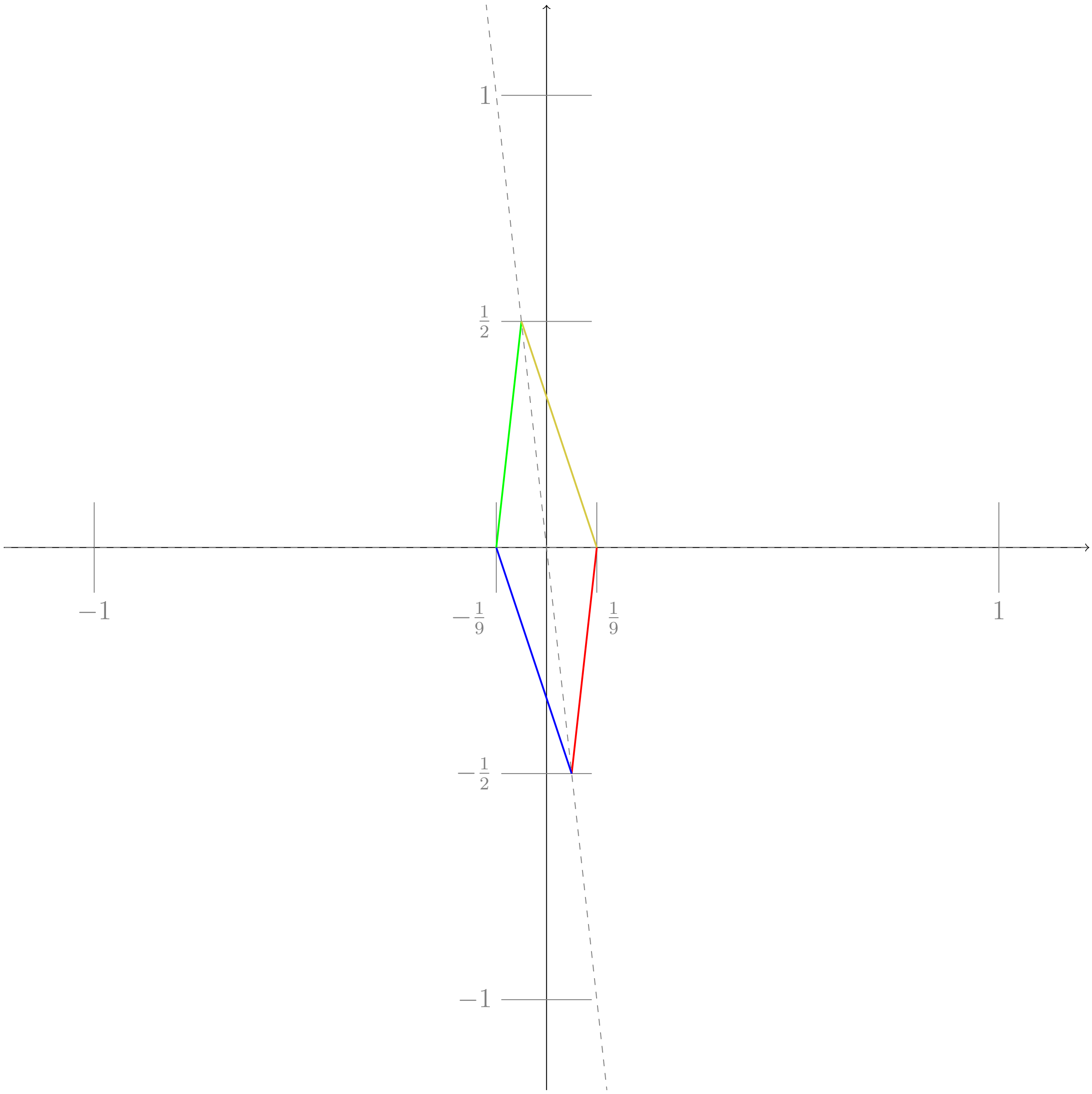
— si $9\,x + y \leqslant 0$ et $2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(9\,x + y) + (2\,y) = 1 \iff -9\,x + y = 1\,;$$

— si $9\,x + y \leqslant 0$ et $2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(9\,x + y) - (2\,y) = 1 \iff -9\,x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $9\,x - y = 1$

en bleu : $-9\,x - 3\,y = 1$

en vert : $-9\,x + y = 1$

en jaune : $9\,x + 3\,y = 1$

**Corrigé 16.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 2

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |3\,x_1 + 3\,x_2| + |3\,y_1 + 3\,y_2| \\ &\leqslant |3\,x_1| + |3\,x_2| + |3\,y_1| + |3\,y_2| \\ &\leqslant |3\,x_1| + |3\,y_1| + |3\,x_2| + |3\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|3\,x| + |3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|3\,x| = |3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $3\,x = 0$ et $3\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |3\,x| + |3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $3\,x$ et $3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $3\,x \geqslant 0$ et $3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,x) + (3\,y) = 1 \iff 3\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $3\,x \geqslant 0$ et $3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,x) - (3\,y) = 1 \iff 3\,x - 3\,y = 1\,;$$

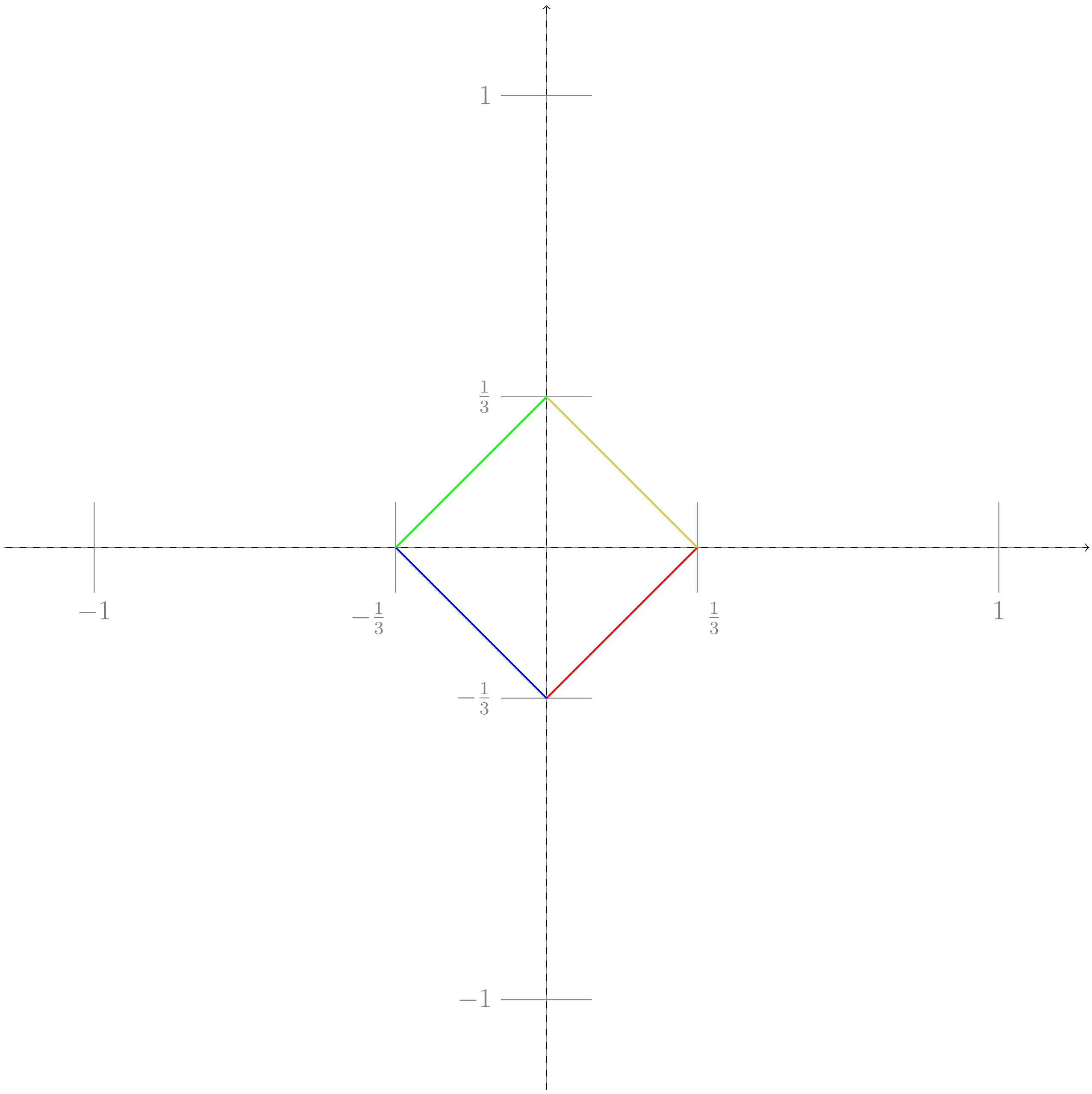
— si $3\,x \leqslant 0$ et $3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(3\,x) + (3\,y) = 1 \iff -3\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $3\,x \leqslant 0$ et $3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(3\,x) - (3\,y) = 1 \iff -3\,x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,x - 3\,y = 1$

en bleu : $-3\,x - 3\,y = 1$

en vert : $-3\,x + 3\,y = 1$

en jaune : $3\,x + 3\,y = 1$

← page 2

**Corrigé 17.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue.

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |2\,x_1+2\,x_2+y_1+y_2| + |-x_1-x_2+y_1+y_2| \\ &\leqslant |2\,x_1+y_1| + |2\,x_2+y_2| + |-x_1+y_1| + |-x_2+y_2| \\ &\leqslant |2\,x_1+y_1| + |-x_1+y_1| + |2\,x_2+y_2| + |-x_2+y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,x + y| + |-x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,x + y| = |-x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,x+y = 0$ et $-x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & y & = & 0 \\ -\;x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 2\,x & + & y & = & 0 & \\ & & \frac{3}{2}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |2\,x+y| + |-x+y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,x+y$ et $-x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,x + y \geqslant 0$ et $-x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (2\,x+y)+(-x+y) = 1 \iff x+2\,y = 1\,;$$

— si $2\,x + y \geqslant 0$ et $-x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (2\,x+y)-(-x+y) = 1 \iff 3\,x = 1\,;$$

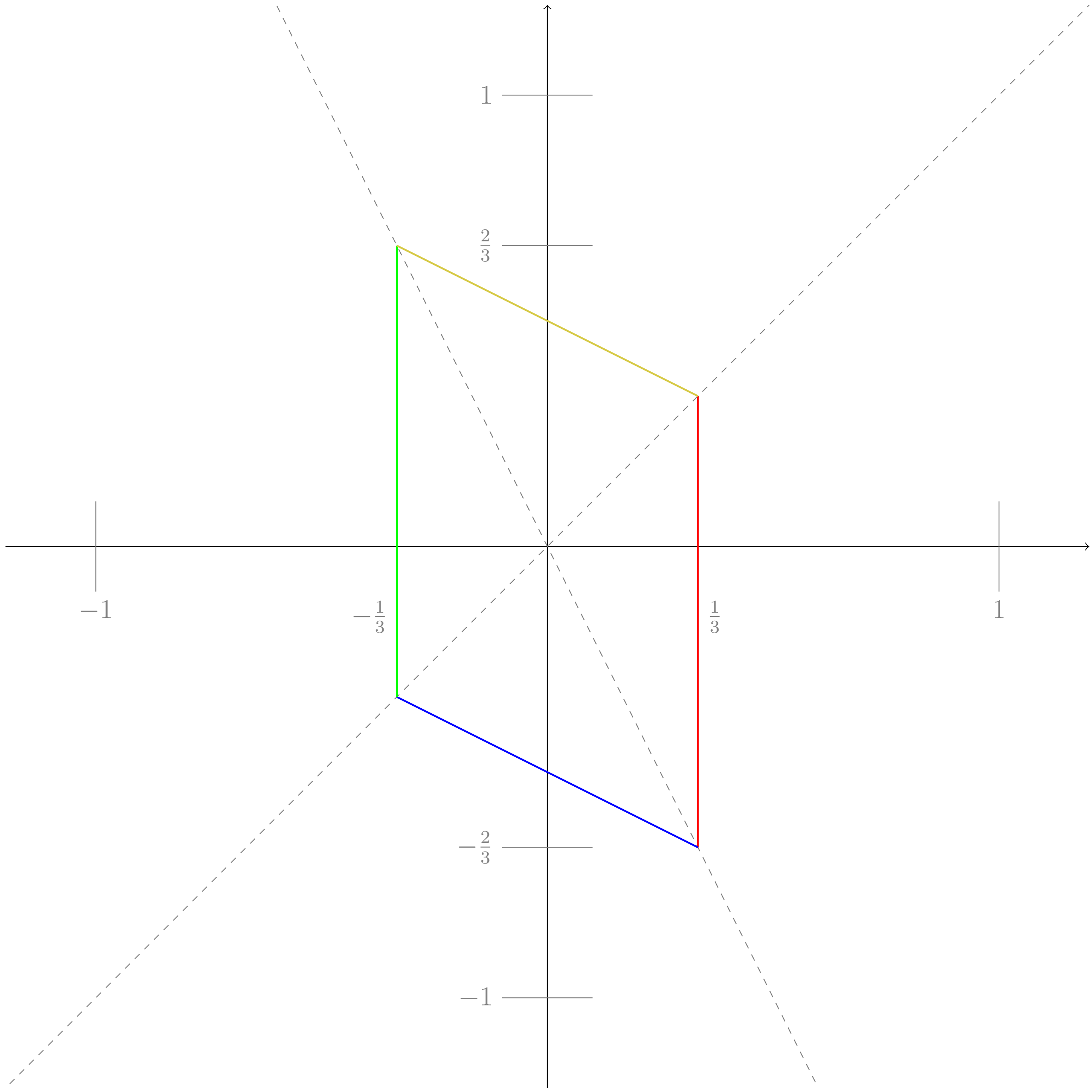
— si $2\,x + y \leqslant 0$ et $-x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(2\,x+y)+(-x+y) = 1 \iff -3\,x = 1\,;$$

— si $2\,x + y \leqslant 0$ et $-x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(2\,x+y)-(-x+y) = 1 \iff -x-2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,x = 1$

en bleu : $-x - 2\,y = 1$

en vert : $-3\,x = 1$

en jaune : $x + 2\,y = 1$

**Corrigé 18.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 2

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 - 2\,y_1 - 2\,y_2| + |y_1 + y_2| \\
&\leqslant |x_1 - 2\,y_1| + |x_2 - 2\,y_2| + |y_1| + |y_2| \\
&\leqslant |x_1 - 2\,y_1| + |y_1| + |x_2 - 2\,y_2| + |y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - 2\,y| + |y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à $0$ : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - 2\,y| = |y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - 2\,y = 0$ et $y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x - 2\,y| + |y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - 2\,y$ et $y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - 2\,y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - 2\,y) + (y) = 1 \iff x - y = 1\,;$$

— si $x - 2\,y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - 2\,y) - (y) = 1 \iff x - 3\,y = 1\,;$$

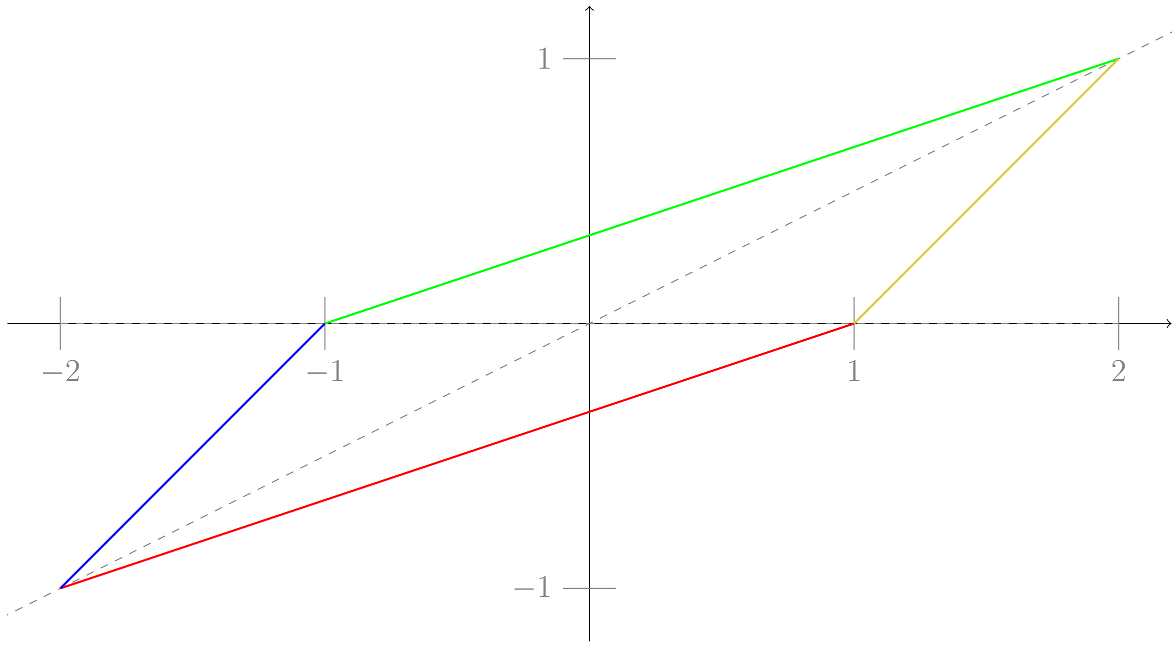
— si $x - 2\,y \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x - 2\,y) + (y) = 1 \iff -x + 3\,y = 1\,;$$

— si $x - 2\,y \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x - 2\,y) - (y) = 1 \iff -x + y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - 3\,y = 1$

en bleu : $-x + y = 1$

en vert : $-x + 3\,y = 1$

en jaune : $x - y = 1$

← page 3

**Corrigé 19.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue.

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2 - y_1 - y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |y_2| + |2\,x_1 - y_1| + |2\,x_2 - y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |2\,x_1 - y_1| + |y_2| + |2\,x_2 - y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |2\,x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |2\,x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $2\,x - y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow |y| + |2\,x - y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $2\,x - y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $2\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow (y) + (2\,x - y) = 1 \Longleftrightarrow 2\,x = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $2\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow (y) - (2\,x - y) = 1 \Longleftrightarrow -2\,x + 2\,y = 1\,;$$

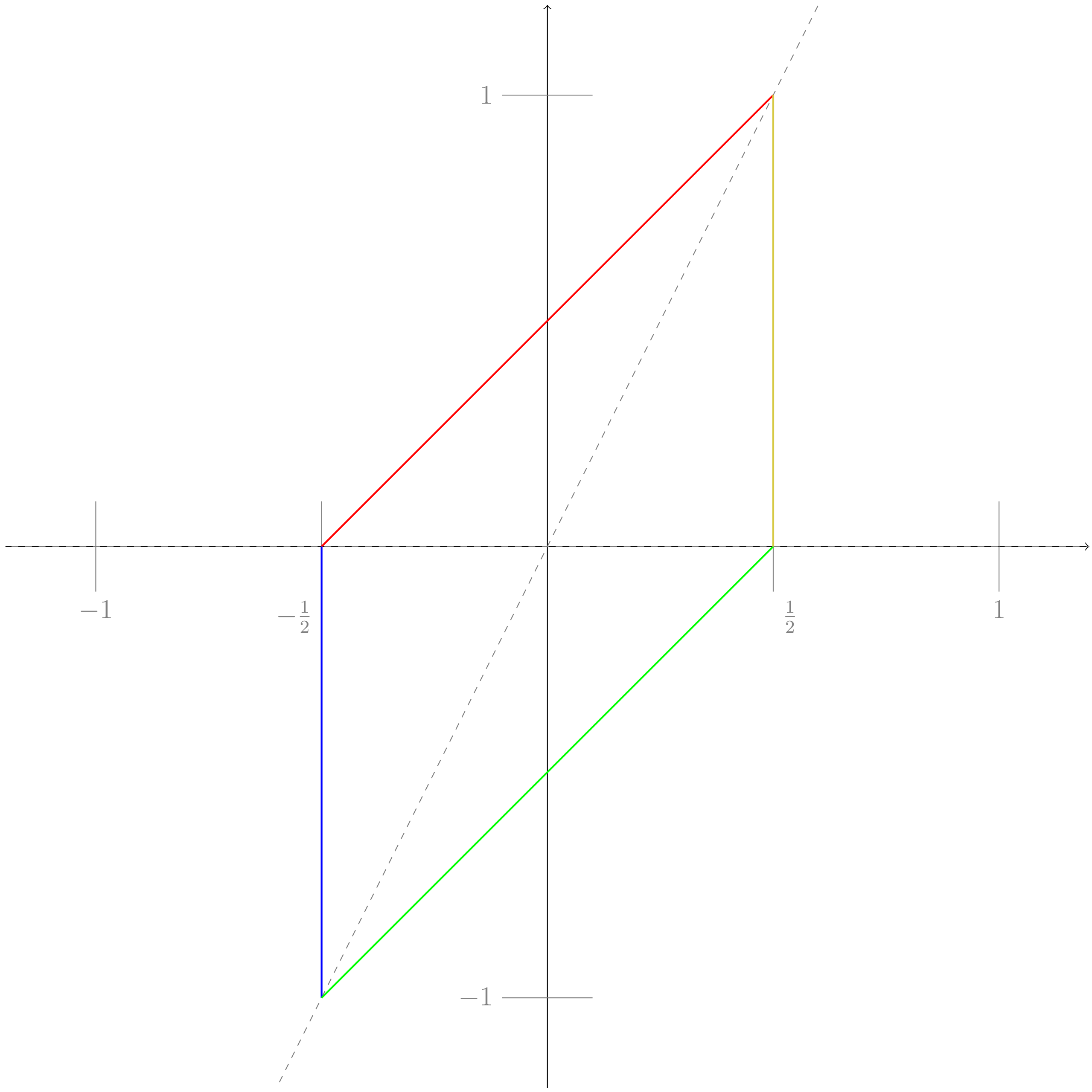
— si $y \leqslant 0$ et $2\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow -(y) + (2\,x - y) = 1 \Longleftrightarrow 2\,x - 2\,y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $2\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow -(y) - (2\,x - y) = 1 \Longleftrightarrow -2\,x = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,x + 2\,y = 1$

en bleu : $-2\,x = 1$

en vert : $2\,x - 2\,y = 1$

en jaune : $2\,x = 1$

**Corrigé 20.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 3

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |y_2| + |2\,x_1 + y_1| + |2\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |2\,x_1 + y_1| + |y_2| + |2\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |2\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |2\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $2\,x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |2\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $2\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (2\,x + y) = 1 \iff 2\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (2\,x + y) = 1 \iff -2\,x = 1\,;$$

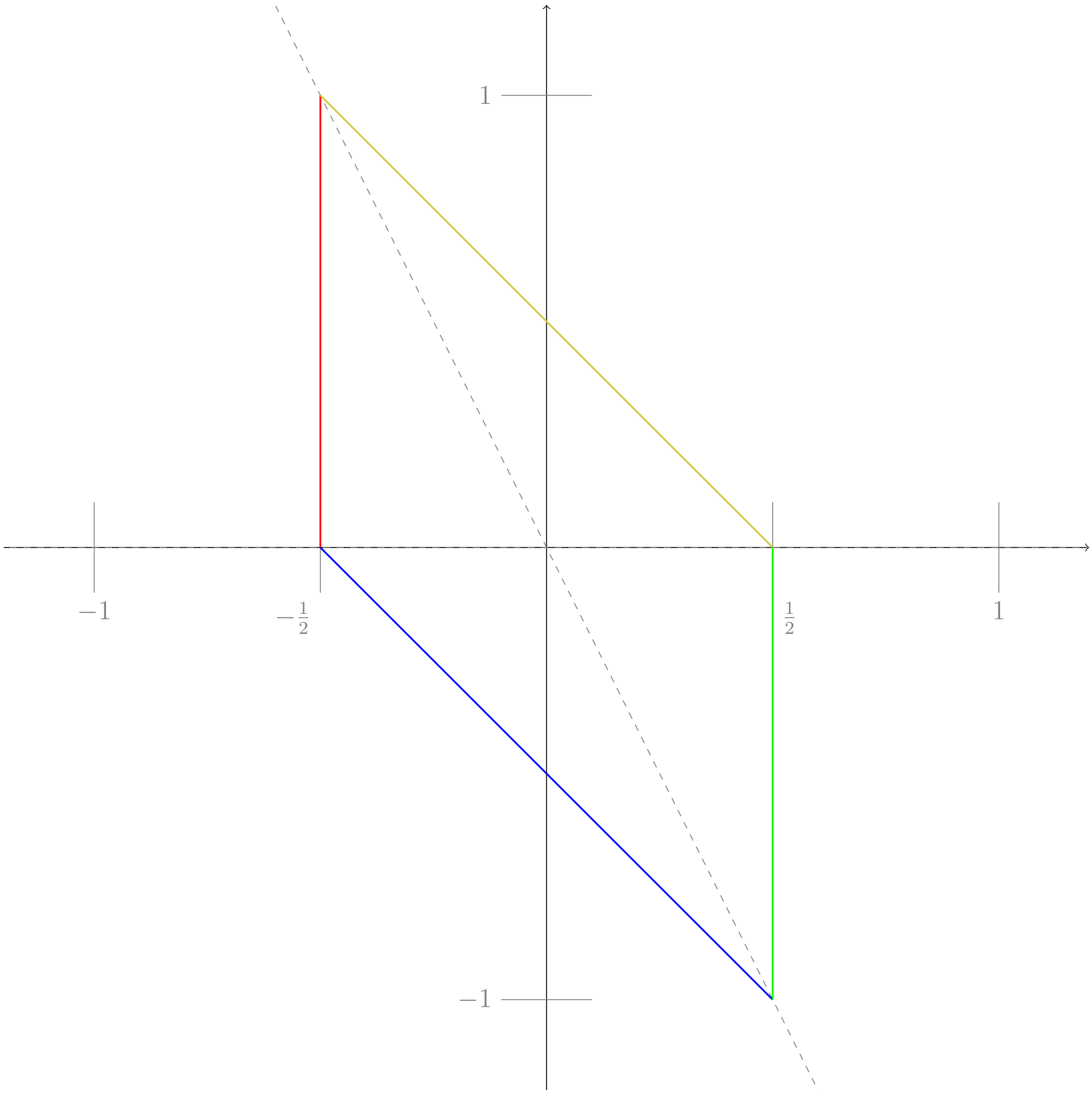
— si $y \leqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(y) + (2\,x + y) = 1 \iff 2\,x = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(y) - (2\,x + y) = 1 \iff -2\,x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,x = 1$

en bleu : $-2\,x - 2\,y = 1$

en vert : $2\,x = 1$

en jaune : $2\,x + 2\,y = 1$

**Corrigé 21.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 3

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |2\,x_1+2\,x_2+2\,y_1+2\,y_2| + |2\,x_1+2\,x_2+3\,y_1+3\,y_2| \\
&\leqslant |2\,x_1+2\,y_1| + |2\,x_2+2\,y_2| + |2\,x_1+3\,y_1| + |2\,x_2+3\,y_2| \\
&\leqslant |2\,x_1+2\,y_1| + |2\,x_1+3\,y_1| + |2\,x_2+2\,y_2| + |2\,x_2+3\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,x + 2\,y| + |2\,x + 3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,x + 2\,y| = |2\,x + 3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,x + 2\,y = 0$ et $2\,x + 3\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ 2\,x & + & 3\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 2\,x & + & 2\,y & = & 0 & \\ & & y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |2\,x+2\,y| + |2\,x+3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,x+2\,y$ et $2\,x+3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,x + 2\,y \geqslant 0$ et $2\,x + 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (2\,x+2\,y) + (2\,x+3\,y) = 1 \iff 4\,x+5\,y = 1\,;$$

— si $2\,x + 2\,y \geqslant 0$ et $2\,x + 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (2\,x+2\,y) - (2\,x+3\,y) = 1 \iff -y = 1\,;$$

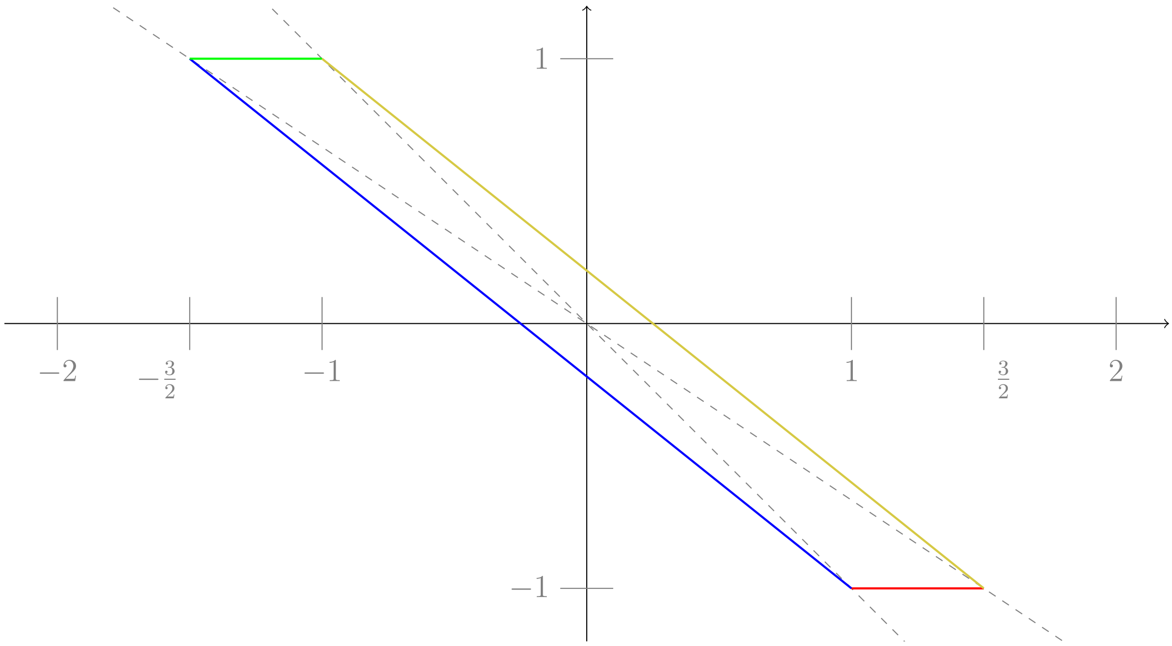
— si $2\,x + 2\,y \leqslant 0$ et $2\,x + 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(2\,x+2\,y) + (2\,x+3\,y) = 1 \iff y = 1\,;$$

— si $2\,x + 2\,y \leqslant 0$ et $2\,x + 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(2\,x+2\,y) - (2\,x+3\,y) = 1 \iff -4\,x-5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-y = 1$

en bleu : $-4\,x - 5\,y = 1$

en vert : $y = 1$

en jaune : $4\,x + 5\,y = 1$

**Corrigé 22.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 3

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |3\,x_1 + 3\,x_2| \\ &\leqslant |y_1| + |y_2| + |3\,x_1| + |3\,x_2| \\ &\leqslant |y_1| + |3\,x_1| + |y_2| + |3\,x_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |3\,x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |3\,x| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $3\,x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |3\,x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $3\,x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $3\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (3\,x) = 1 \iff 3\,x + y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $3\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (3\,x) = 1 \iff -3\,x + y = 1\,;$$

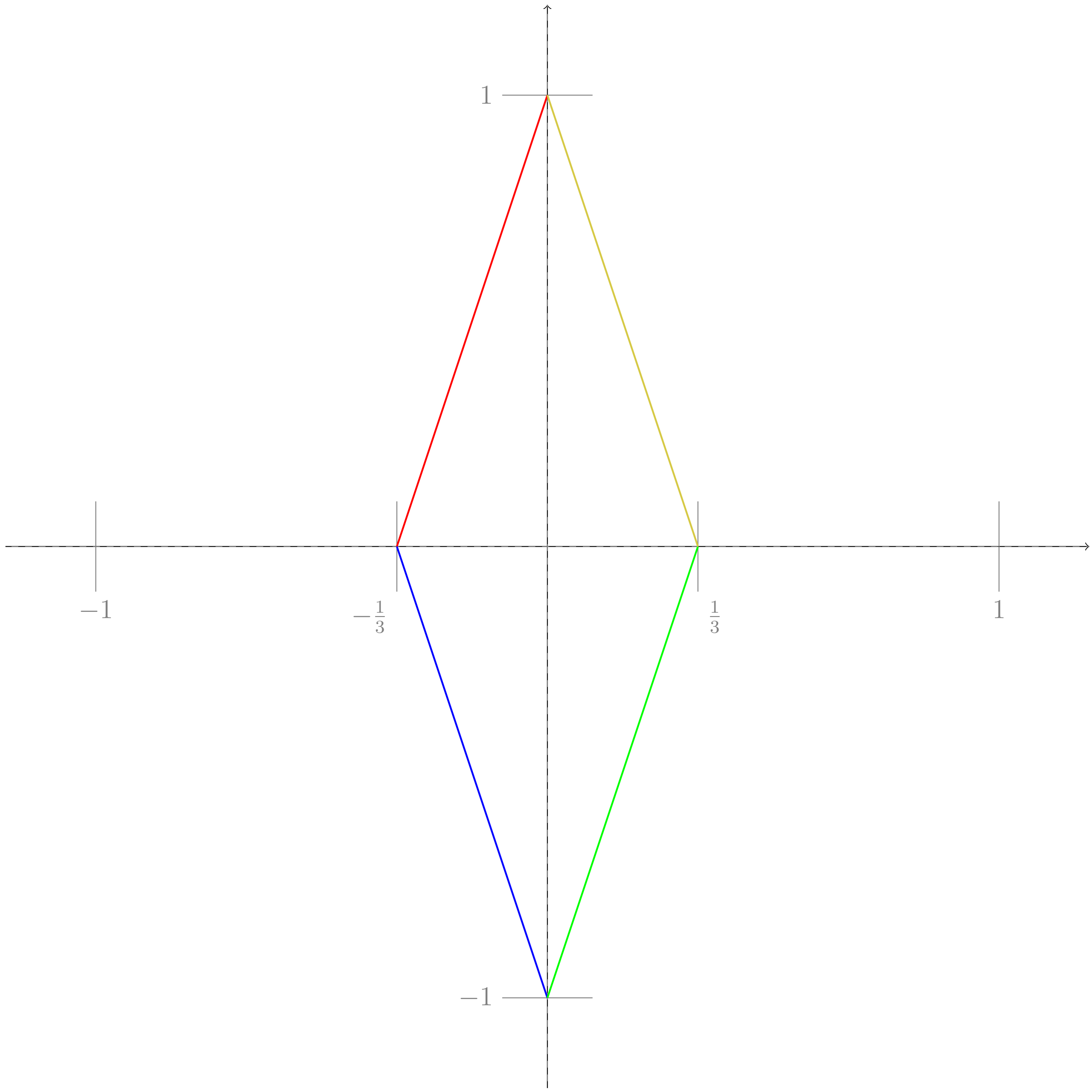
— si $y \leqslant 0$ et $3\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(y) + (3\,x) = 1 \iff 3\,x - y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $3\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(y) - (3\,x) = 1 \iff -3\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-3\,x + y = 1$

en bleu : $-3\,x - y = 1$

en vert : $3\,x - y = 1$

en jaune : $3\,x + y = 1$

**Corrigé 23.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 3

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2-10\,y_1-10\,y_2| + |-2\,x_1-2\,x_2+5\,y_1+5\,y_2| \\ &\leqslant |x_1-10\,y_1|+|x_2-10\,y_2|+|-2\,x_1+5\,y_1|+|-2\,x_2+5\,y_2| \\ &\leqslant |x_1-10\,y_1|+|-2\,x_1+5\,y_1|+|x_2-10\,y_2|+|-2\,x_2+5\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - 10\,y| + |-2\,x + 5\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - 10\,y| = |-2\,x + 5\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - 10\,y = 0$ et $-2\,x + 5\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 10\,y & = & 0 \\ -\;2\,x & + & 5\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & - & 10\,y & = & 0 & \\ & - & 15\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x - 10\,y| + |-2\,x + 5\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - 10\,y$ et $-2\,x + 5\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - 10\,y \geqslant 0$ et $-2\,x + 5\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x - 10\,y) + (-2\,x + 5\,y) = 1 \iff -x - 5\,y = 1\,;$$

— si $x - 10\,y \geqslant 0$ et $-2\,x + 5\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x - 10\,y) - (-2\,x + 5\,y) = 1 \iff 3\,x - 15\,y = 1\,;$$

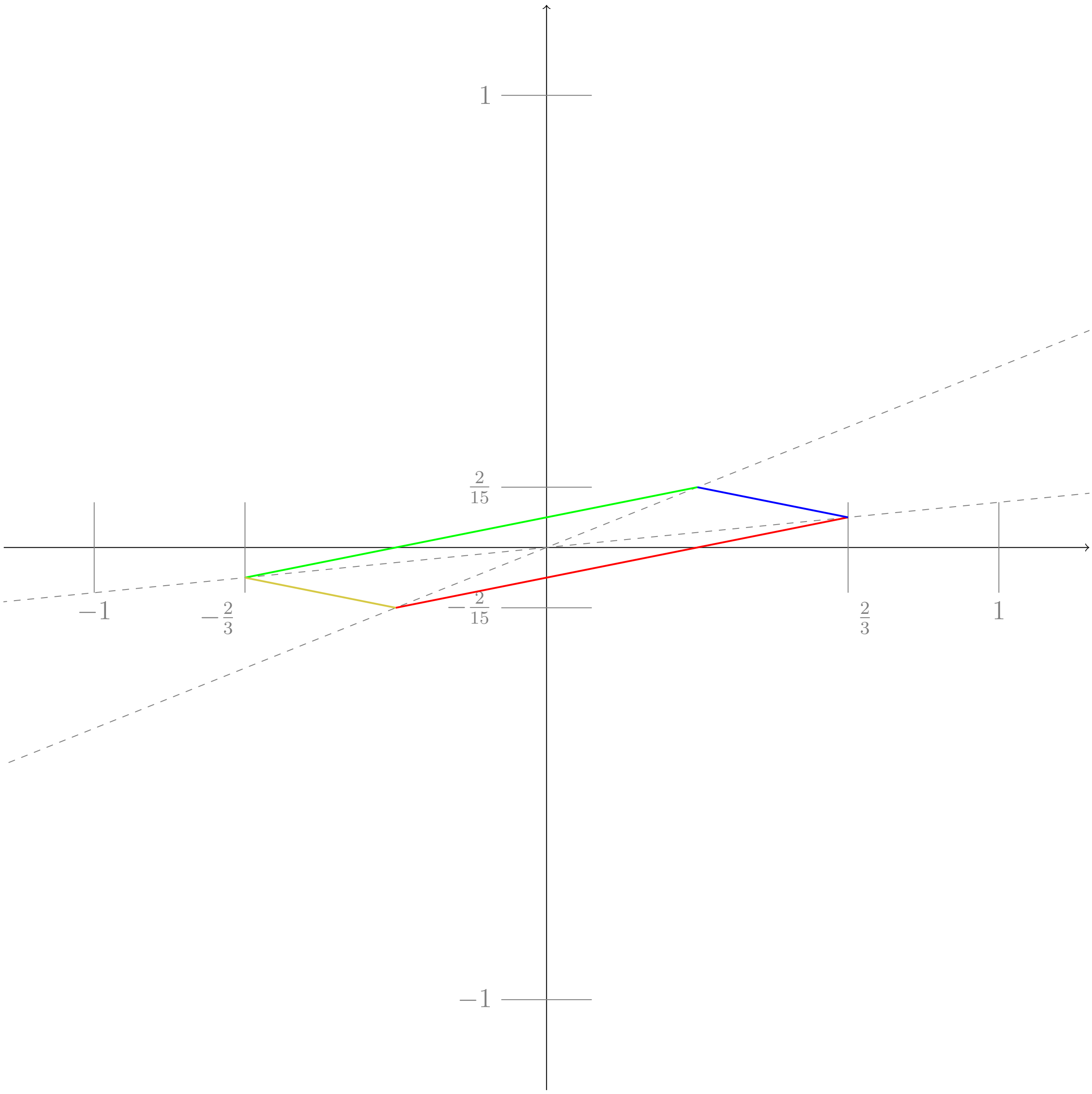
— si $x - 10\,y \leqslant 0$ et $-2\,x + 5\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x - 10\,y) + (-2\,x + 5\,y) = 1 \iff -3\,x + 15\,y = 1\,;$$

— si $x - 10\,y \leqslant 0$ et $-2\,x + 5\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x - 10\,y) - (-2\,x + 5\,y) = 1 \iff x + 5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,x - 15\,y = 1$

en bleu : $x + 5\,y = 1$

en vert : $-3\,x + 15\,y = 1$

en jaune : $-x - 5\,y = 1$

**Corrigé 24.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 3

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |3\,x_1 + 3\,x_2 + y_1 + y_2| + |x_1 + x_2| \\
&\leqslant |3\,x_1 + y_1| + |3\,x_2 + y_2| + |x_1| + |x_2| \\
&\leqslant |3\,x_1 + y_1| + |x_1| + |3\,x_2 + y_2| + |x_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|3\,x + y| + |x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à $0$ : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|3\,x + y| = |x| = 0$, ce qui équivaut à : $3\,x + y = 0$ et $x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |3\,x + y| + |x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $3\,x + y$ et $x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $3\,x + y \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,x + y) + (x) = 1 \iff 4\,x + y = 1\,;$$

— si $3\,x + y \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,x + y) - (x) = 1 \iff 2\,x + y = 1\,;$$

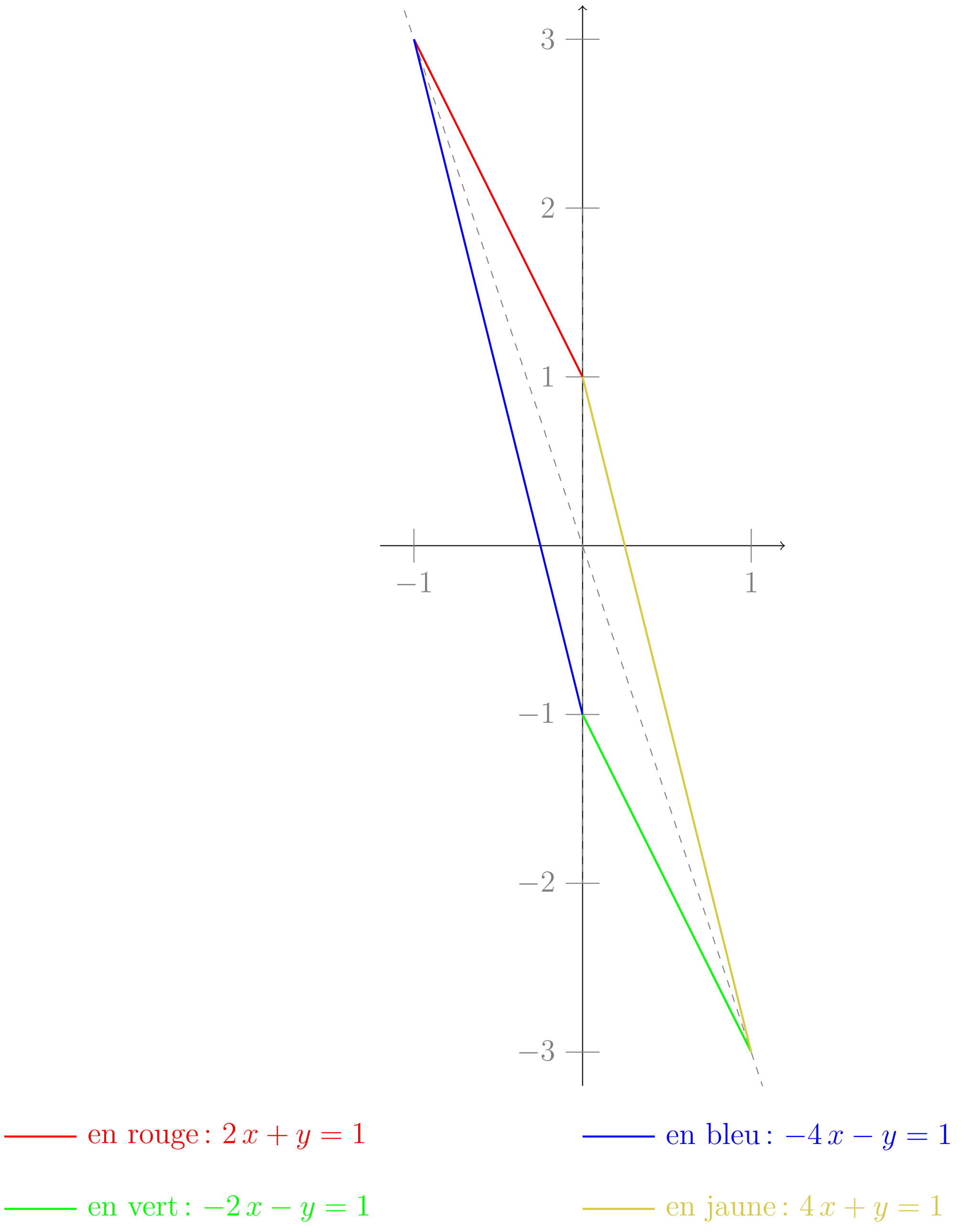
— si $3\,x + y \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(3\,x + y) + (x) = 1 \iff -2\,x - y = 1\,;$$

— si $3\,x + y \leqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(3\,x + y) - (x) = 1 \iff -4\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.


3
2
1
−1
1
−1
−2
−3
en rouge : $2\,x + y = 1$
en bleu : $-4\,x - y = 1$
en vert : $-2\,x - y = 1$
en jaune : $4\,x + y = 1$

**Corrigé 25.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 3

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-3\,x_1 - 3\,x_2 + y_1 + y_2| + |x_1 + x_2 - 7\,y_1 - 7\,y_2| \\ &\leqslant |-3\,x_1 + y_1| + |-3\,x_2 + y_2| + |x_1 - 7\,y_1| + |x_2 - 7\,y_2| \\ &\leqslant |-3\,x_1 + y_1| + |x_1 - 7\,y_1| + |-3\,x_2 + y_2| + |x_2 - 7\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-3\,x + y| + |x - 7\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-3\,x + y| = |x - 7\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $-3\,x + y = 0$ et $x - 7\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -3\,x & + & y & = & 0 \\ x & - & 7\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -3\,x & + & y & = & 0 & \\ & - & \frac{20}{3}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |-3\,x + y| + |x - 7\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-3\,x+y$ et $x-7\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-3\,x + y \geqslant 0$ et $x - 7\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-3\,x + y) + (x - 7\,y) = 1 \iff -2\,x - 6\,y = 1\,;$$

— si $-3\,x + y \geqslant 0$ et $x - 7\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-3\,x + y) - (x - 7\,y) = 1 \iff -4\,x + 8\,y = 1\,;$$

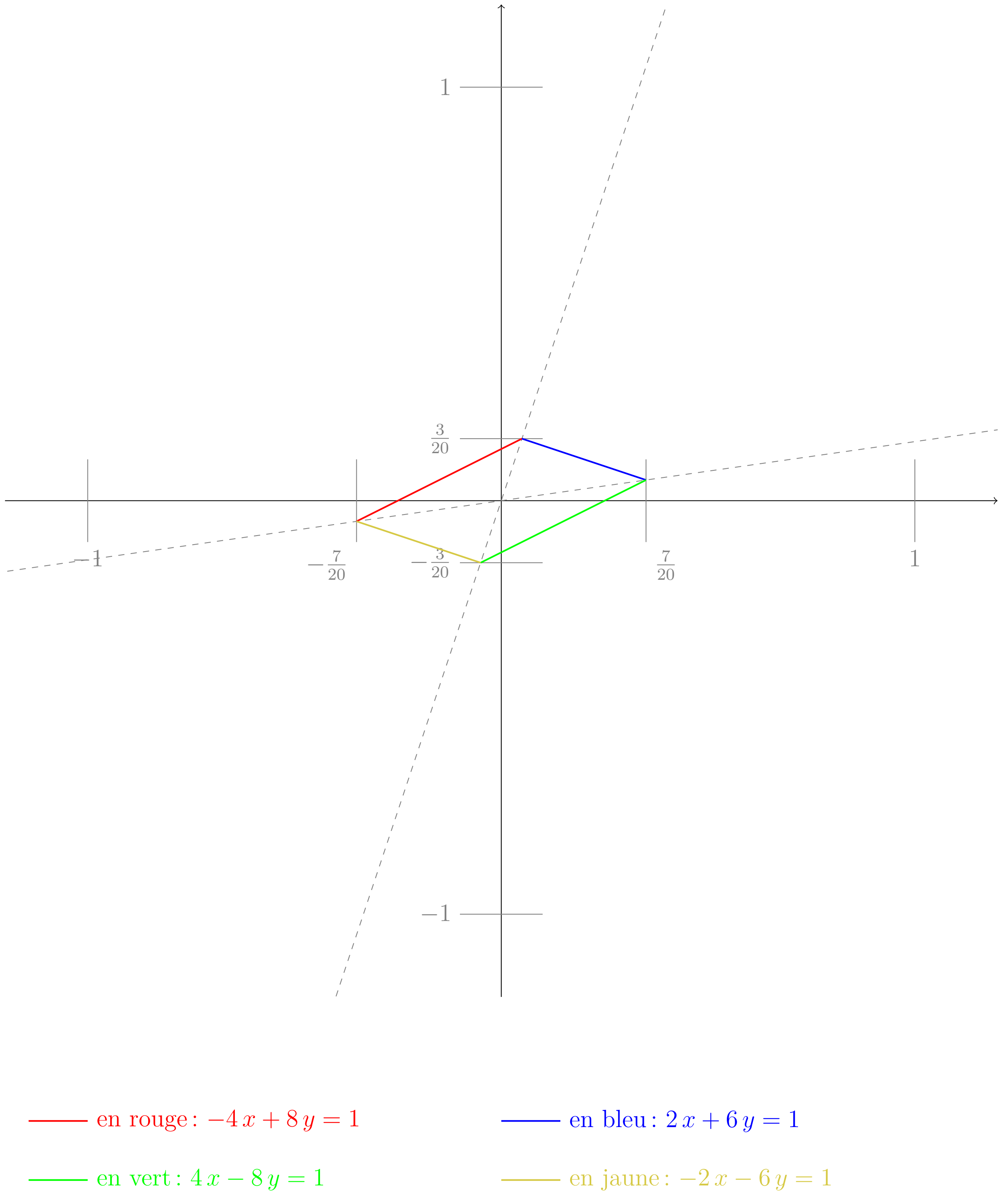
— si $-3\,x + y \leqslant 0$ et $x - 7\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-3\,x + y) + (x - 7\,y) = 1 \iff 4\,x - 8\,y = 1\,;$$

— si $-3\,x + y \leqslant 0$ et $x - 7\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-3\,x + y) - (x - 7\,y) = 1 \iff 2\,x + 6\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.



1
$\frac{3}{20}$
$-1$
$-\frac{7}{20}$
$-\frac{3}{20}$
$\frac{7}{20}$
1
$-1$
en rouge : $-4\,x + 8\,y = 1$
en bleu : $2\,x + 6\,y = 1$
en vert : $4\,x - 8\,y = 1$
en jaune : $-2\,x - 6\,y = 1$

**Corrigé 26.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 3

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| + |4\,y_1 + 4\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + |4\,y_1| + |4\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 + y_1| + |4\,y_1| + |x_2 + y_2| + |4\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + y| + |4\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + y| = |4\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + y = 0$ et $4\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x + y| + |4\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + y$ et $4\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + y \geqslant 0$ et $4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) + (4\,y) = 1 \iff x + 5\,y = 1\,;$$

— si $x + y \geqslant 0$ et $4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) - (4\,y) = 1 \iff x - 3\,y = 1\,;$$

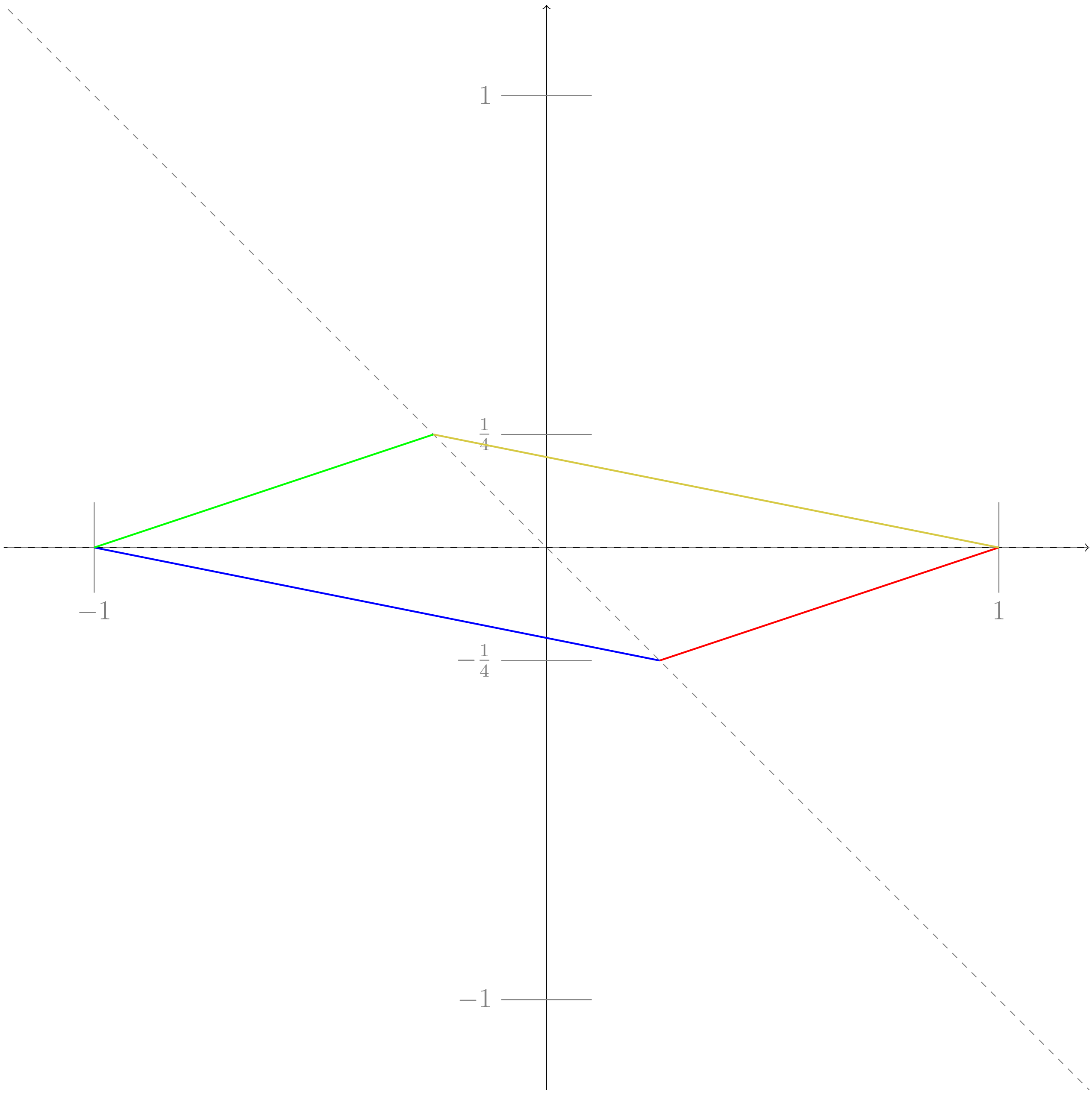
— si $x + y \leqslant 0$ et $4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x + y) + (4\,y) = 1 \iff -x + 3\,y = 1\,;$$

— si $x + y \leqslant 0$ et $4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x + y) - (4\,y) = 1 \iff -x - 5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - 3\,y = 1$

en bleu : $-x - 5\,y = 1$

en vert : $-x + 3\,y = 1$

en jaune : $x + 5\,y = 1$

**Corrigé 27.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 3

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-3\,x_1 - 3\,x_2 + y_1 + y_2| + |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |-3\,x_1 + y_1| + |-3\,x_2 + y_2| + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &\leqslant |-3\,x_1 + y_1| + |x_1 + y_1| + |-3\,x_2 + y_2| + |x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-3\,x + y| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-3\,x + y| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $-3\,x + y = 0$ et $x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -\ 3\,x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -\ 3\,x & + & y & = & 0 & \\ & & \frac{4}{3}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |-3\,x + y| + |x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-3\,x+y$ et $x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-3\,x + y \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-3\,x + y) + (x + y) = 1 \iff -2\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $-3\,x + y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-3\,x + y) - (x + y) = 1 \iff -4\,x = 1\,;$$

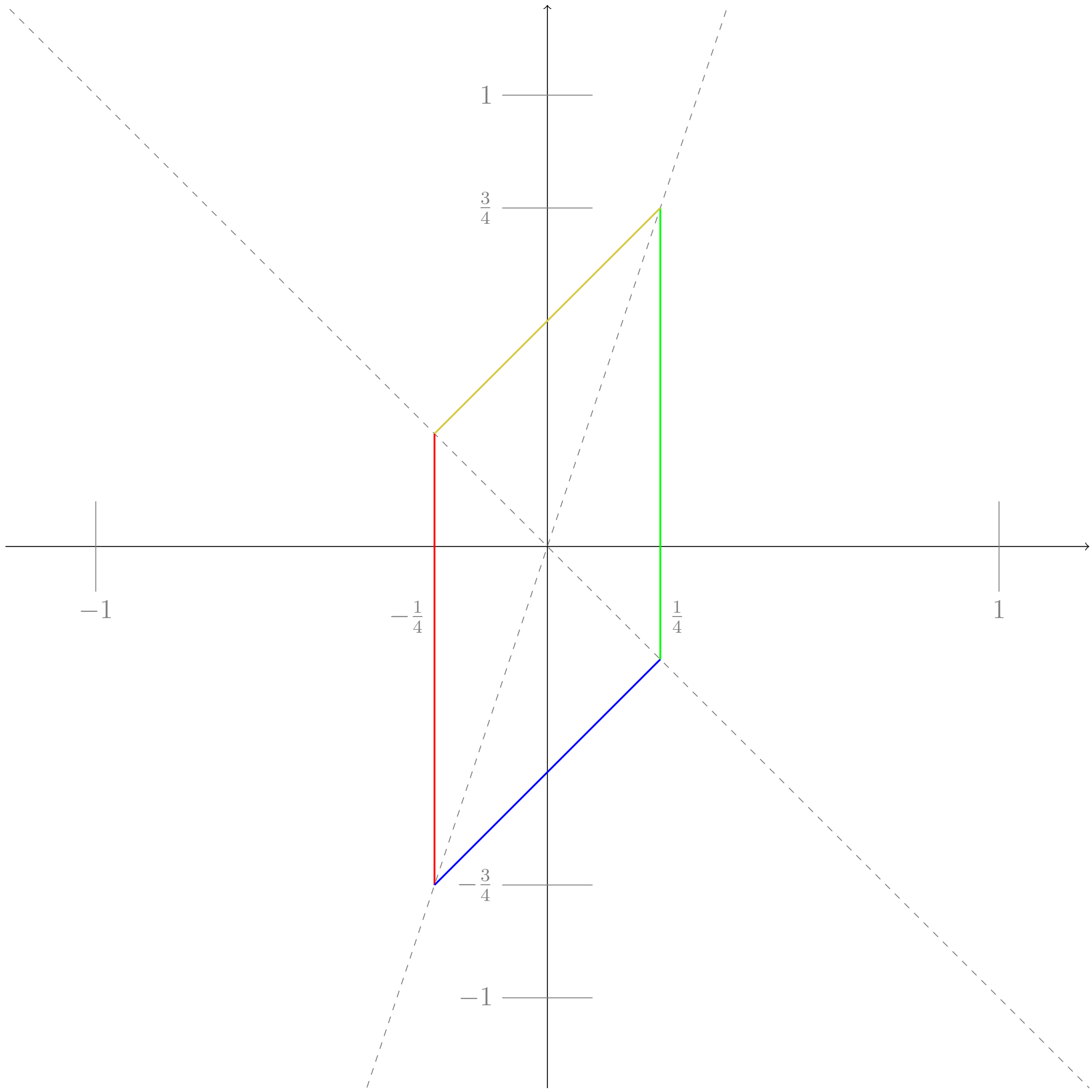
— si $-3\,x + y \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-3\,x + y) + (x + y) = 1 \iff 4\,x = 1\,;$$

— si $-3\,x + y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-3\,x + y) - (x + y) = 1 \iff 2\,x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-4\,x = 1$ — en bleu : $2\,x - 2\,y = 1$

en vert : $4\,x = 1$ — en jaune : $-2\,x + 2\,y = 1$

**Corrigé 28.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2| + |8\,y_1 + 8\,y_2| \\ &\leqslant |x_1| + |x_2| + |8\,y_1| + |8\,y_2| \\ &\leqslant |x_1| + |8\,y_1| + |x_2| + |8\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x| + |8\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x| = |8\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x = 0$ et $8\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x| + |8\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x$ et $8\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x \geqslant 0$ et $8\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x) + (8\,y) = 1 \iff x + 8\,y = 1\,;$$

— si $x \geqslant 0$ et $8\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x) - (8\,y) = 1 \iff x - 8\,y = 1\,;$$

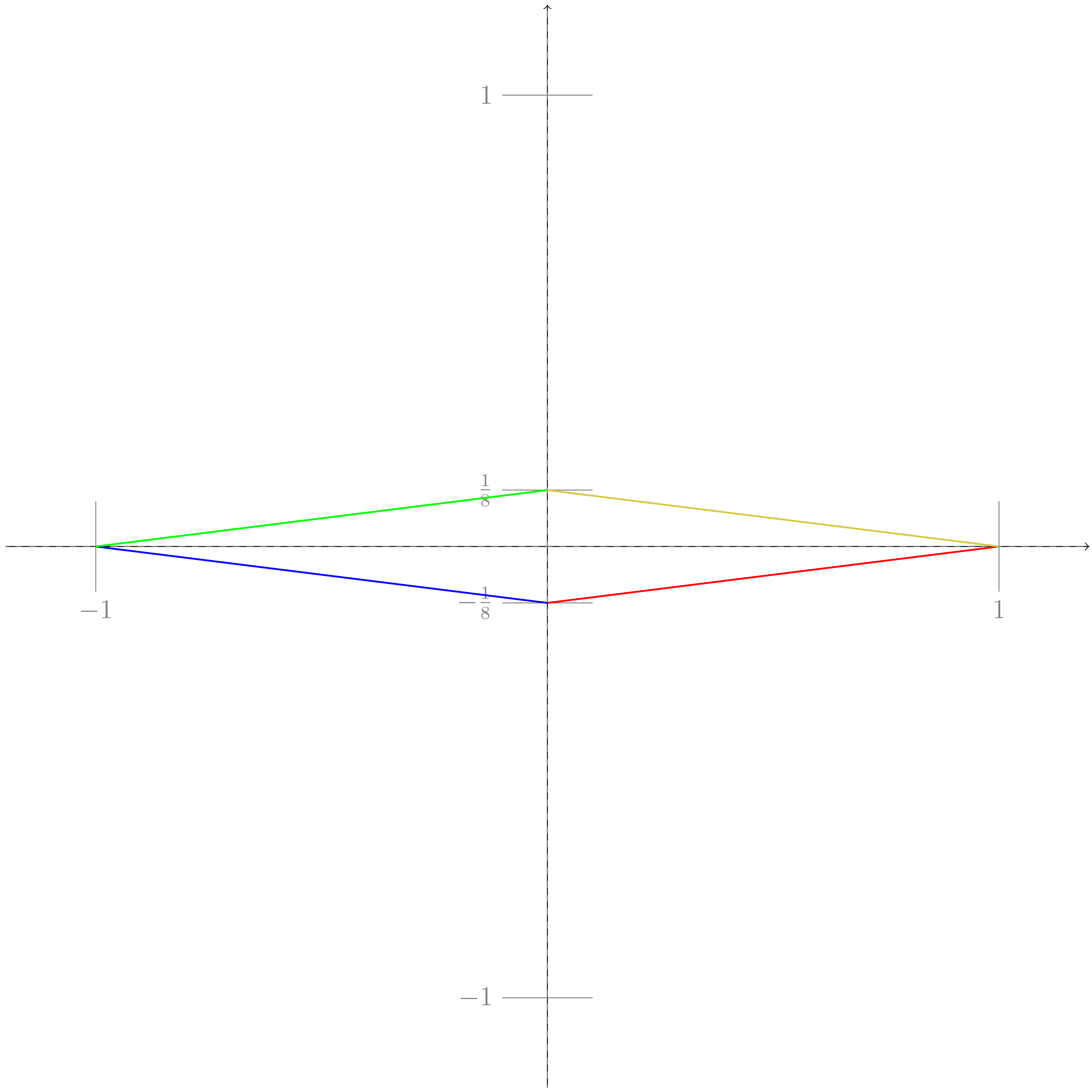
— si $x \leqslant 0$ et $8\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x) + (8\,y) = 1 \iff -x + 8\,y = 1\,;$$

— si $x \leqslant 0$ et $8\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x) - (8\,y) = 1 \iff -x - 8\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - 8\,y = 1$ — en bleu : $-x - 8\,y = 1$

en vert : $-x + 8\,y = 1$ — en jaune : $x + 8\,y = 1$

**Corrigé 29.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+y_1+y_2| + |2\,x_1+2\,x_2-y_1-y_2| \\ &\leqslant |x_1+y_1|+|x_2+y_2|+|2\,x_1-y_1|+|2\,x_2-y_2| \\ &\leqslant |x_1+y_1|+|2\,x_1-y_1|+|x_2+y_2|+|2\,x_2-y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + y| + |2\,x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + y| = |2\,x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + y = 0$ et $2\,x - y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ 2\,x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ & - & 3\,y & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x+y| + |2\,x-y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + y$ et $2\,x-y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + y \geqslant 0$ et $2\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+y) + (2\,x-y) = 1 \iff 3\,x = 1\,;$$

— si $x + y \geqslant 0$ et $2\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+y) - (2\,x-y) = 1 \iff -x + 2\,y = 1\,;$$

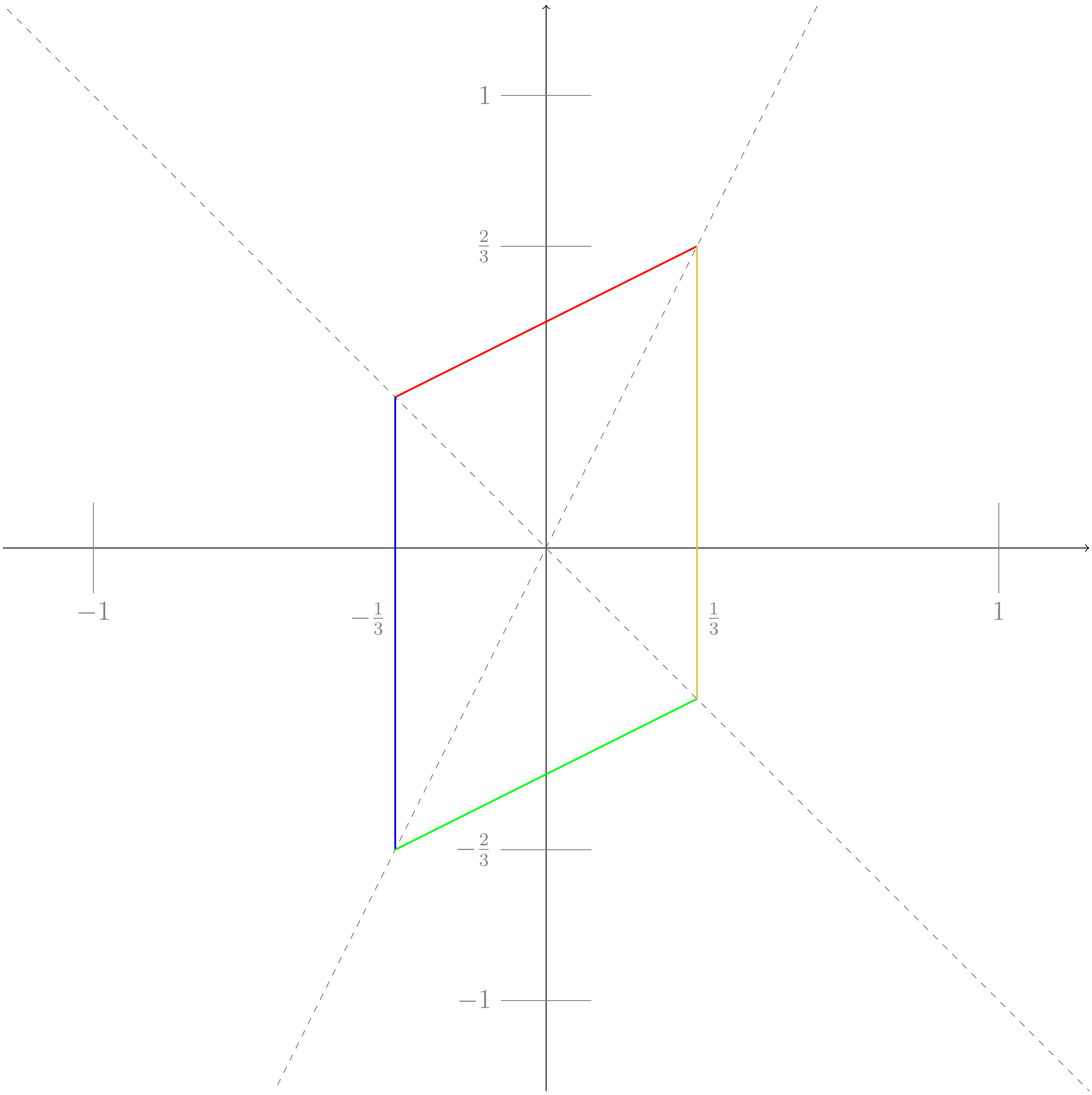
— si $x + y \leqslant 0$ et $2\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+y) + (2\,x-y) = 1 \iff x - 2\,y = 1\,;$$

— si $x + y \leqslant 0$ et $2\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+y) - (2\,x-y) = 1 \iff -3\,x = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 2\,y = 1$

en bleu : $-3\,x = 1$

en vert : $x - 2\,y = 1$

en jaune : $3\,x = 1$

**Corrigé 30.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2| \\
&\leqslant |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + |2\,x_1| + |2\,x_2| \\
&\leqslant |x_1 + y_1| + |2\,x_1| + |x_2 + y_2| + |2\,x_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + y| + |2\,x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à $0$ : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + y| = |2\,x| = 0$, ce qui équivaut à : $x + y = 0$ et $2\,x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x + y| + |2\,x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + y$ et $2\,x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + y \geqslant 0$ et $2\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) + (2\,x) = 1 \iff 3\,x + y = 1\,;$$

— si $x + y \geqslant 0$ et $2\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) - (2\,x) = 1 \iff -x + y = 1\,;$$

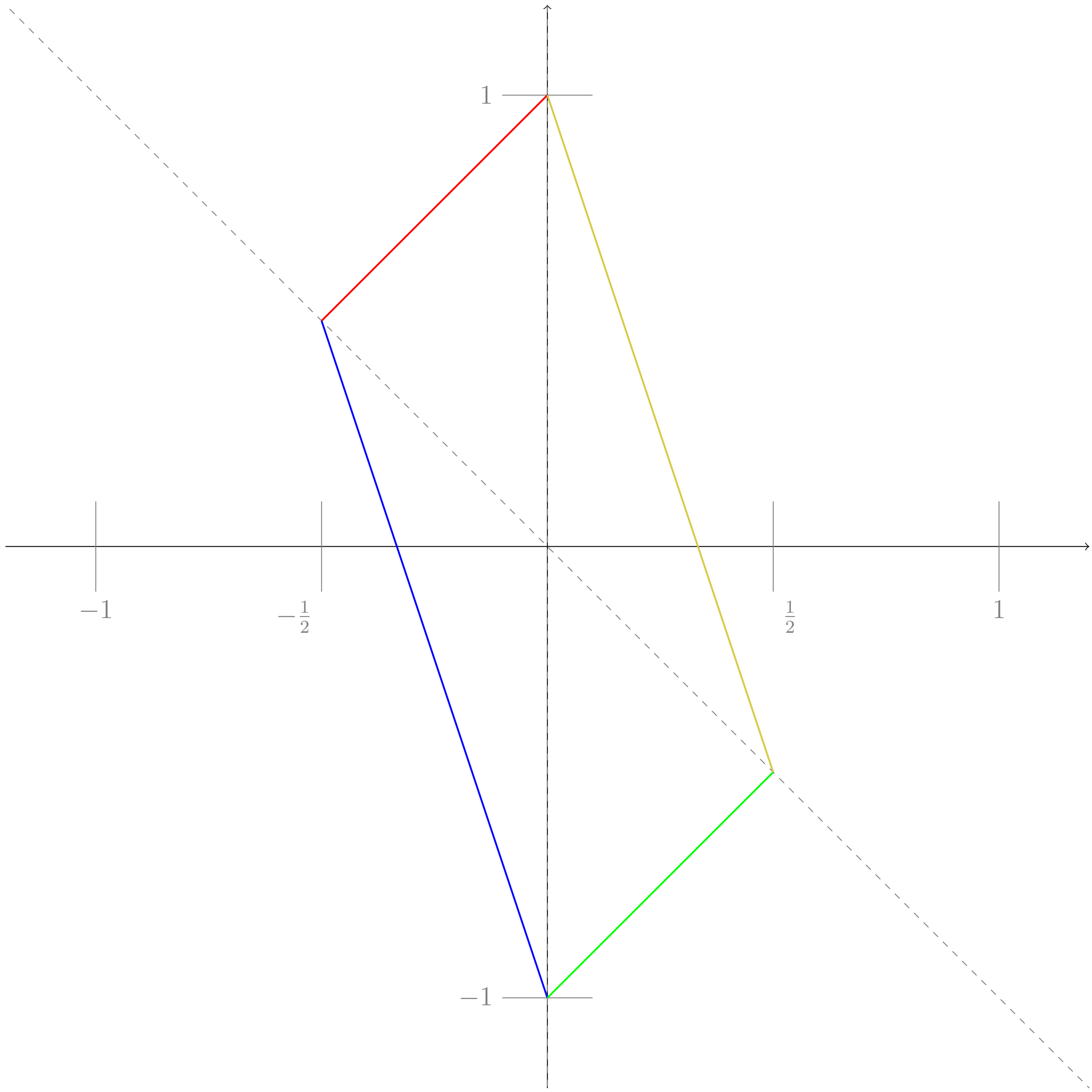
— si $x + y \leqslant 0$ et $2\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x + y) + (2\,x) = 1 \iff x - y = 1\,;$$

— si $x + y \leqslant 0$ et $2\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x + y) - (2\,x) = 1 \iff -3\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + y = 1$

en bleu : $-3\,x - y = 1$

en vert : $x - y = 1$

en jaune : $3\,x + y = 1$

**Corrigé 31.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |8\,x_1+8\,x_2+2\,y_1+2\,y_2| + |2\,x_1+2\,x_2-3\,y_1-3\,y_2| \\
&\leqslant |8\,x_1+2\,y_1| + |8\,x_2+2\,y_2| + |2\,x_1-3\,y_1| + |2\,x_2-3\,y_2| \\
&\leqslant |8\,x_1+2\,y_1| + |2\,x_1-3\,y_1| + |8\,x_2+2\,y_2| + |2\,x_2-3\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|8\,x + 2\,y| + |2\,x - 3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|8\,x + 2\,y| = |2\,x - 3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $8\,x + 2\,y = 0$ et $2\,x - 3\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 8\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 8\,x & + & 2\,y & = & 0 & \\ & - & \frac{7}{2}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |8\,x+2\,y| + |2\,x-3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $8\,x+2\,y$ et $2\,x-3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $8\,x + 2\,y \geqslant 0$ et $2\,x - 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (8\,x+2\,y) + (2\,x-3\,y) = 1 \iff 10\,x - y = 1\,;$$

— si $8\,x + 2\,y \geqslant 0$ et $2\,x - 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (8\,x+2\,y) - (2\,x-3\,y) = 1 \iff 6\,x + 5\,y = 1\,;$$

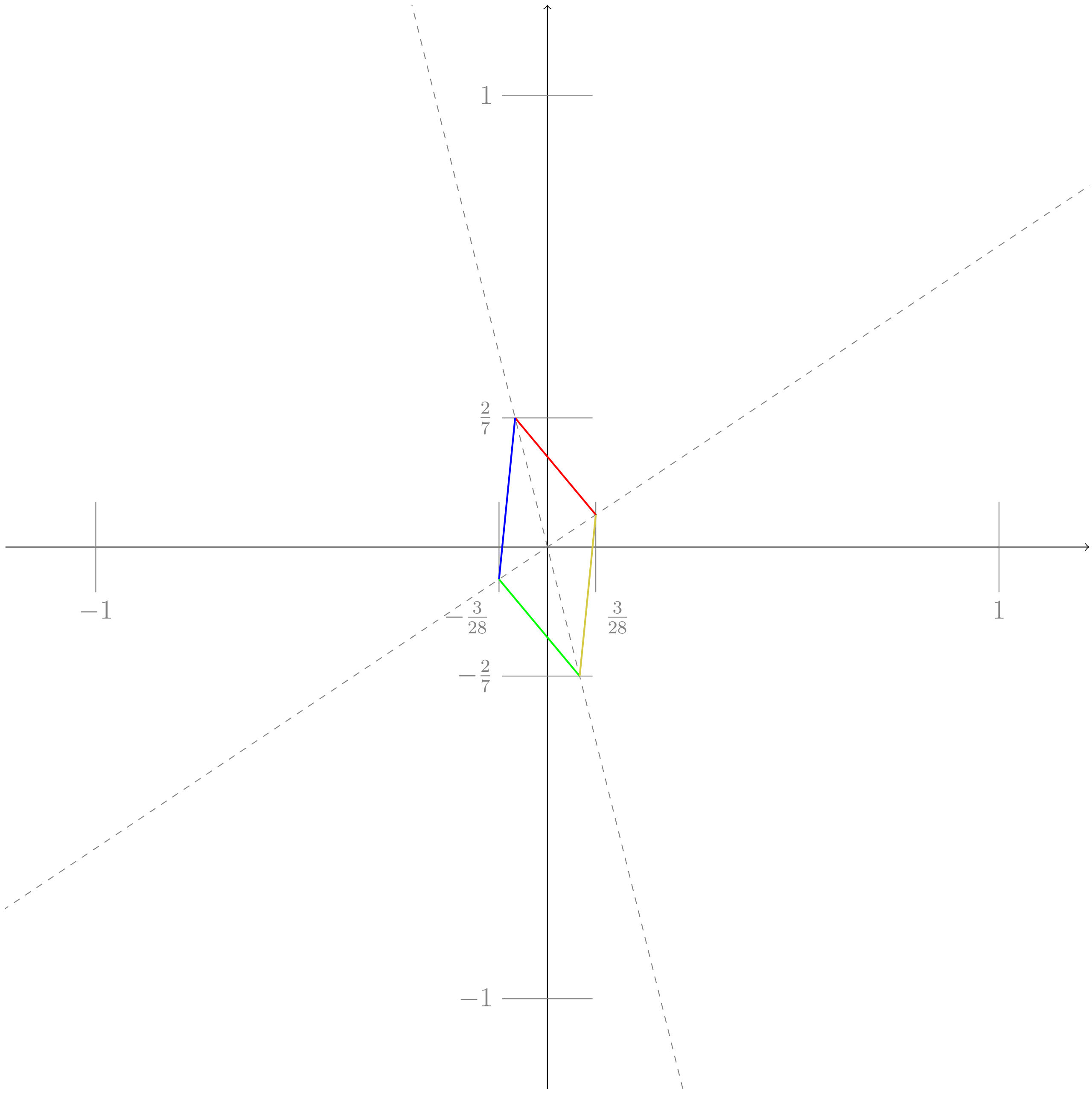
— si $8\,x + 2\,y \leqslant 0$ et $2\,x - 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(8\,x+2\,y) + (2\,x-3\,y) = 1 \iff -6\,x - 5\,y = 1\,;$$

— si $8\,x + 2\,y \leqslant 0$ et $2\,x - 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(8\,x+2\,y) - (2\,x-3\,y) = 1 \iff -10\,x + y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $6\,x + 5\,y = 1$

en bleu : $-10\,x + y = 1$

en vert : $-6\,x - 5\,y = 1$

en jaune : $10\,x - y = 1$

**Corrigé 32.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + |x_1 + x_2 - 4\,y_1 - 4\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_1 - 4\,y_1| + |x_2 - 4\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 - y_1| + |x_1 - 4\,y_1| + |x_2 - y_2| + |x_2 - 4\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - y| + |x - 4\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - y| = |x - 4\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - y = 0$ et $x - 4\,y = 0$. Or :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & - & 4\,y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcll} x & - & y & = & 0 & \\ & - & 3\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array} \right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x - y| + |x - 4\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - y$ et $x - 4\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - y \geqslant 0$ et $x - 4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - y) + (x - 4\,y) = 1 \iff 2\,x - 5\,y = 1\,;$$

— si $x - y \geqslant 0$ et $x - 4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - y) - (x - 4\,y) = 1 \iff 3\,y = 1\,;$$

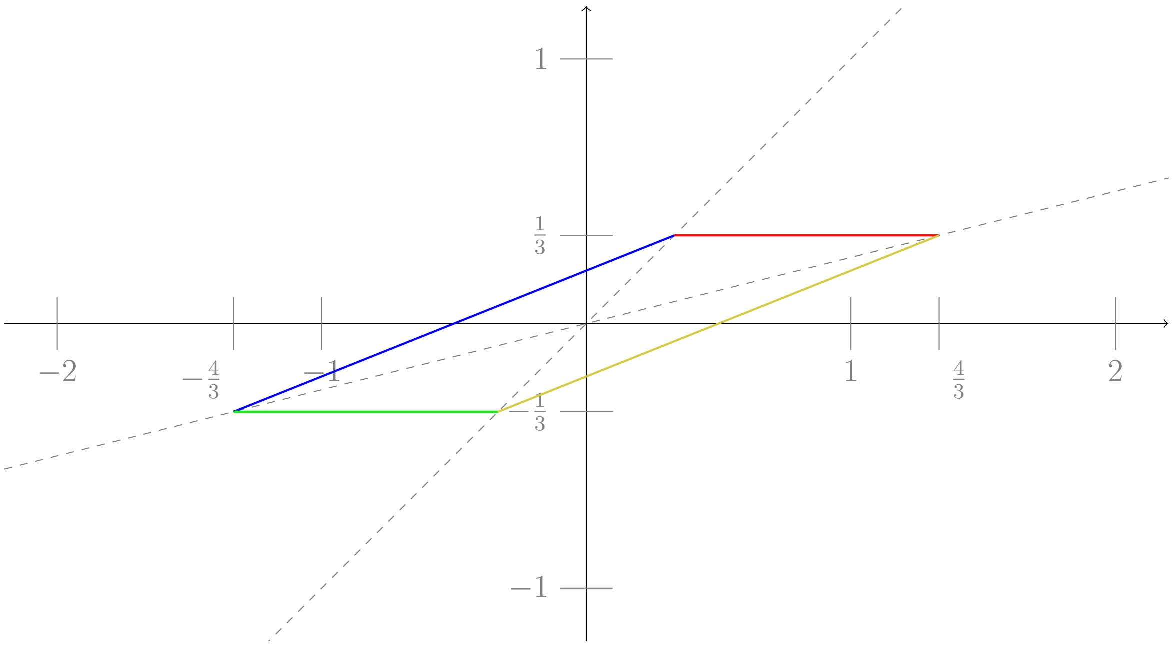
— si $x - y \leqslant 0$ et $x - 4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x - y) + (x - 4\,y) = 1 \iff -3\,y = 1\,;$$

— si $x - y \leqslant 0$ et $x - 4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x - y) - (x - 4\,y) = 1 \iff -2\,x + 5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,y = 1$

en bleu : $-2\,x + 5\,y = 1$

en vert : $-3\,y = 1$

en jaune : $2\,x - 5\,y = 1$

**Corrigé 33.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+y_1+y_2| + |5\,x_1+5\,x_2+y_1+y_2| \\
&\leqslant |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + |5\,x_1+y_1| + |5\,x_2+y_2| \\
&\leqslant |x_1+y_1| + |5\,x_1+y_1| + |x_2+y_2| + |5\,x_2+y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + y| + |5\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + y| = |5\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + y = 0$ et $5\,x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ 5\,x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & y & = & 0 & \\ & - & 4\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x + y| + |5\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + y$ et $5\,x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + y \geqslant 0$ et $5\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) + (5\,x + y) = 1 \iff 6\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $x + y \geqslant 0$ et $5\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) - (5\,x + y) = 1 \iff -4\,x = 1\,;$$

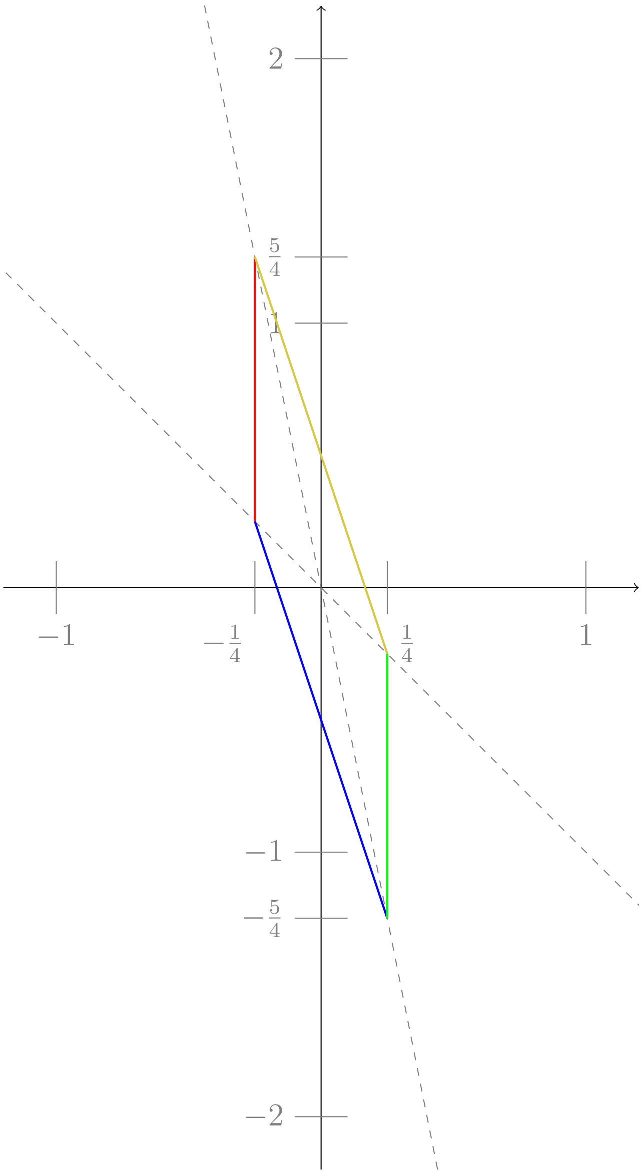
— si $x + y \leqslant 0$ et $5\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x + y) + (5\,x + y) = 1 \iff 4\,x = 1\,;$$

— si $x + y \leqslant 0$ et $5\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x + y) - (5\,x + y) = 1 \iff -6\,x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-4\,x = 1$

en bleu : $-6\,x - 2\,y = 1$

en vert : $4\,x = 1$

en jaune : $6\,x + 2\,y = 1$

**Corrigé 34.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |9\,x_1+9\,x_2-2\,y_1-2\,y_2| + |4\,x_1+4\,x_2+5\,y_1+5\,y_2| \\
&\leqslant |9\,x_1-2\,y_1| + |9\,x_2-2\,y_2| + |4\,x_1+5\,y_1| + |4\,x_2+5\,y_2| \\
&\leqslant |9\,x_1-2\,y_1| + |4\,x_1+5\,y_1| + |9\,x_2-2\,y_2| + |4\,x_2+5\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|9\,x - 2\,y| + |4\,x + 5\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|9\,x - 2\,y| = |4\,x + 5\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $9\,x - 2\,y = 0$ et $4\,x + 5\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 9\,x & - & 2\,y & = & 0 \\ 4\,x & + & 5\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 9\,x & - & 2\,y & = & 0 & \\ & & \frac{53}{9}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{9}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |9\,x-2\,y| + |4\,x+5\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $9\,x - 2\,y$ et $4\,x + 5\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $9\,x - 2\,y \geqslant 0$ et $4\,x + 5\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (9\,x-2\,y)+(4\,x+5\,y) = 1 \iff 13\,x+3\,y = 1\,;$$

— si $9\,x - 2\,y \geqslant 0$ et $4\,x + 5\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (9\,x-2\,y)-(4\,x+5\,y) = 1 \iff 5\,x-7\,y = 1\,;$$

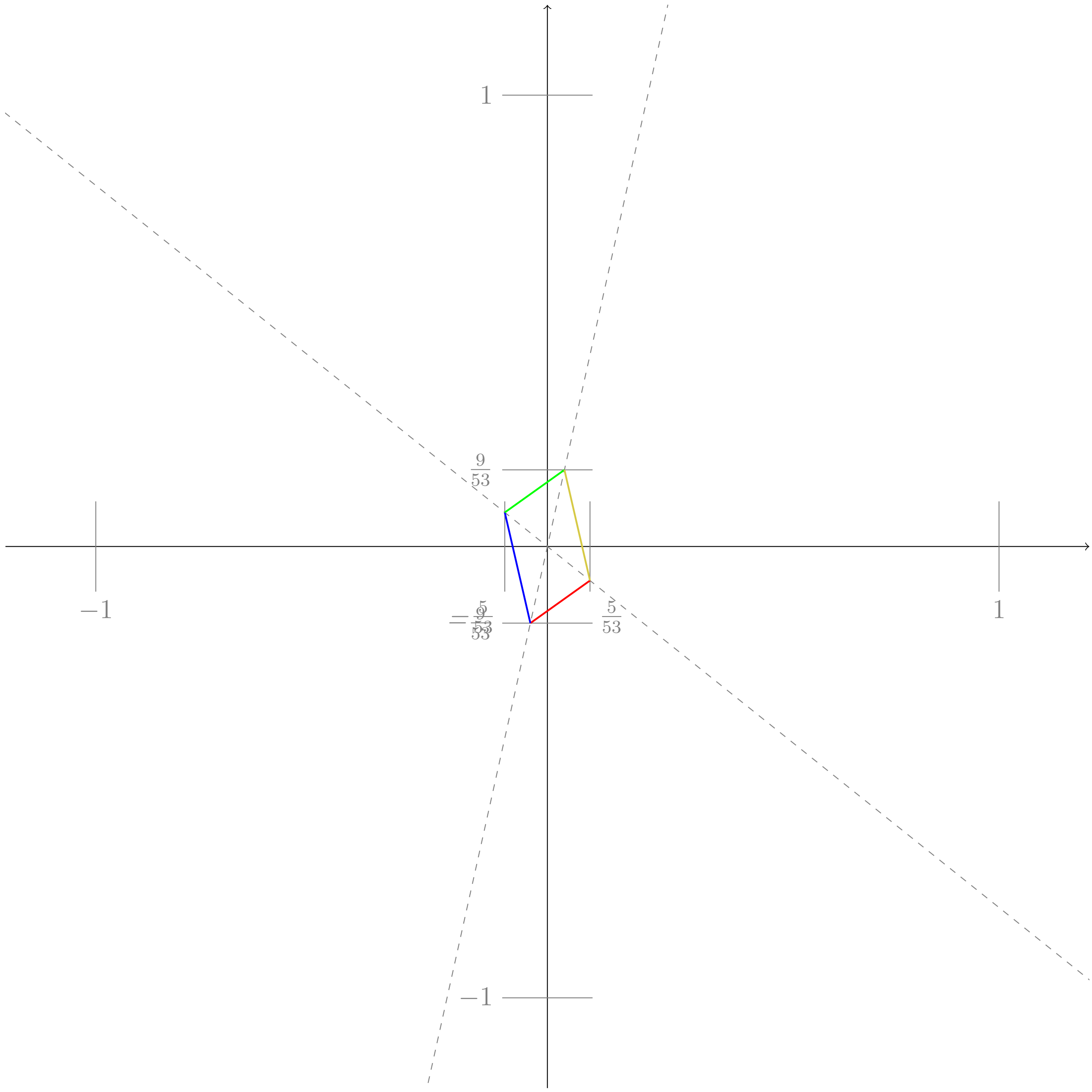
— si $9\,x - 2\,y \leqslant 0$ et $4\,x + 5\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(9\,x-2\,y)+(4\,x+5\,y) = 1 \iff -5\,x+7\,y = 1\,;$$

— si $9\,x - 2\,y \leqslant 0$ et $4\,x + 5\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(9\,x-2\,y)-(4\,x+5\,y) = 1 \iff -13\,x-3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $5\,x - 7\,y = 1$

en bleu : $-13\,x - 3\,y = 1$

en vert : $-5\,x + 7\,y = 1$

en jaune : $13\,x + 3\,y = 1$

**Corrigé 35.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |10\,y_1 + 10\,y_2| + |x_1 + x_2| \\
&\leqslant |10\,y_1| + |10\,y_2| + |x_1| + |x_2| \\
&\leqslant |10\,y_1| + |x_1| + |10\,y_2| + |x_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|10\,y| + |x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|10\,y| = |x| = 0$, ce qui équivaut à : $10\,y = 0$ et $x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |10\,y| + |x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $10\,y$ et $x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $10\,y \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (10\,y) + (x) = 1 \iff x + 10\,y = 1\,;$$

— si $10\,y \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (10\,y) - (x) = 1 \iff -x + 10\,y = 1\,;$$

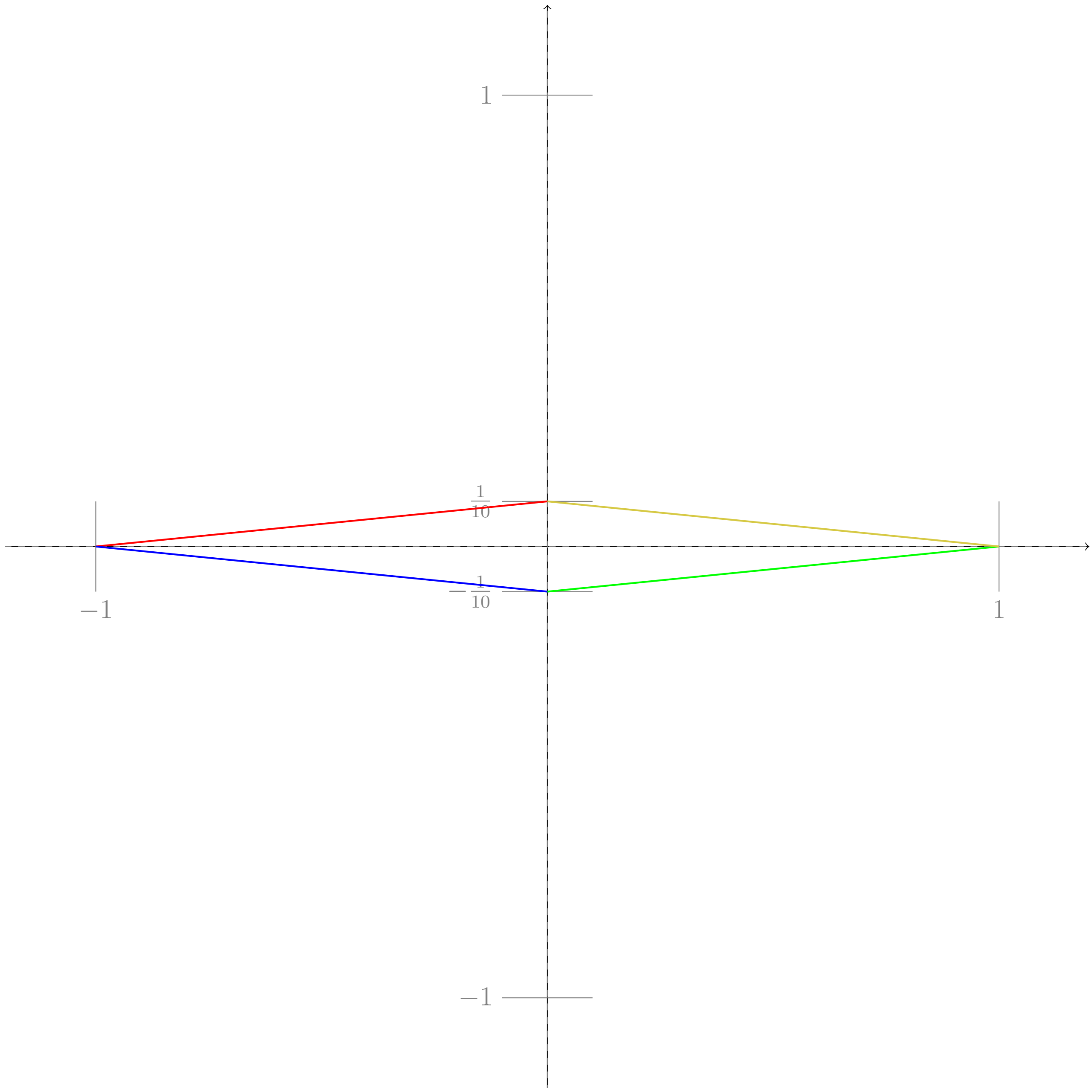
— si $10\,y \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(10\,y) + (x) = 1 \iff x - 10\,y = 1\,;$$

— si $10\,y \leqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(10\,y) - (x) = 1 \iff -x - 10\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 10\,y = 1$

en bleu : $-x - 10\,y = 1$

en vert : $x - 10\,y = 1$

en jaune : $x + 10\,y = 1$

**Corrigé 36.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2| + |6\,x_1 + 6\,x_2 - y_1 - y_2| \\
&\leqslant |x_1| + |x_2| + |6\,x_1 - y_1| + |6\,x_2 - y_2| \\
&\leqslant |x_1| + |6\,x_1 - y_1| + |x_2| + |6\,x_2 - y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x| + |6\,x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x| = |6\,x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $x = 0$ et $6\,x - y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x| + |6\,x - y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x$ et $6\,x - y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x \geqslant 0$ et $6\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x) + (6\,x - y) = 1 \iff 7\,x - y = 1\,;$$

— si $x \geqslant 0$ et $6\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x) - (6\,x - y) = 1 \iff -5\,x + y = 1\,;$$

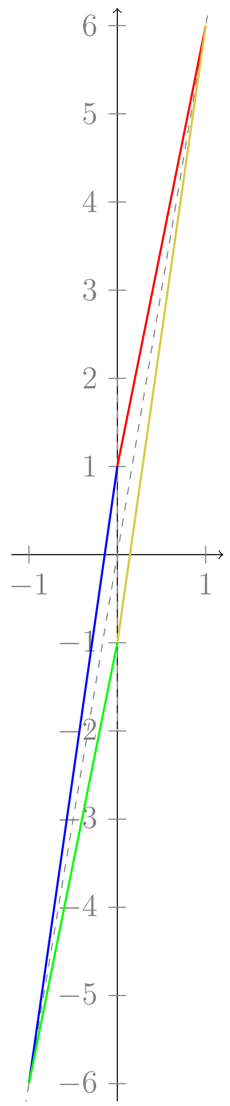
— si $x \leqslant 0$ et $6\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x) + (6\,x - y) = 1 \iff 5\,x - y = 1\,;$$

— si $x \leqslant 0$ et $6\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x) - (6\,x - y) = 1 \iff -7\,x + y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-5\,x + y = 1$

en bleu : $-7\,x + y = 1$

en vert : $5\,x - y = 1$

en jaune : $7\,x - y = 1$

**Corrigé 37.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 4

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-3\,x_1 - 3\,x_2 + y_1 + y_2| + |x_1 + x_2| \\
&\leqslant |-3\,x_1 + y_1| + |-3\,x_2 + y_2| + |x_1| + |x_2| \\
&\leqslant |-3\,x_1 + y_1| + |x_1| + |-3\,x_2 + y_2| + |x_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-3\,x + y| + |x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-3\,x + y| = |x| = 0$, ce qui équivaut à : $-3\,x + y = 0$ et $x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |-3\,x + y| + |x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-3\,x+y$ et $x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-3\,x + y \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-3\,x + y) + (x) = 1 \iff -2\,x + y = 1\,;$$

— si $-3\,x + y \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-3\,x + y) - (x) = 1 \iff -4\,x + y = 1\,;$$

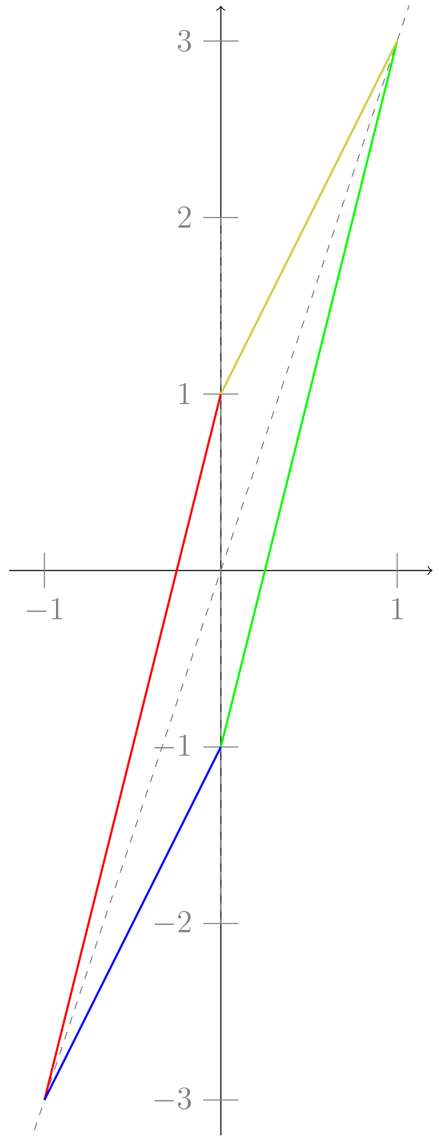
— si $-3\,x + y \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-3\,x + y) + (x) = 1 \iff 4\,x - y = 1\,;$$

— si $-3\,x + y \leqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-3\,x + y) - (x) = 1 \iff 2\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-4\,x + y = 1$ en bleu : $2\,x - y = 1$

en vert : $4\,x - y = 1$ en jaune : $-2\,x + y = 1$

**Corrigé 38.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |6\,x_1 + 6\,x_2| + |x_1 + x_2 + 7\,y_1 + 7\,y_2| \\ &\leqslant |6\,x_1| + |6\,x_2| + |x_1 + 7\,y_1| + |x_2 + 7\,y_2| \\ &\leqslant |6\,x_1| + |x_1 + 7\,y_1| + |6\,x_2| + |x_2 + 7\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|6\,x| + |x + 7\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à $0$ : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|6\,x| = |x + 7\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $6\,x = 0$ et $x + 7\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |6\,x| + |x + 7\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $6\,x$ et $x + 7\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $6\,x \geqslant 0$ et $x + 7\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (6\,x) + (x + 7\,y) = 1 \iff 7\,x + 7\,y = 1\,;$$

— si $6\,x \geqslant 0$ et $x + 7\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (6\,x) - (x + 7\,y) = 1 \iff 5\,x - 7\,y = 1\,;$$

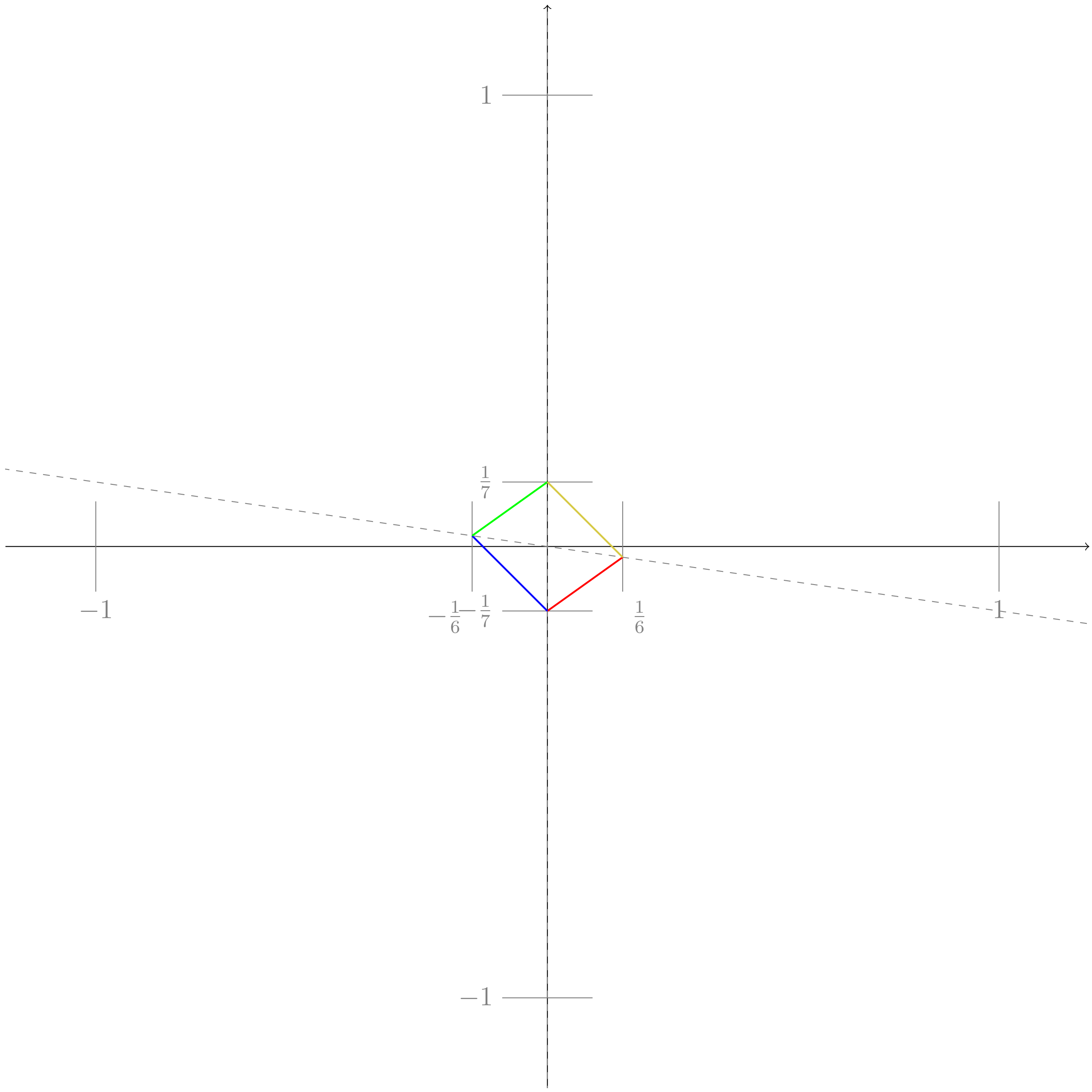
— si $6\,x \leqslant 0$ et $x + 7\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(6\,x) + (x + 7\,y) = 1 \iff -5\,x + 7\,y = 1\,;$$

— si $6\,x \leqslant 0$ et $x + 7\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(6\,x) - (x + 7\,y) = 1 \iff -7\,x - 7\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $5\,x - 7\,y = 1$

en bleu : $-7\,x - 7\,y = 1$

en vert : $-5\,x + 7\,y = 1$

en jaune : $7\,x + 7\,y = 1$

**Corrigé 39.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |-2\,x_1-2\,x_2+6\,y_1+6\,y_2|+|-x_1-x_2+2\,y_1+2\,y_2| \\ &\leqslant |-2\,x_1+6\,y_1|+|-2\,x_2+6\,y_2|+|-x_1+2\,y_1|+|-x_2+2\,y_2| \\ &\leqslant |-2\,x_1+6\,y_1|+|-x_1+2\,y_1|+|-2\,x_2+6\,y_2|+|-x_2+2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-2\,x+6\,y|+|-x+2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-2\,x+6\,y| = |-x+2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $-2\,x+6\,y=0$ et $-x+2\,y=0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -2x &+& 6y &=& 0 \\ -x &+& 2y &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -2x &+& 6y &=& 0 & \\ & & -y &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{1}{2}L_1)\end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff |-2\,x+6\,y|+|-x+2\,y|=1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-2\,x+6\,y$ et $-x+2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

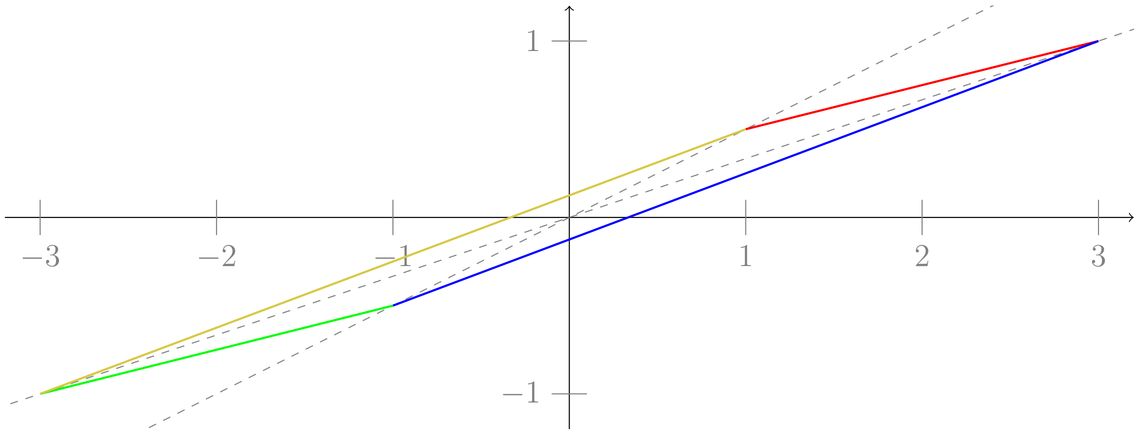
— si $-2\,x+6\,y \geqslant 0$ et $-x+2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff (-2\,x+6\,y)+(-x+2\,y)=1 \iff -3\,x+8\,y=1\,;$$

— si $-2\,x+6\,y \geqslant 0$ et $-x+2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff (-2\,x+6\,y)-(-x+2\,y)=1 \iff -x+4\,y=1\,;$$

— si $-2\,x+6\,y \leqslant 0$ et $-x+2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff -(-2\,x+6\,y)+(-x+2\,y)=1 \iff x-4\,y=1\,;$$

— si $-2\,x+6\,y \leqslant 0$ et $-x+2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff -(-2\,x+6\,y)-(-x+2\,y)=1 \iff 3\,x-8\,y=1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x+4\,y=1$ — en bleu : $3\,x-8\,y=1$

en vert : $x-4\,y=1$ — en jaune : $-3\,x+8\,y=1$

**Corrigé 40.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2| \\ &\leqslant |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + |2\,x_1| + |2\,x_2| \\ &\leqslant |x_1 + y_1| + |2\,x_1| + |x_2 + y_2| + |2\,x_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + y| + |2\,x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + y| = |2\,x| = 0$, ce qui équivaut à : $x + y = 0$ et $2\,x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x + y| + |2\,x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + y$ et $2\,x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + y \geqslant 0$ et $2\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) + (2\,x) = 1 \iff 3\,x + y = 1\,;$$

— si $x + y \geqslant 0$ et $2\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) - (2\,x) = 1 \iff -x + y = 1\,;$$

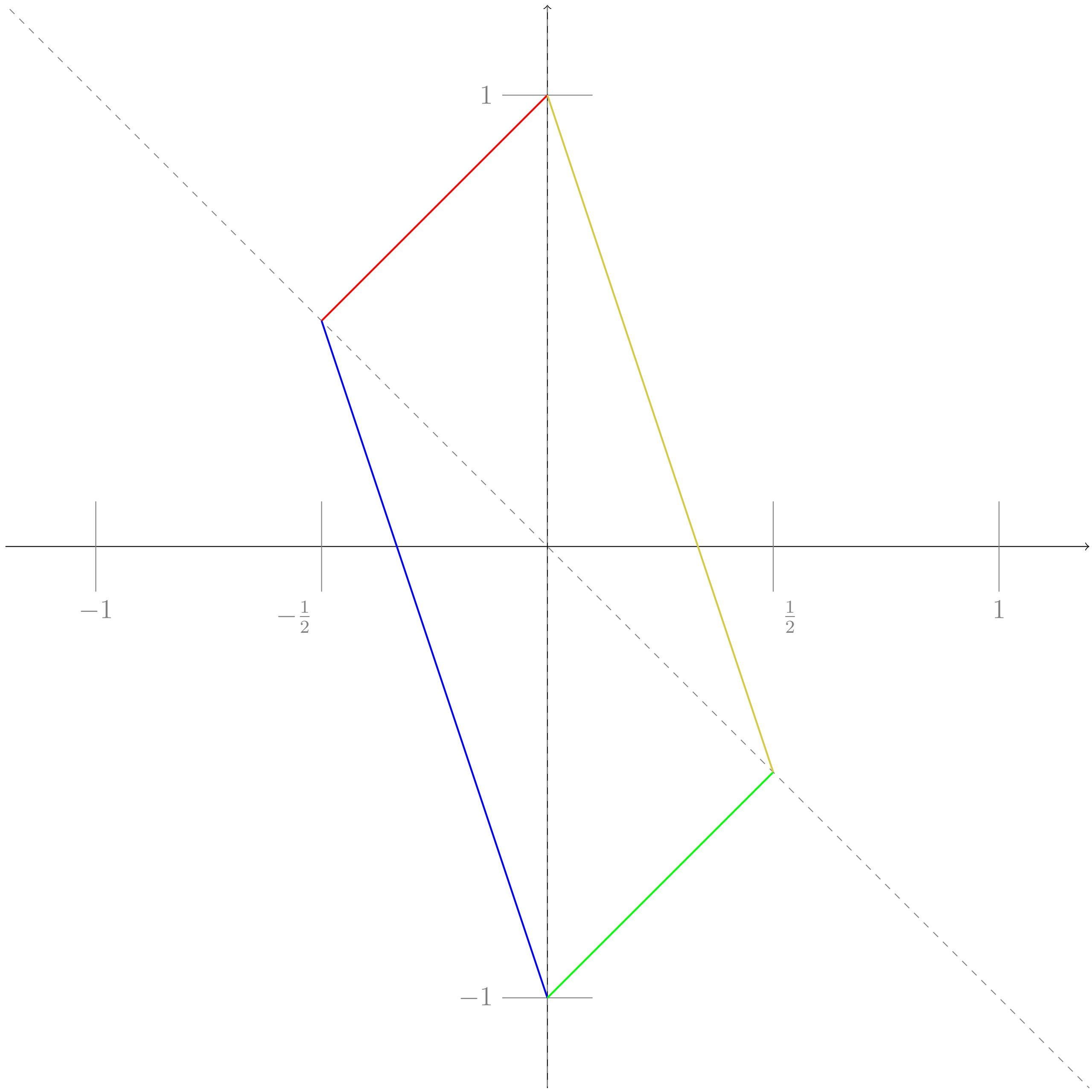
— si $x + y \leqslant 0$ et $2\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x + y) + (2\,x) = 1 \iff x - y = 1\,;$$

— si $x + y \leqslant 0$ et $2\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x + y) - (2\,x) = 1 \iff -3\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x+y=1$

en bleu : $-3\,x-y=1$

en vert : $x-y=1$

en jaune : $3\,x+y=1$

**Corrigé 41.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |4\,x_1 + 4\,x_2 - y_1 - y_2| + |3\,x_1 + 3\,x_2| \\ &\leqslant |4\,x_1 - y_1| + |4\,x_2 - y_2| + |3\,x_1| + |3\,x_2| \\ &\leqslant |4\,x_1 - y_1| + |3\,x_1| + |4\,x_2 - y_2| + |3\,x_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|4\,x - y| + |3\,x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|4\,x - y| = |3\,x| = 0$, ce qui équivaut à : $4\,x - y = 0$ et $3\,x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |4\,x - y| + |3\,x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $4\,x - y$ et $3\,x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $4\,x - y \geqslant 0$ et $3\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (4\,x - y) + (3\,x) = 1 \iff 7\,x - y = 1\,;$$

— si $4\,x - y \geqslant 0$ et $3\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (4\,x - y) - (3\,x) = 1 \iff x - y = 1\,;$$

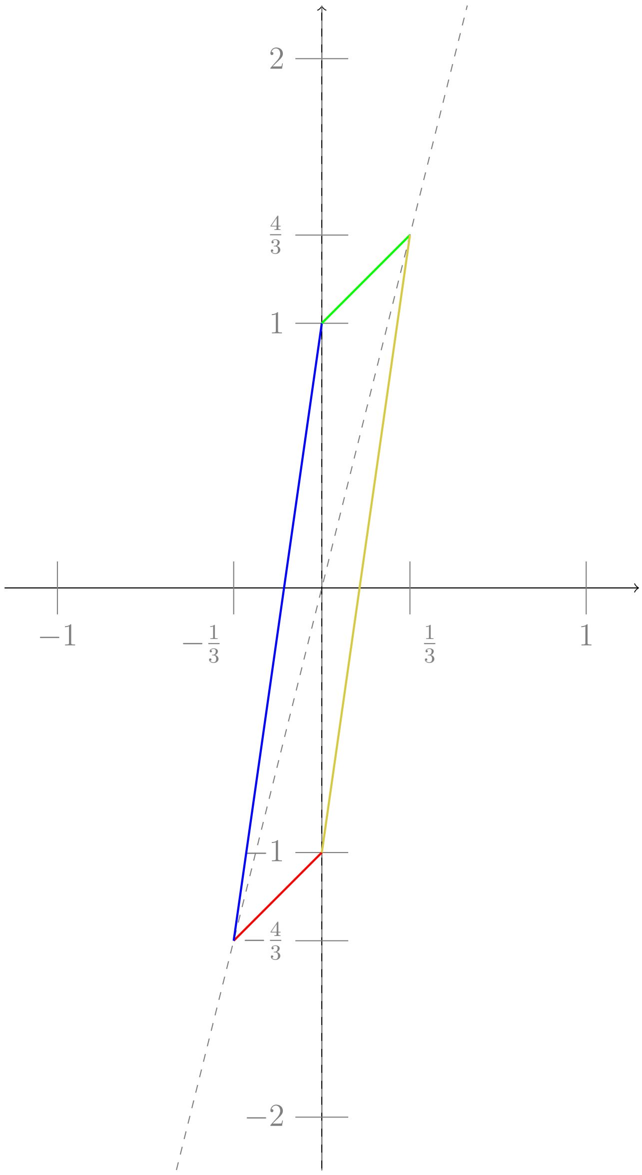
— si $4\,x - y \leqslant 0$ et $3\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(4\,x - y) + (3\,x) = 1 \iff -x + y = 1\,;$$

— si $4\,x - y \leqslant 0$ et $3\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(4\,x - y) - (3\,x) = 1 \iff -7\,x + y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - y = 1$

en bleu : $-7\,x + y = 1$

en vert : $-x + y = 1$

en jaune : $7\,x - y = 1$

**Corrigé 42.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 + 2\,y_1 + 2\,y_2| + |y_1 + y_2| \\ &\leqslant |x_1 + 2\,y_1| + |x_2 + 2\,y_2| + |y_1| + |y_2| \\ &\leqslant |x_1 + 2\,y_1| + |y_1| + |x_2 + 2\,y_2| + |y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + 2\,y| + |y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + 2\,y| = |y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + 2\,y = 0$ et $y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x + 2\,y| + |y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + 2\,y$ et $y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + 2\,y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + 2\,y) + (y) = 1 \iff x + 3\,y = 1\,;$$

— si $x + 2\,y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + 2\,y) - (y) = 1 \iff x + y = 1\,;$$

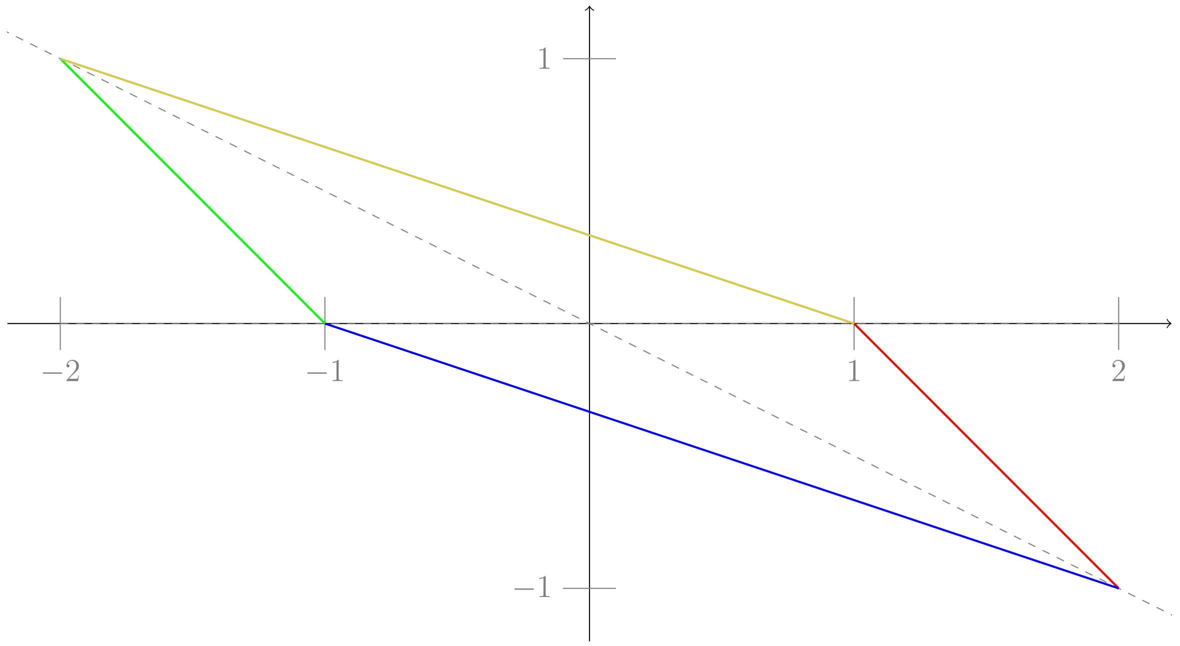
— si $x + 2\,y \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x + 2\,y) + (y) = 1 \iff -x - y = 1\,;$$

— si $x + 2\,y \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x + 2\,y) - (y) = 1 \iff -x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x + y = 1$

en bleu : $-x - 3\,y = 1$

en vert : $-x - y = 1$

en jaune : $x + 3\,y = 1$

**Corrigé 43.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-2\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,y_1 + 3\,y_2| + |-5\,x_1 - 5\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |-2\,x_1 + 3\,y_1| + |-2\,x_2 + 3\,y_2| + |-5\,x_1 + y_1| + |-5\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |-2\,x_1 + 3\,y_1| + |-5\,x_1 + y_1| + |-2\,x_2 + 3\,y_2| + |-5\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-2\,x + 3\,y| + |-5\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-2\,x + 3\,y| = |-5\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $-2\,x + 3\,y = 0$ et $-5\,x + y = 0$. Or :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} - & 2\,x & + & 3\,y & = 0 \\ - & 5\,x & + & y & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrrrl} - & 2\,x & + & 3\,y & = 0 & \\ & & - & \frac{13}{2}\,y & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{2} L_1) \end{array} \right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |-2\,x + 3\,y| + |-5\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-2\,x + 3\,y$ et $-5\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-2\,x + 3\,y \geqslant 0$ et $-5\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-2\,x + 3\,y) + (-5\,x + y) = 1 \iff -7\,x + 4\,y = 1\,;$$

— si $-2\,x + 3\,y \geqslant 0$ et $-5\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-2\,x + 3\,y) - (-5\,x + y) = 1 \iff 3\,x + 2\,y = 1\,;$$

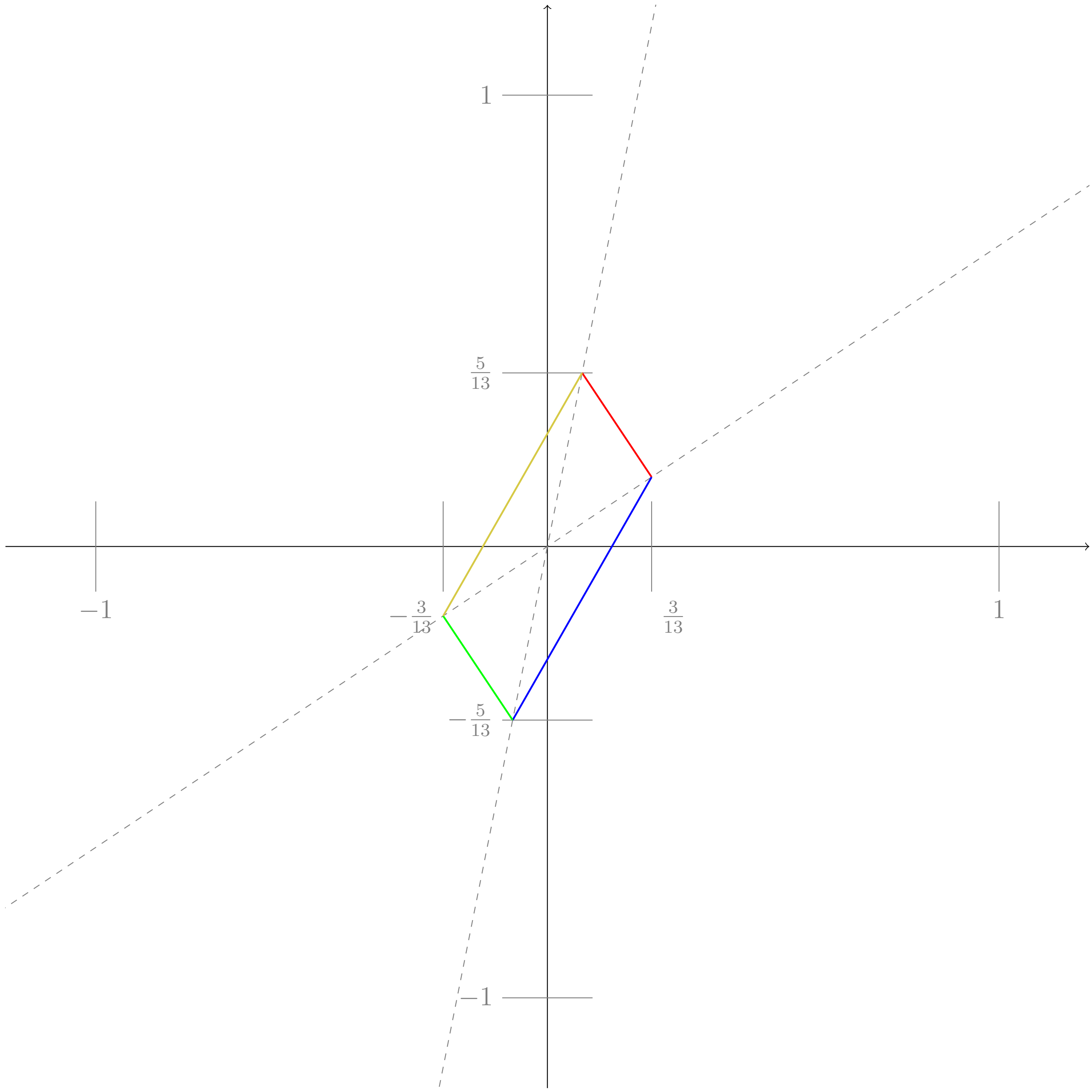
— si $-2\,x + 3\,y \leqslant 0$ et $-5\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-2\,x + 3\,y) + (-5\,x + y) = 1 \iff -3\,x - 2\,y = 1\,;$$

— si $-2\,x + 3\,y \leqslant 0$ et $-5\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-2\,x + 3\,y) - (-5\,x + y) = 1 \iff 7\,x - 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,x + 2\,y = 1$

en bleu : $7\,x - 4\,y = 1$

en vert : $-3\,x - 2\,y = 1$

en jaune : $-7\,x + 4\,y = 1$

**Corrigé 44.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 - 5\,y_1 - 5\,y_2| + |y_1 + y_2| \\ &\leqslant |x_1 - 5\,y_1| + |x_2 - 5\,y_2| + |y_1| + |y_2| \\ &\leqslant |x_1 - 5\,y_1| + |y_1| + |x_2 - 5\,y_2| + |y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - 5\,y| + |y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à $0$ : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - 5\,y| = |y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - 5\,y = 0$ et $y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x - 5\,y| + |y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - 5\,y$ et $y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

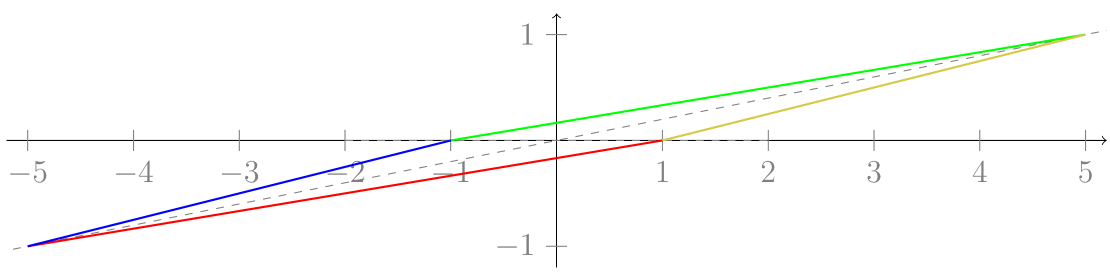
— si $x - 5\,y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - 5\,y) + (y) = 1 \iff x - 4\,y = 1\,;$$

— si $x - 5\,y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - 5\,y) - (y) = 1 \iff x - 6\,y = 1\,;$$

— si $x - 5\,y \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x - 5\,y) + (y) = 1 \iff -x + 6\,y = 1\,;$$

— si $x - 5\,y \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x - 5\,y) - (y) = 1 \iff -x + 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - 6\,y = 1$ — en bleu : $-x + 4\,y = 1$

en vert : $-x + 6\,y = 1$ — en jaune : $x - 4\,y = 1$

**Corrigé 45.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| + |-x_1 - x_2 + 4\,y_1 + 4\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + |-x_1 + 4\,y_1| + |-x_2 + 4\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 + y_1| + |-x_1 + 4\,y_1| + |x_2 + y_2| + |-x_2 + 4\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + y| + |-x + 4\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + y| = |-x + 4\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + y = 0$ et $-x + 4\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ -\ x & + & 4\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & y & = & 0 & \\ & & 5\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x + y| + |-x + 4\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x+y$ et $-x+4\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + y \geqslant 0$ et $-x + 4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) + (-x + 4\,y) = 1 \iff 5\,y = 1\,;$$

— si $x + y \geqslant 0$ et $-x + 4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) - (-x + 4\,y) = 1 \iff 2\,x - 3\,y = 1\,;$$

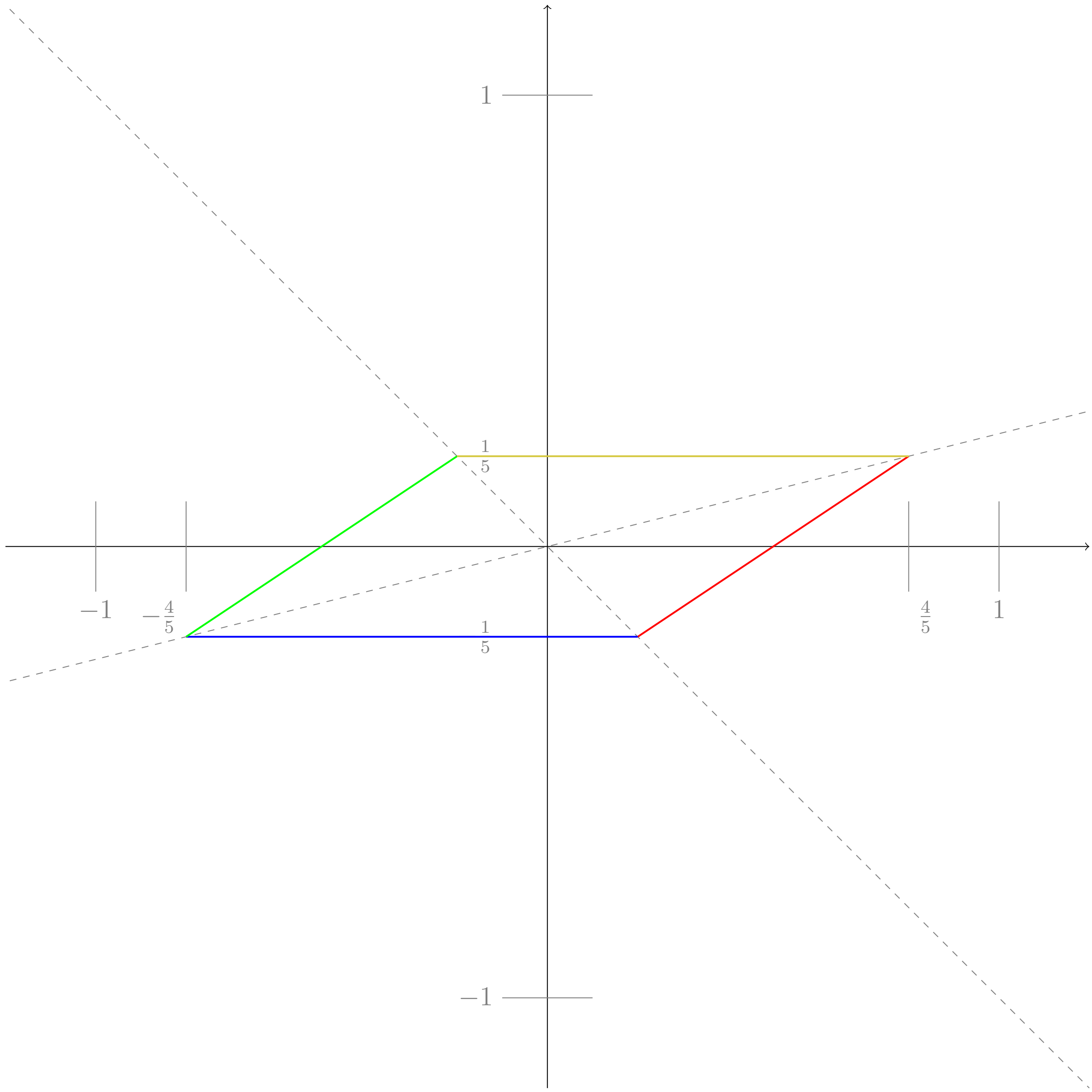
— si $x + y \leqslant 0$ et $-x + 4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x + y) + (-x + 4\,y) = 1 \iff -2\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $x + y \leqslant 0$ et $-x + 4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x + y) - (-x + 4\,y) = 1 \iff -5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $2\,x - 3\,y = 1$ — en bleu : $-5\,y = 1$

en vert : $-2\,x + 3\,y = 1$ — en jaune : $5\,y = 1$

**Corrigé 46.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 5

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2| + |x_1+x_2-y_1-y_2| \\ &\leqslant |x_1|+|x_2|+|x_1-y_1|+|x_2-y_2| \\ &\leqslant |x_1|+|x_1-y_1|+|x_2|+|x_2-y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x| + |x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x| = |x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $x = 0$ et $x - y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x| + |x-y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x$ et $x - y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x \geqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x) + (x-y) = 1 \iff 2\,x - y = 1\,;$$

— si $x \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x) - (x-y) = 1 \iff y = 1\,;$$

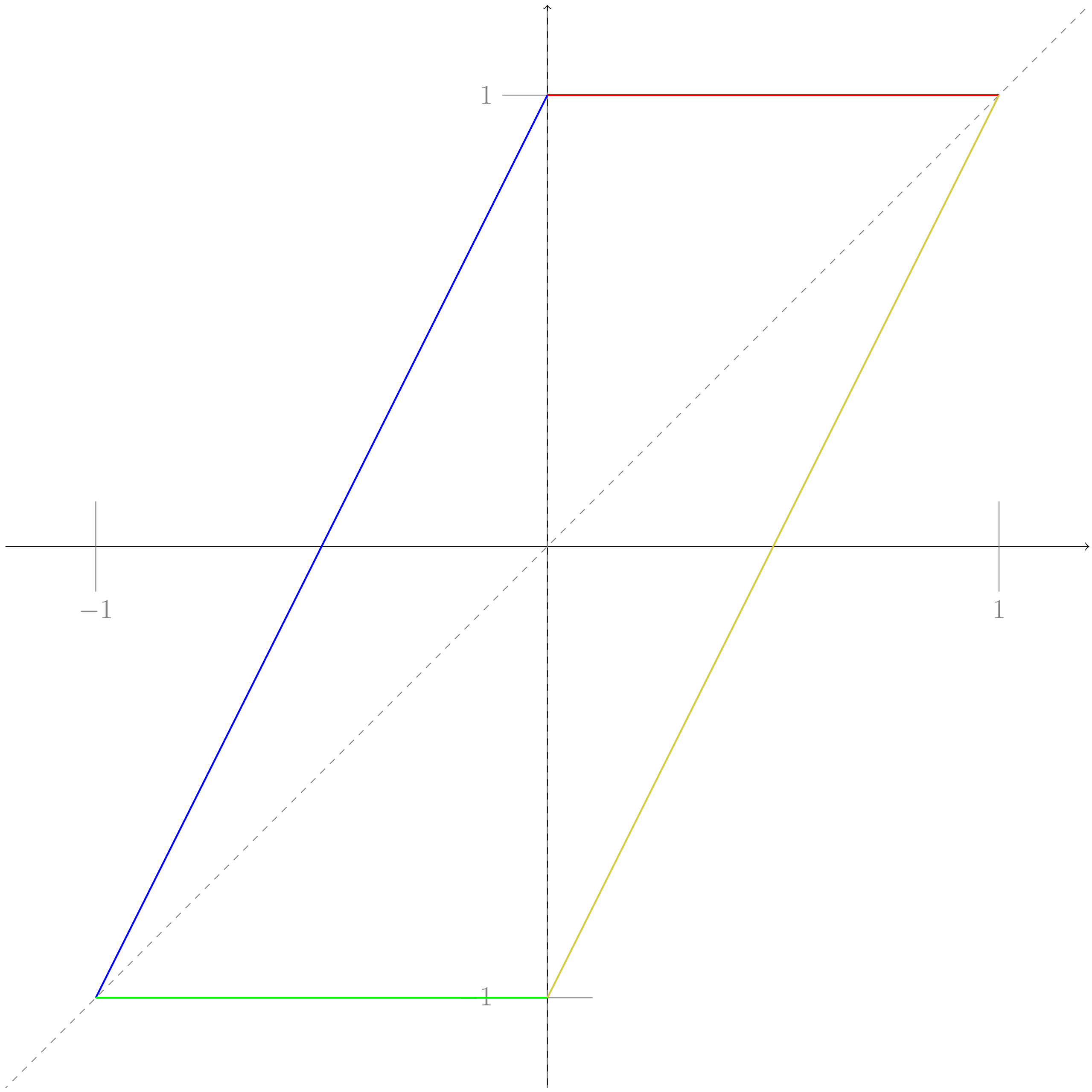
— si $x \leqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x) + (x-y) = 1 \iff -y = 1\,;$$

— si $x \leqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x) - (x-y) = 1 \iff -2\,x + y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $y = 1$

en bleu : $-2\,x + y = 1$

en vert : $-y = 1$

en jaune : $2\,x - y = 1$

**Corrigé 47.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 6

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+3\,y_1+3\,y_2| + |2\,x_1+2\,x_2-2\,y_1-2\,y_2| \\ &\leqslant |x_1+3\,y_1| + |x_2+3\,y_2| + |2\,x_1-2\,y_1| + |2\,x_2-2\,y_2| \\ &\leqslant |x_1+3\,y_1| + |2\,x_1-2\,y_1| + |x_2+3\,y_2| + |2\,x_2-2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + 3\,y| + |2\,x - 2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + 3\,y| = |2\,x - 2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + 3\,y = 0$ et $2\,x - 2\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3\,y & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & 3\,y & = & 0 & \\ & - & 8\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x+3\,y| + |2\,x-2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x+3\,y$ et $2\,x-2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + 3\,y \geqslant 0$ et $2\,x - 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+3\,y) + (2\,x-2\,y) = 1 \iff 3\,x + y = 1\,;$$

— si $x + 3\,y \geqslant 0$ et $2\,x - 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+3\,y) - (2\,x-2\,y) = 1 \iff -x + 5\,y = 1\,;$$

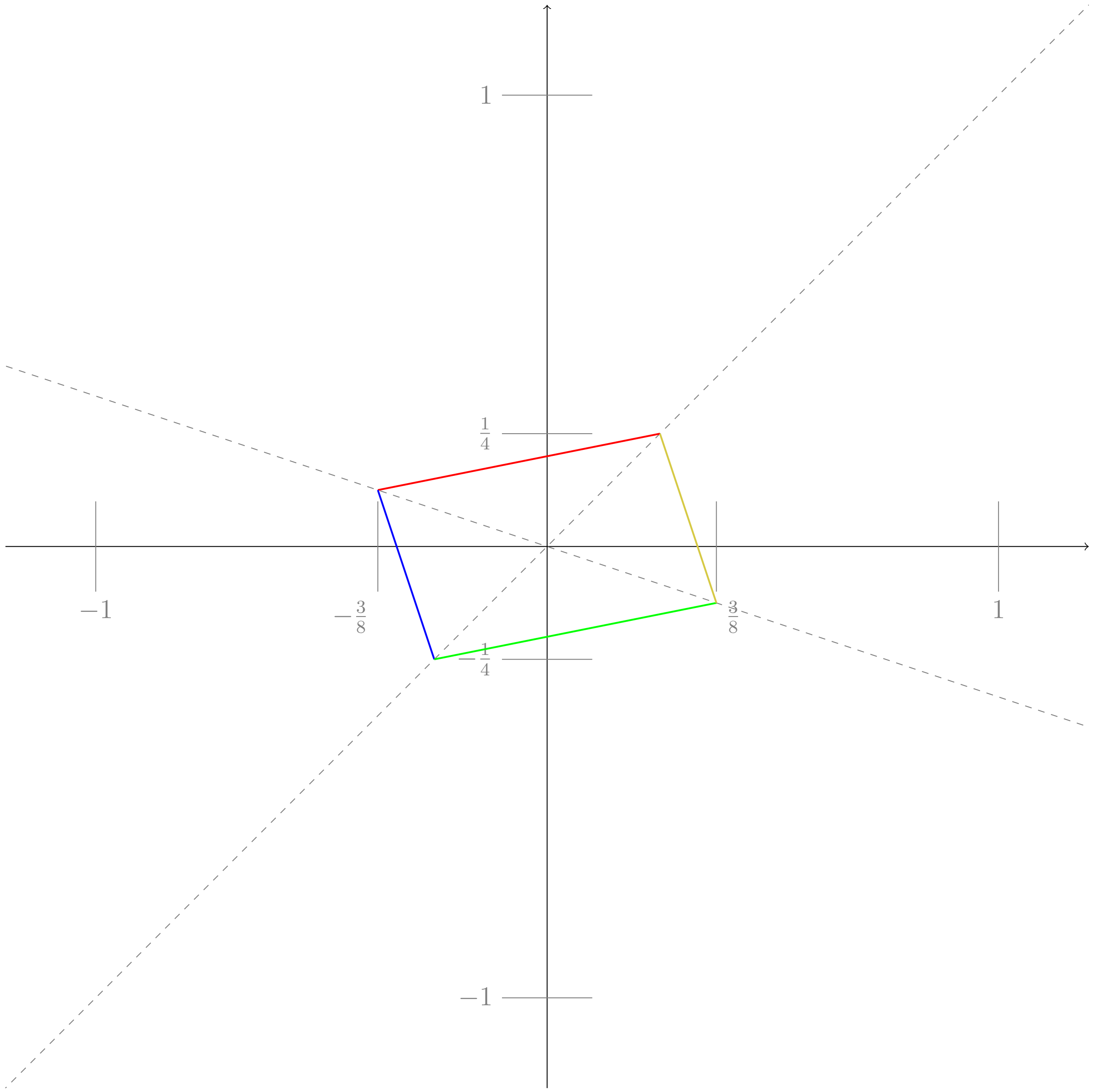
— si $x + 3\,y \leqslant 0$ et $2\,x - 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+3\,y) + (2\,x-2\,y) = 1 \iff x - 5\,y = 1\,;$$

— si $x + 3\,y \leqslant 0$ et $2\,x - 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+3\,y) - (2\,x-2\,y) = 1 \iff -3\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 5\,y = 1$

en bleu : $-3\,x - y = 1$

en vert : $x - 5\,y = 1$

en jaune : $3\,x + y = 1$

← page 6

**Corrigé 48.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue.

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |2\,x_1 + y_1| + |2\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |x_1 - y_1| + |2\,x_1 + y_1| + |x_2 - y_2| + |2\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - y| + |2\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - y| = |2\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - y = 0$ et $2\,x + y = 0$. Or :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ 2\,x & + & y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcll} x & - & y & = & 0 & \\ & & 3\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array} \right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x - y| + |2\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - y$ et $2\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - y \geqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - y) + (2\,x + y) = 1 \iff 3\,x = 1\,;$$

— si $x - y \geqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - y) - (2\,x + y) = 1 \iff -x - 2\,y = 1\,;$$

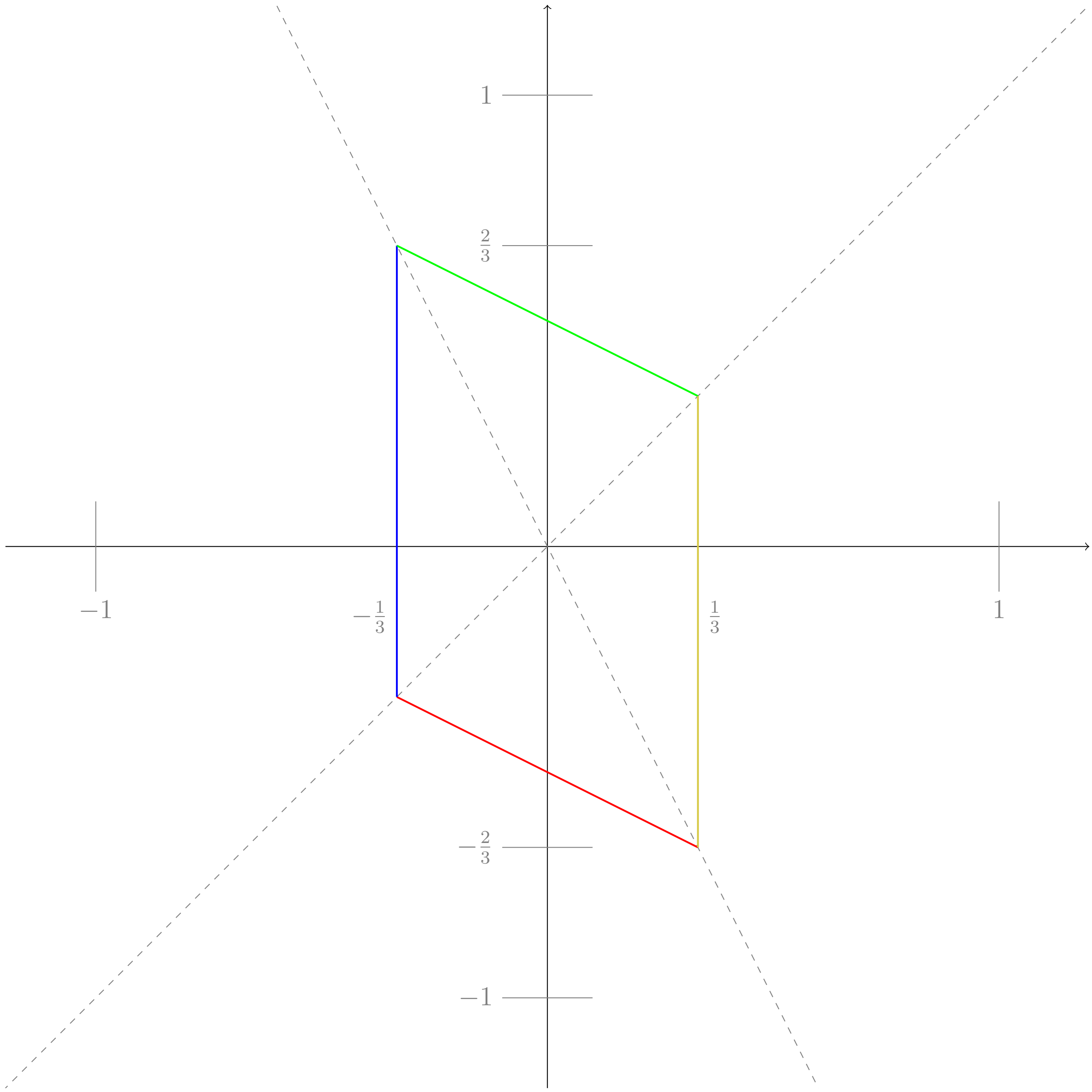
— si $x - y \leqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x - y) + (2\,x + y) = 1 \iff x + 2\,y = 1\,;$$

— si $x - y \leqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x - y) - (2\,x + y) = 1 \iff -3\,x = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x - 2\,y = 1$

en bleu : $-3\,x = 1$

en vert : $x + 2\,y = 1$

en jaune : $3\,x = 1$

**Corrigé 49.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 6

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |2\,x_1 + 2\,x_2 - 2\,y_1 - 2\,y_2| + |3\,x_1 + 3\,x_2| \\
&\leqslant |2\,x_1 - 2\,y_1| + |2\,x_2 - 2\,y_2| + |3\,x_1| + |3\,x_2| \\
&\leqslant |2\,x_1 - 2\,y_1| + |3\,x_1| + |2\,x_2 - 2\,y_2| + |3\,x_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,x - 2\,y| + |3\,x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,x - 2\,y| = |3\,x| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,x - 2\,y = 0$ et $3\,x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |2\,x - 2\,y| + |3\,x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,x - 2\,y$ et $3\,x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,x - 2\,y \geqslant 0$ et $3\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,x - 2\,y) + (3\,x) = 1 \iff 5\,x - 2\,y = 1\,;$$

— si $2\,x - 2\,y \geqslant 0$ et $3\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,x - 2\,y) - (3\,x) = 1 \iff -x - 2\,y = 1\,;$$

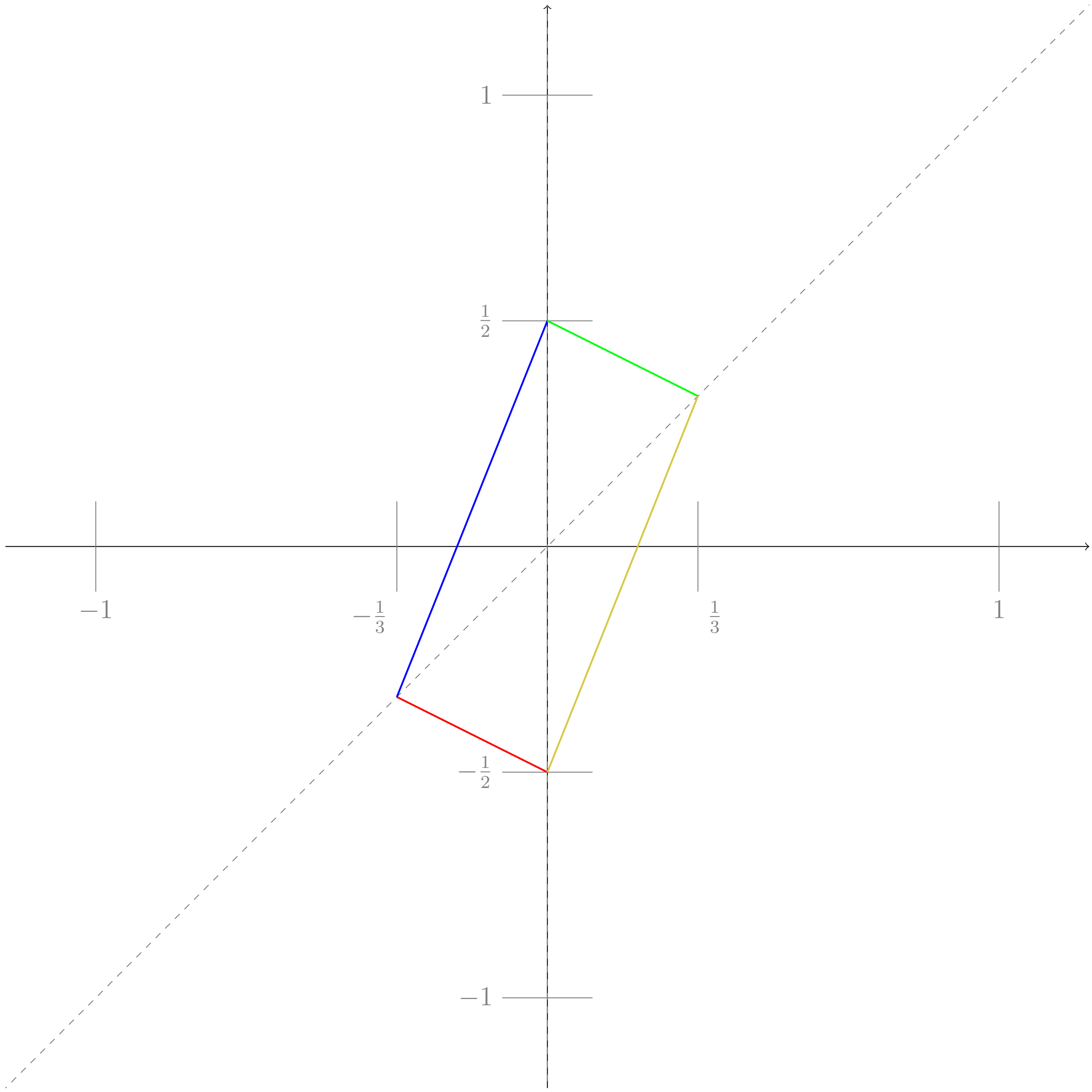
— si $2\,x - 2\,y \leqslant 0$ et $3\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(2\,x - 2\,y) + (3\,x) = 1 \iff x + 2\,y = 1\,;$$

— si $2\,x - 2\,y \leqslant 0$ et $3\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(2\,x - 2\,y) - (3\,x) = 1 \iff -5\,x + 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x-2\,y=1$

en bleu : $-5\,x+2\,y=1$

en vert : $x+2\,y=1$

en jaune : $5\,x-2\,y=1$

**Corrigé 50.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 6

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |3\,y_1 + 3\,y_2| + |10\,x_1 + 10\,x_2| \\ &\leqslant |3\,y_1| + |3\,y_2| + |10\,x_1| + |10\,x_2| \\ &\leqslant |3\,y_1| + |10\,x_1| + |3\,y_2| + |10\,x_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|3\,y| + |10\,x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|3\,y| = |10\,x| = 0$, ce qui équivaut à : $3\,y = 0$ et $10\,x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |3\,y| + |10\,x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $3\,y$ et $10\,x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $3\,y \geqslant 0$ et $10\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,y) + (10\,x) = 1 \iff 10\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $3\,y \geqslant 0$ et $10\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,y) - (10\,x) = 1 \iff -10\,x + 3\,y = 1\,;$$

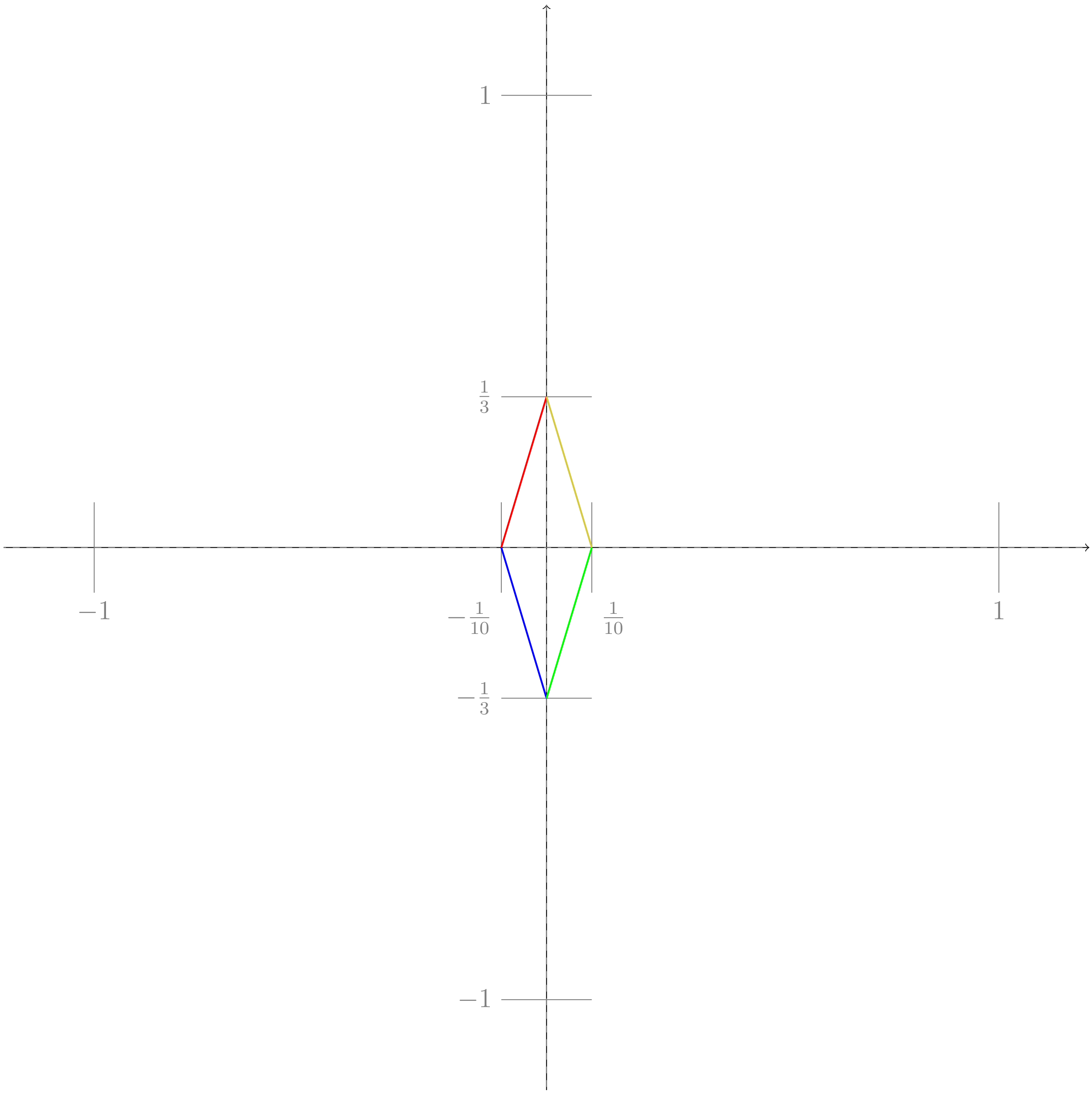
— si $3\,y \leqslant 0$ et $10\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(3\,y) + (10\,x) = 1 \iff 10\,x - 3\,y = 1\,;$$

— si $3\,y \leqslant 0$ et $10\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(3\,y) - (10\,x) = 1 \iff -10\,x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-10\,x+3\,y=1$

en bleu : $-10\,x-3\,y=1$

en vert : $10\,x-3\,y=1$

en jaune : $10\,x+3\,y=1$

**Corrigé 51.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 6

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |2\,y_1 + 2\,y_2| + |x_1 + x_2| \\ &\leqslant |2\,y_1| + |2\,y_2| + |x_1| + |x_2| \\ &\leqslant |2\,y_1| + |x_1| + |2\,y_2| + |x_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,y| + |x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,y| = |x| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,y = 0$ et $x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |2\,y| + |x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,y$ et $x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,y \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,y) + (x) = 1 \iff x + 2\,y = 1\,;$$

— si $2\,y \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,y) - (x) = 1 \iff -x + 2\,y = 1\,;$$

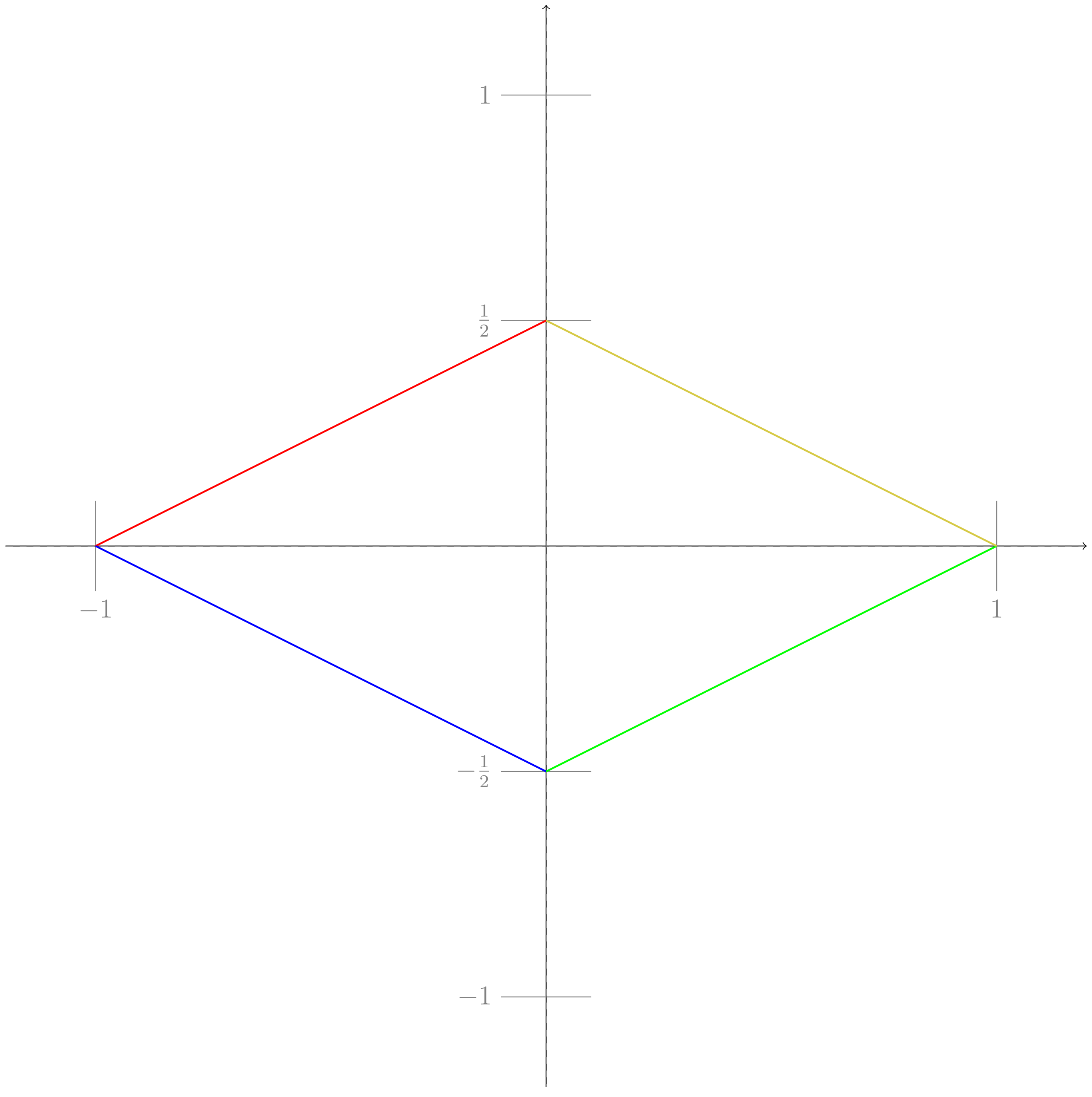
— si $2\,y \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(2\,y) + (x) = 1 \iff x - 2\,y = 1\,;$$

— si $2\,y \leqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(2\,y) - (x) = 1 \iff -x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 2\,y = 1$

en bleu : $-x - 2\,y = 1$

en vert : $x - 2\,y = 1$

en jaune : $x + 2\,y = 1$

**Corrigé 52.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 6

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+2\,y_1+2\,y_2| + |x_1+x_2+4\,y_1+4\,y_2| \\
&\leqslant |x_1+2\,y_1| + |x_2+2\,y_2| + |x_1+4\,y_1| + |x_2+4\,y_2| \\
&\leqslant |x_1+2\,y_1| + |x_1+4\,y_1| + |x_2+2\,y_2| + |x_2+4\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + 2\,y| + |x + 4\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + 2\,y| = |x + 4\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x+2\,y = 0$ et $x + 4\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2\,y & = & 0 \\ x & + & 4\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & 2\,y & = & 0 & \\ & & 2\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x+2\,y| + |x+4\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x+2\,y$ et $x+4\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + 2\,y \geqslant 0$ et $x + 4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+2\,y) + (x+4\,y) = 1 \iff 2\,x + 6\,y = 1\,;$$

— si $x + 2\,y \geqslant 0$ et $x + 4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+2\,y) - (x+4\,y) = 1 \iff -2\,y = 1\,;$$

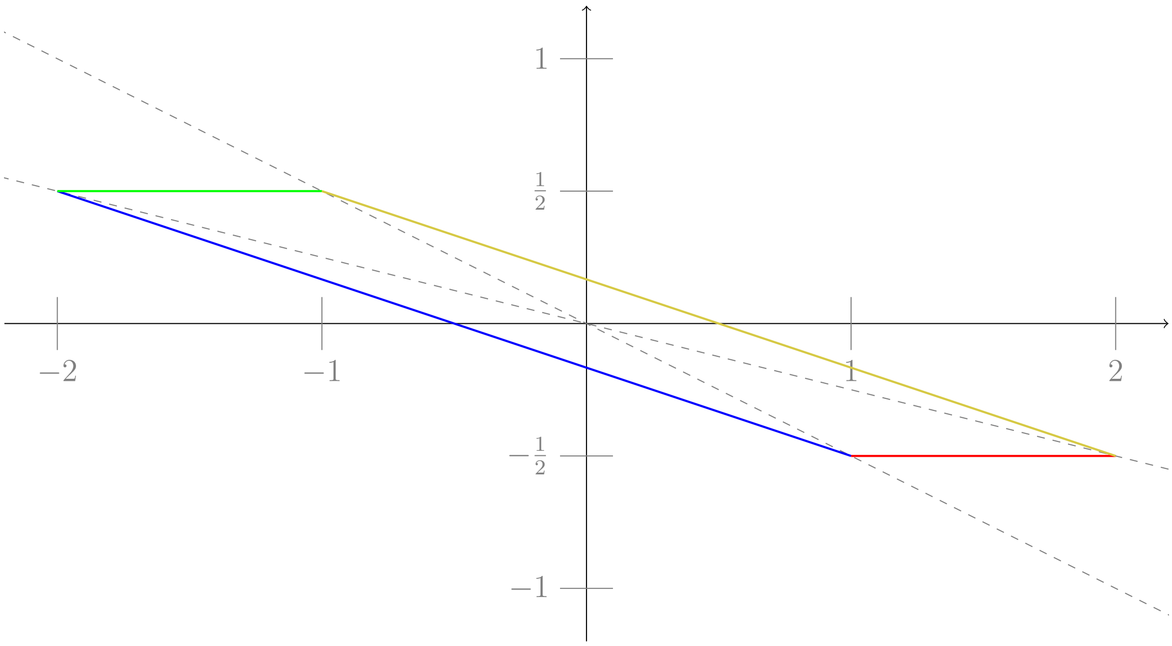
— si $x + 2\,y \leqslant 0$ et $x + 4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+2\,y) + (x+4\,y) = 1 \iff 2\,y = 1\,;$$

— si $x + 2\,y \leqslant 0$ et $x + 4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+2\,y) - (x+4\,y) = 1 \iff -2\,x - 6\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,y = 1$

en bleu : $-2\,x - 6\,y = 1$

en vert : $2\,y = 1$

en jaune : $2\,x + 6\,y = 1$

**Corrigé 53.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 6

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2| + |2\,y_1 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |x_1| + |x_2| + |2\,y_1| + |2\,y_2| \\ &\leqslant |x_1| + |2\,y_1| + |x_2| + |2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x| + |2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x| = |2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x = 0$ et $2\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x| + |2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x$ et $2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x \geqslant 0$ et $2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x) + (2\,y) = 1 \iff x + 2\,y = 1\,;$$

— si $x \geqslant 0$ et $2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x) - (2\,y) = 1 \iff x - 2\,y = 1\,;$$

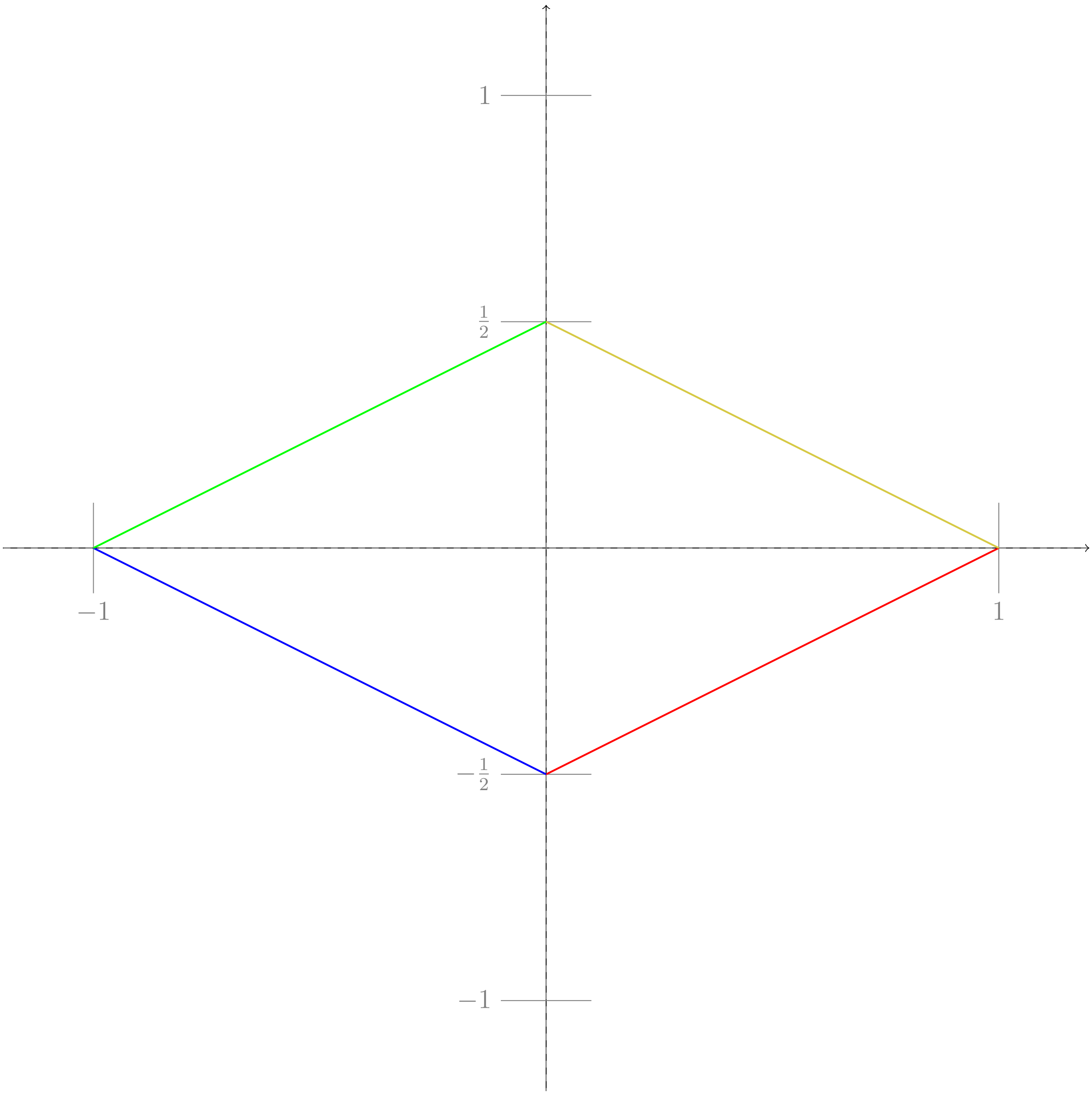
— si $x \leqslant 0$ et $2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x) + (2\,y) = 1 \iff -x + 2\,y = 1\,;$$

— si $x \leqslant 0$ et $2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(x) - (2\,y) = 1 \iff -x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - 2\,y = 1$ — en bleu : $-x - 2\,y = 1$

en vert : $-x + 2\,y = 1$ — en jaune : $x + 2\,y = 1$

**Corrigé 54.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 6

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |9\,x_1 + 9\,x_2 - y_1 - y_2| + |y_1 + y_2| \\ &\leqslant |9\,x_1 - y_1| + |9\,x_2 - y_2| + |y_1| + |y_2| \\ &\leqslant |9\,x_1 - y_1| + |y_1| + |9\,x_2 - y_2| + |y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|9\,x - y| + |y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|9\,x - y| = |y| = 0$, ce qui équivaut à : $9\,x - y = 0$ et $y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |9\,x - y| + |y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $9\,x - y$ et $y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $9\,x - y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (9\,x - y) + (y) = 1 \iff 9\,x = 1\,;$$

— si $9\,x - y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (9\,x - y) - (y) = 1 \iff 9\,x - 2\,y = 1\,;$$

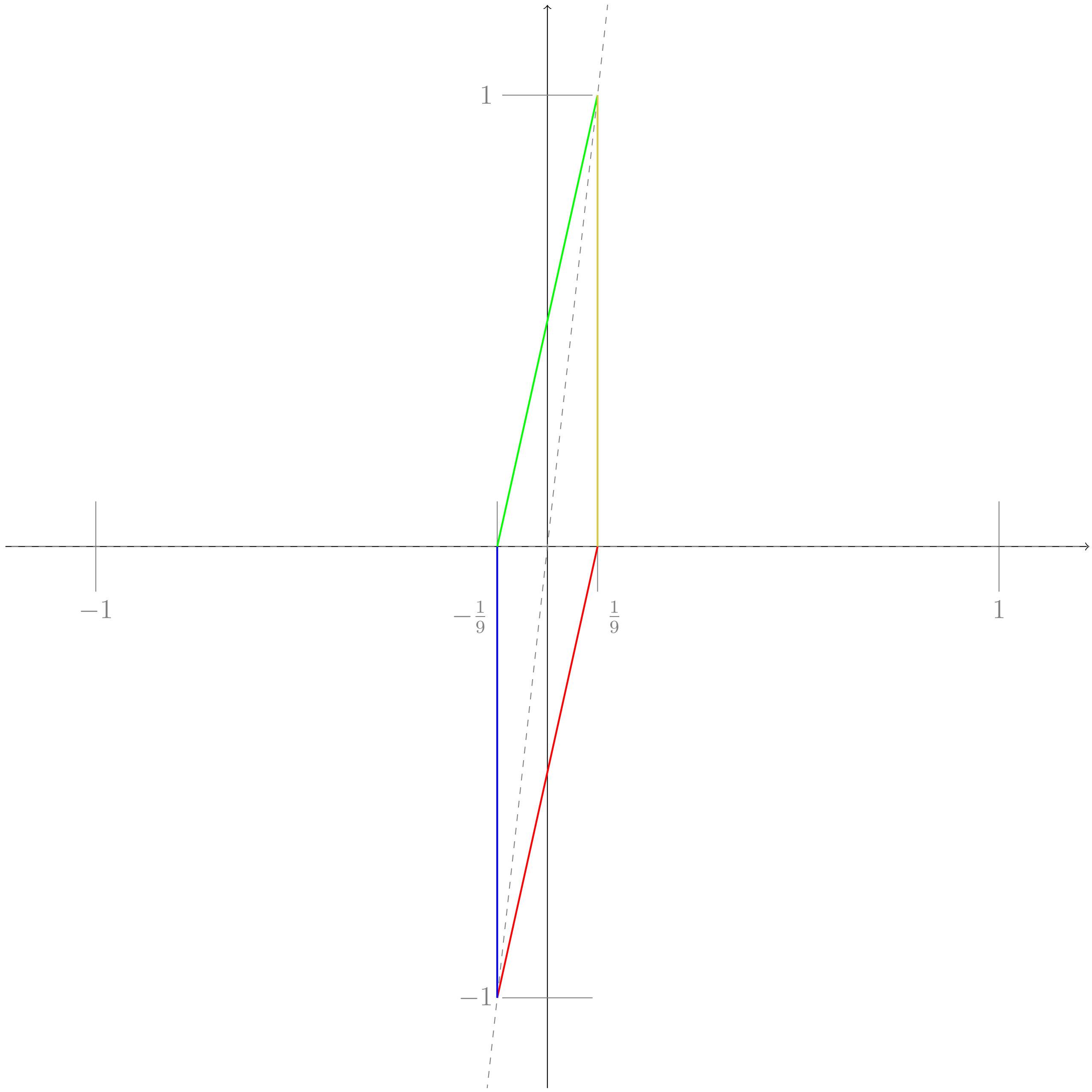
— si $9\,x - y \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(9\,x - y) + (y) = 1 \iff -9\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $9\,x - y \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(9\,x - y) - (y) = 1 \iff -9\,x = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $9\,x - 2\,y = 1$

en bleu : $-9\,x = 1$

en vert : $-9\,x + 2\,y = 1$

en jaune : $9\,x = 1$

**Corrigé 55.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 6

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |8\,x_1 + 8\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |y_2| + |8\,x_1 + y_1| + |8\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |8\,x_1 + y_1| + |y_2| + |8\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |8\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |8\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $8\,x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |8\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $8\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $8\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (8\,x + y) = 1 \iff 8\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $8\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (8\,x + y) = 1 \iff -8\,x = 1\,;$$

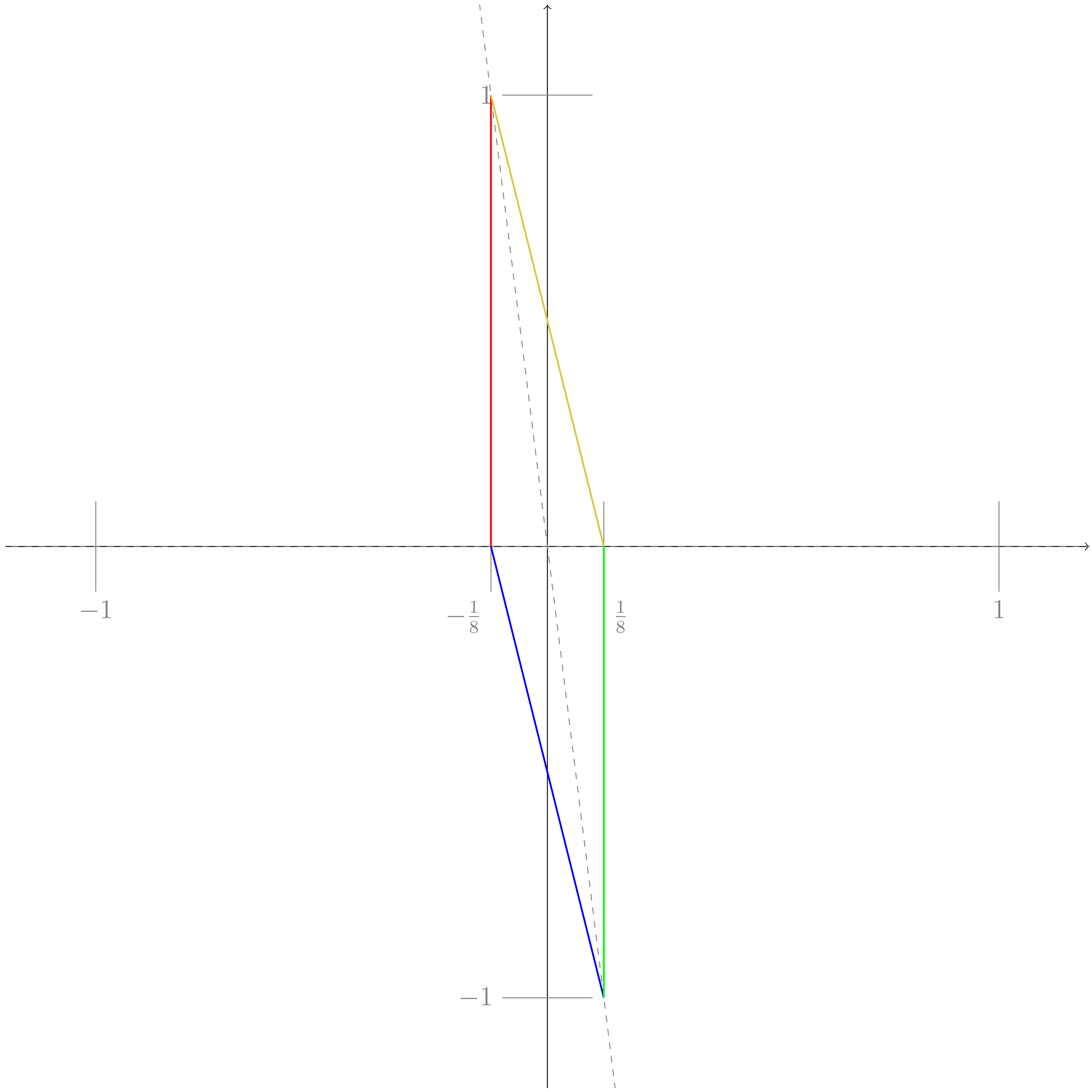
— si $y \leqslant 0$ et $8\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(y) + (8\,x + y) = 1 \iff 8\,x = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $8\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(y) - (8\,x + y) = 1 \iff -8\,x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-8\,x = 1$

en bleu : $-8\,x - 2\,y = 1$

en vert : $8\,x = 1$

en jaune : $8\,x + 2\,y = 1$

**Corrigé 56.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |4\,x_1+4\,x_2| + |-x_1-x_2+y_1+y_2| \\ &\leqslant |4\,x_1| + |4\,x_2| + |-x_1+y_1| + |-x_2+y_2| \\ &\leqslant |4\,x_1| + |-x_1+y_1| + |4\,x_2| + |-x_2+y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|4\,x| + |-x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|4\,x| = |-x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $4\,x = 0$ et $-x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |4\,x| + |-x+y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $4\,x$ et $-x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $4\,x \geqslant 0$ et $-x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (4\,x) + (-x+y) = 1 \iff 3\,x + y = 1\,;$$

— si $4\,x \geqslant 0$ et $-x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (4\,x) - (-x+y) = 1 \iff 5\,x - y = 1\,;$$

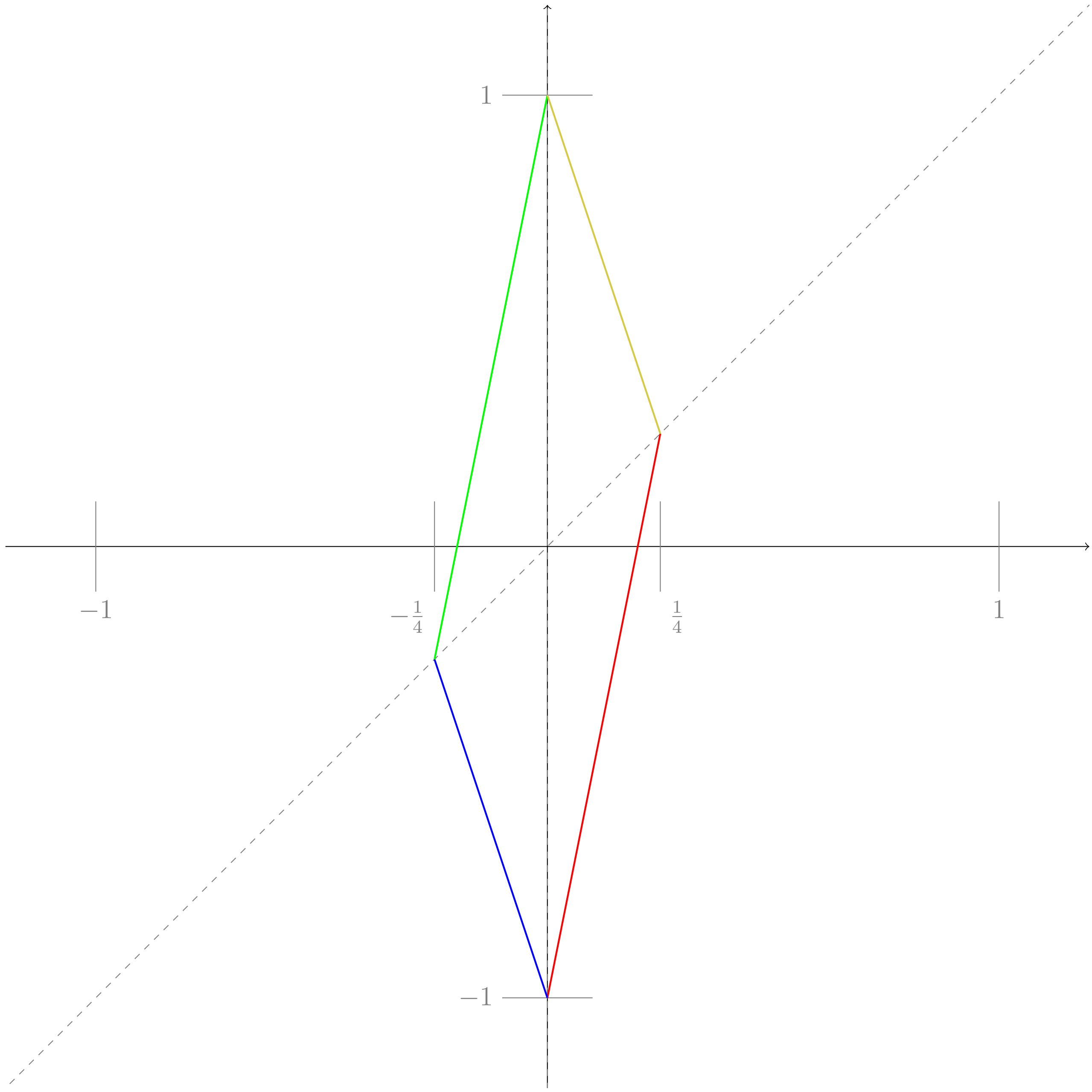
— si $4\,x \leqslant 0$ et $-x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(4\,x) + (-x+y) = 1 \iff -5\,x + y = 1\,;$$

— si $4\,x \leqslant 0$ et $-x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(4\,x) - (-x+y) = 1 \iff -3\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $5\,x - y = 1$

en bleu : $-3\,x - y = 1$

en vert : $-5\,x + y = 1$

en jaune : $3\,x + y = 1$

**Corrigé 57.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2 + 5\,y_1 + 5\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |y_2| + |2\,x_1 + 5\,y_1| + |2\,x_2 + 5\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |2\,x_1 + 5\,y_1| + |y_2| + |2\,x_2 + 5\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |2\,x + 5\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |2\,x + 5\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $2\,x + 5\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |2\,x + 5\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $2\,x + 5\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $2\,x + 5\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (2\,x + 5\,y) = 1 \iff 2\,x + 6\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $2\,x + 5\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (2\,x + 5\,y) = 1 \iff -2\,x - 4\,y = 1\,;$$

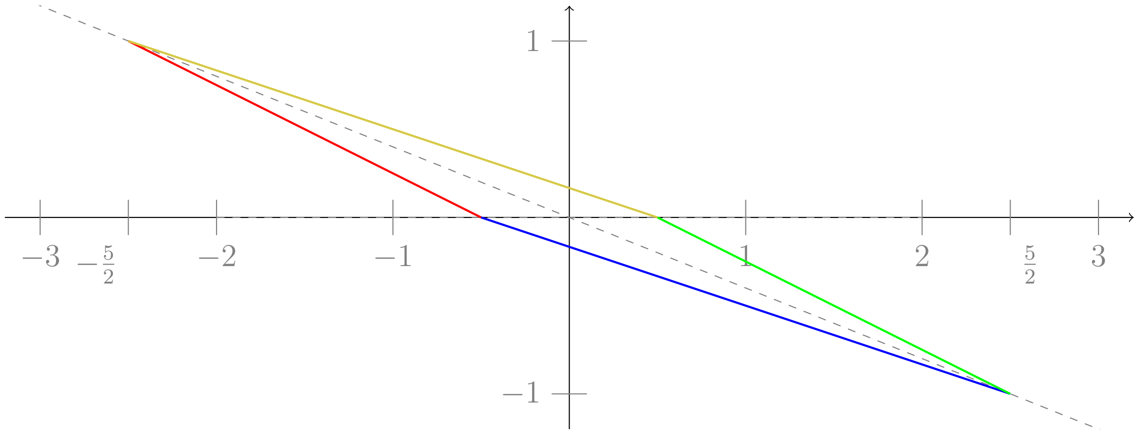
— si $y \leqslant 0$ et $2\,x + 5\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) + (2\,x + 5\,y) = 1 \iff 2\,x + 4\,y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $2\,x + 5\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) - (2\,x + 5\,y) = 1 \iff -2\,x - 6\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,x - 4\,y = 1$

en bleu : $-2\,x - 6\,y = 1$

en vert : $2\,x + 4\,y = 1$

en jaune : $2\,x + 6\,y = 1$

**Corrigé 58.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |-x_1-x_2+4\,y_1+4\,y_2| + |4\,x_1+4\,x_2+y_1+y_2| \\
&\leqslant |-x_1+4\,y_1| + |-x_2+4\,y_2| + |4\,x_1+y_1| + |4\,x_2+y_2| \\
&\leqslant |-x_1+4\,y_1| + |4\,x_1+y_1| + |-x_2+4\,y_2| + |4\,x_2+y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x,y) = 0$. C'est-à-dire : $|-x+4\,y| + |4\,x+y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-x+4\,y| = |4\,x+y| = 0$, ce qui équivaut à : $-x+4\,y=0$ et $4\,x+y=0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & 4\,y & = & 0 \\ 4\,x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -x & + & 4\,y & = & 0 & \\ & & 17\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2+4L_1) \end{array}\right.$$

donc $x=y=0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x,y)=0$ alors $(x,y)=(0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x,y)=1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff |-x+4\,y|+|4\,x+y|=1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-x+4\,y$ et $4\,x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-x+4\,y \geqslant 0$ et $4\,x+y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff (-x+4\,y)+(4\,x+y)=1 \iff 3\,x+5\,y=1\,;$$

— si $-x+4\,y \geqslant 0$ et $4\,x+y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff (-x+4\,y)-(4\,x+y)=1 \iff -5\,x+3\,y=1\,;$$

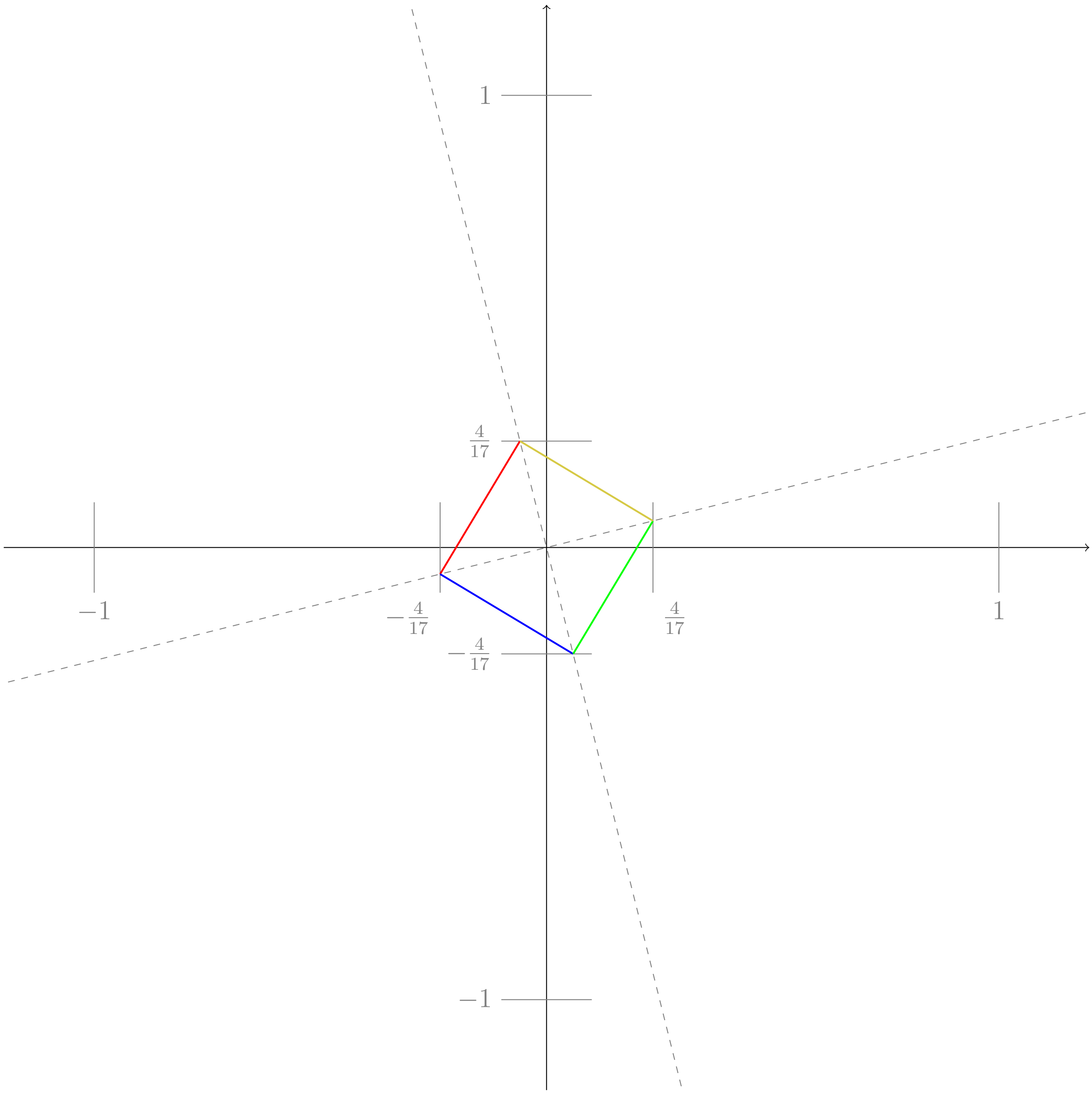
— si $-x+4\,y \leqslant 0$ et $4\,x+y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff -(-x+4\,y)+(4\,x+y)=1 \iff 5\,x-3\,y=1\,;$$

— si $-x+4\,y \leqslant 0$ et $4\,x+y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff -(-x+4\,y)-(4\,x+y)=1 \iff -3\,x-5\,y=1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y=ax+b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-5\,x+3\,y=1$ — en bleu : $-3\,x-5\,y=1$

en vert : $5\,x-3\,y=1$ — en jaune : $3\,x+5\,y=1$

**Corrigé 59.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |3\,x_1+3\,x_2+y_1+y_2| + |7\,x_1+7\,x_2+y_1+y_2| \\ &\leqslant |3\,x_1+y_1| + |3\,x_2+y_2| + |7\,x_1+y_1| + |7\,x_2+y_2| \\ &\leqslant |3\,x_1+y_1| + |7\,x_1+y_1| + |3\,x_2+y_2| + |7\,x_2+y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|3\,x + y| + |7\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|3\,x + y| = |7\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $3\,x+y = 0$ et $7\,x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3\,x & + & y & = & 0 \\ 7\,x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 3\,x & + & y & = & 0 & \\ & - & \frac{4}{3}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{3}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |3\,x+y| + |7\,x+y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $3\,x+y$ et $7\,x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $3\,x + y \geqslant 0$ et $7\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (3\,x+y) + (7\,x+y) = 1 \iff 10\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $3\,x + y \geqslant 0$ et $7\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (3\,x+y) - (7\,x+y) = 1 \iff -4\,x = 1\,;$$

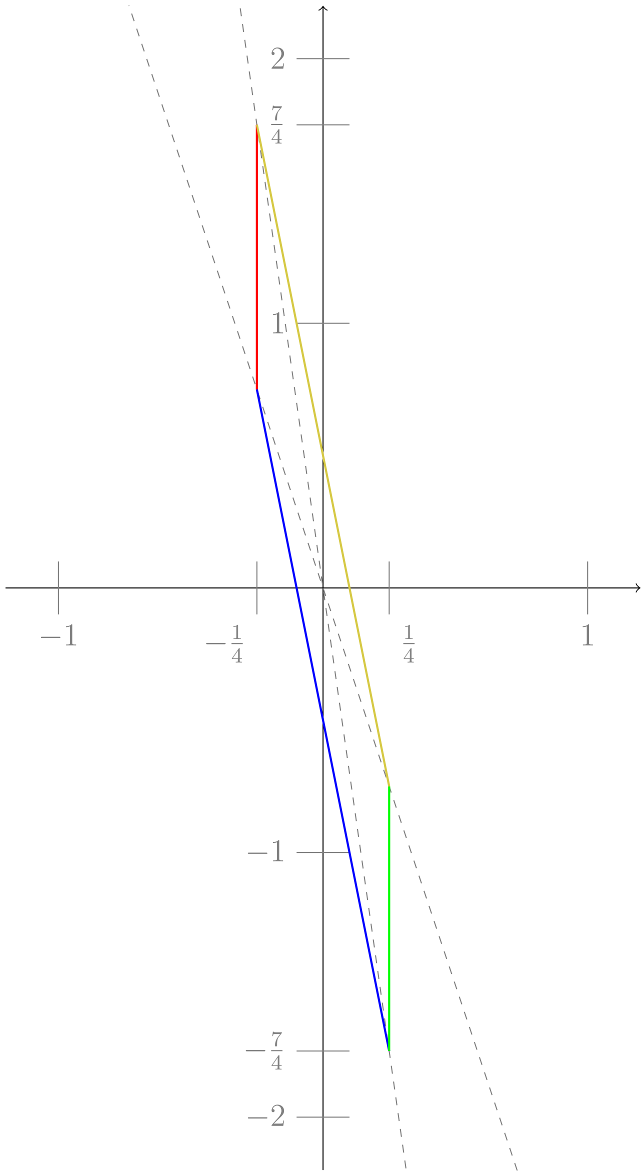
— si $3\,x + y \leqslant 0$ et $7\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(3\,x+y) + (7\,x+y) = 1 \iff 4\,x = 1\,;$$

— si $3\,x + y \leqslant 0$ et $7\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(3\,x+y) - (7\,x+y) = 1 \iff -10\,x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-4\,x = 1$

en bleu : $-10\,x - 2\,y = 1$

en vert : $4\,x = 1$

en jaune : $10\,x + 2\,y = 1$

**Corrigé 60.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ et tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right) &= |-2\,x_1-2\,x_2+8\,y_1+8\,y_2|+|x_1+x_2-6\,y_1-6\,y_2|\\
&\leqslant |-2\,x_1+8\,y_1|+|-2\,x_2+8\,y_2|+|x_1-6\,y_1|+|x_2-6\,y_2|\\
&\leqslant |-2\,x_1+8\,y_1|+|x_1-6\,y_1|+|-2\,x_2+8\,y_2|+|x_2-6\,y_2|\\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x,y)=0$. C'est-à-dire : $|-2\,x+8\,y|+|x-6\,y|=0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-2\,x+8\,y|=|x-6\,y|=0$, ce qui équivaut à : $-2\,x+8\,y=0$ et $x-6\,y=0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -2x&+&8y&=&0\\ x&-&6y&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -2x&+&8y&=&0&\\ &-&2y&=&0&(L_2\leftarrow L_2+\frac{1}{2}L_1)\end{array}\right.$$

donc $x=y=0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x,y)=0$ alors $(x,y)=(0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x,y)=1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff |-2\,x+8\,y|+|x-6\,y|=1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-2\,x+8\,y$ et $x-6\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-2\,x+8\,y\geqslant 0$ et $x-6\,y\geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff(-2\,x+8\,y)+(x-6\,y)=1\iff -x+2\,y=1\,;$$

— si $-2\,x+8\,y\geqslant 0$ et $x-6\,y\leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff(-2\,x+8\,y)-(x-6\,y)=1\iff -3\,x+14\,y=1\,;$$

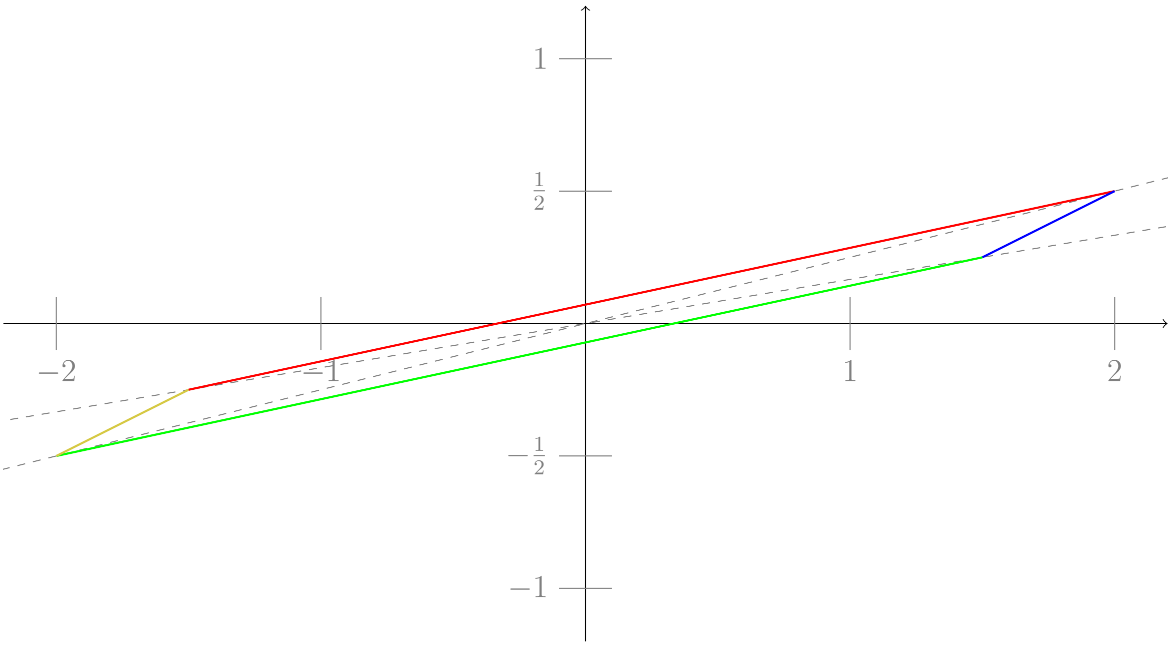
— si $-2\,x+8\,y\leqslant 0$ et $x-6\,y\geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff-(-2\,x+8\,y)+(x-6\,y)=1\iff 3\,x-14\,y=1\,;$$

— si $-2\,x+8\,y\leqslant 0$ et $x-6\,y\leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff-(-2\,x+8\,y)-(x-6\,y)=1\iff x-2\,y=1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y=ax+b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-3\,x + 14\,y = 1$ — en bleu : $x - 2\,y = 1$

en vert : $3\,x - 14\,y = 1$ — en jaune : $-x + 2\,y = 1$

**Corrigé 61.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |6\,x_1+6\,x_2-y_1-y_2| + |4\,x_1+4\,x_2-2\,y_1-2\,y_2| \\ &\leqslant |6\,x_1-y_1|+|6\,x_2-y_2|+|4\,x_1-2\,y_1|+|4\,x_2-2\,y_2| \\ &\leqslant |6\,x_1-y_1|+|4\,x_1-2\,y_1|+|6\,x_2-y_2|+|4\,x_2-2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|6\,x - y| + |4\,x - 2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|6\,x - y| = |4\,x - 2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $6\,x - y = 0$ et $4\,x - 2\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 6\,x & - & y & = & 0 \\ 4\,x & - & 2\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 6\,x & - & y & = & 0 & \\ & - & \frac{4}{3}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |6\,x - y| + |4\,x - 2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $6\,x-y$ et $4\,x-2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $6\,x - y \geqslant 0$ et $4\,x - 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (6\,x-y) + (4\,x-2\,y) = 1 \iff 10\,x - 3\,y = 1\,;$$

— si $6\,x - y \geqslant 0$ et $4\,x - 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (6\,x-y) - (4\,x-2\,y) = 1 \iff 2\,x + y = 1\,;$$

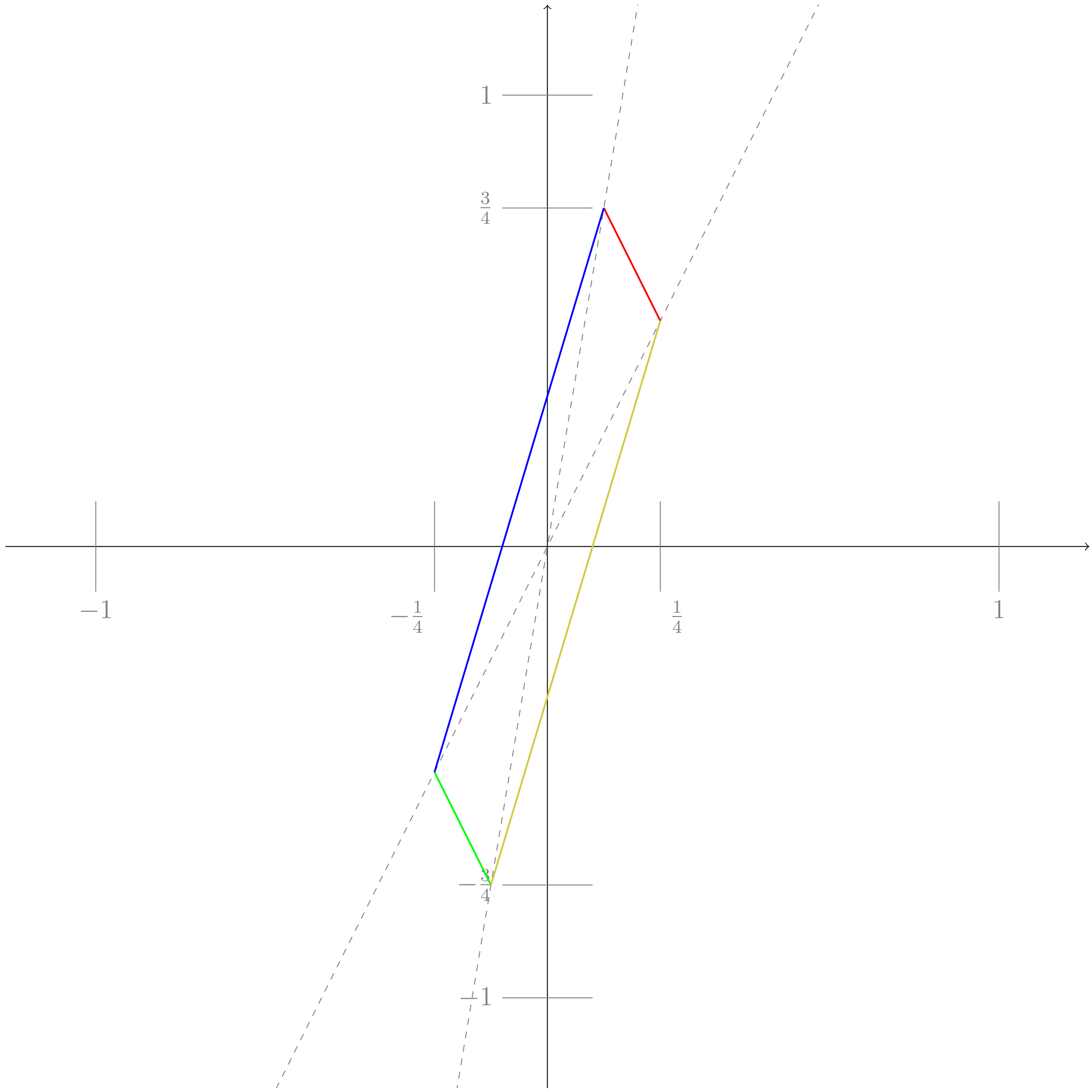
— si $6\,x - y \leqslant 0$ et $4\,x - 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(6\,x-y) + (4\,x-2\,y) = 1 \iff -2\,x - y = 1\,;$$

— si $6\,x - y \leqslant 0$ et $4\,x - 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(6\,x-y) - (4\,x-2\,y) = 1 \iff -10\,x + 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $2\,x + y = 1$

en bleu : $-10\,x + 3\,y = 1$

en vert : $-2\,x - y = 1$

en jaune : $10\,x - 3\,y = 1$

**Corrigé 62.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 - 2\,y_1 - 2\,y_2| + |6\,y_1 + 6\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 - 2\,y_1| + |x_2 - 2\,y_2| + |6\,y_1| + |6\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 - 2\,y_1| + |6\,y_1| + |x_2 - 2\,y_2| + |6\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - 2\,y| + |6\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - 2\,y| = |6\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - 2\,y = 0$ et $6\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x - 2\,y| + |6\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - 2\,y$ et $6\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - 2\,y \geqslant 0$ et $6\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - 2\,y) + (6\,y) = 1 \iff x + 4\,y = 1\,;$$

— si $x - 2\,y \geqslant 0$ et $6\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - 2\,y) - (6\,y) = 1 \iff x - 8\,y = 1\,;$$

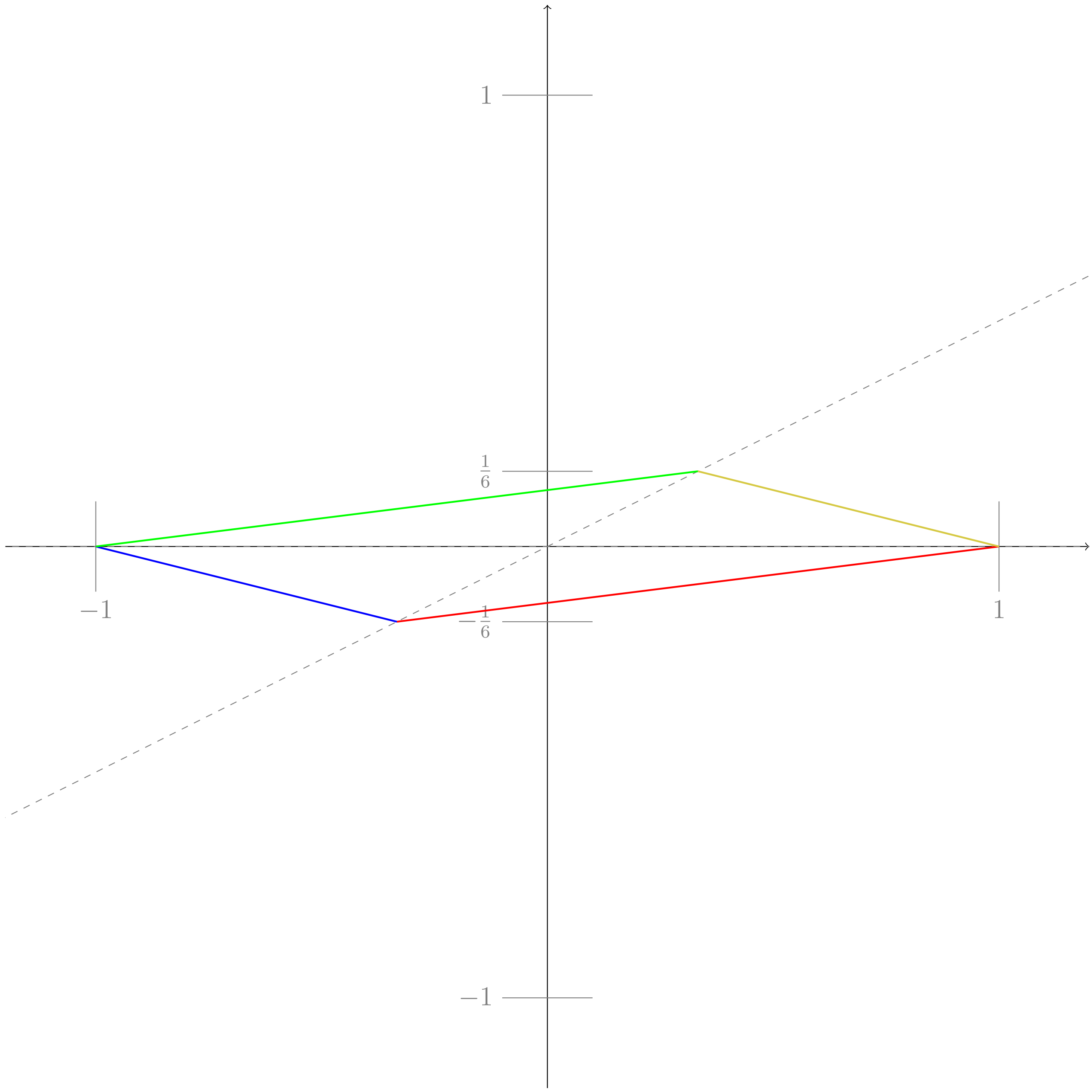
— si $x - 2\,y \leqslant 0$ et $6\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x - 2\,y) + (6\,y) = 1 \iff -x + 8\,y = 1\,;$$

— si $x - 2\,y \leqslant 0$ et $6\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x - 2\,y) - (6\,y) = 1 \iff -x - 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - 8\,y = 1$

en bleu : $-x - 4\,y = 1$

en vert : $-x + 8\,y = 1$

en jaune : $x + 4\,y = 1$

**Corrigé 63.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ et tout $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right)=\mathrm{N}\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)&=|6\,y_1+6\,y_2|+|x_1+x_2-y_1-y_2|\\&\leqslant|6\,y_1|+|6\,y_2|+|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\\&\leqslant|6\,y_1|+|x_1-y_1|+|6\,y_2|+|x_2-y_2|\\&=\mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x,y)=0$. C'est-à-dire : $|6\,y|+|x-y|=0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|6\,y|=|x-y|=0$, ce qui équivaut à : $6\,y=0$ et $x-y=0$. De là on déduit aisément que $x=y=0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x,y)=0$ alors $(x,y)=(0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x,y)=1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff|6\,y|+|x-y|=1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $6\,y$ et $x-y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $6\,y\geqslant 0$ et $x-y\geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff(6\,y)+(x-y)=1\iff x+5\,y=1\,;$$

— si $6\,y\geqslant 0$ et $x-y\leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff(6\,y)-(x-y)=1\iff -x+7\,y=1\,;$$

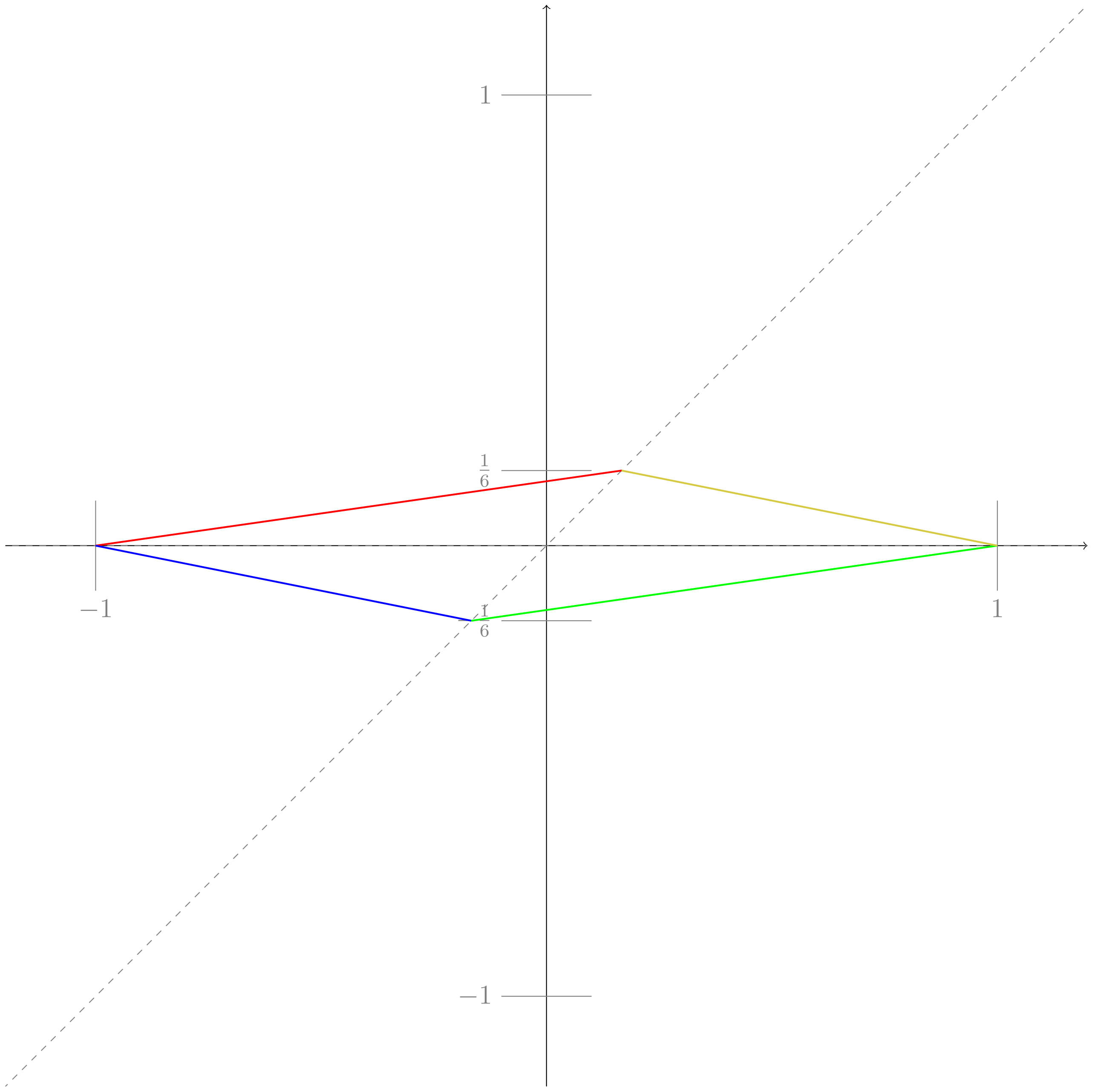
— si $6\,y\leqslant 0$ et $x-y\geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff-(6\,y)+(x-y)=1\iff x-7\,y=1\,;$$

— si $6\,y\leqslant 0$ et $x-y\leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1\iff-(6\,y)-(x-y)=1\iff -x-5\,y=1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y=ax+b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 7\,y = 1$

en bleu : $-x - 5\,y = 1$

en vert : $x - 7\,y = 1$

en jaune : $x + 5\,y = 1$

**Corrigé 64.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2| + |-2\,x_1 - 2\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |x_1| + |x_2| + |-2\,x_1 + y_1| + |-2\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |x_1| + |-2\,x_1 + y_1| + |x_2| + |-2\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x| + |-2\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x| = |-2\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x = 0$ et $-2\,x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow |x| + |-2\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x$ et $-2\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x \geqslant 0$ et $-2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow (x) + (-2\,x + y) = 1 \Longleftrightarrow -x + y = 1\,;$$

— si $x \geqslant 0$ et $-2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow (x) - (-2\,x + y) = 1 \Longleftrightarrow 3\,x - y = 1\,;$$

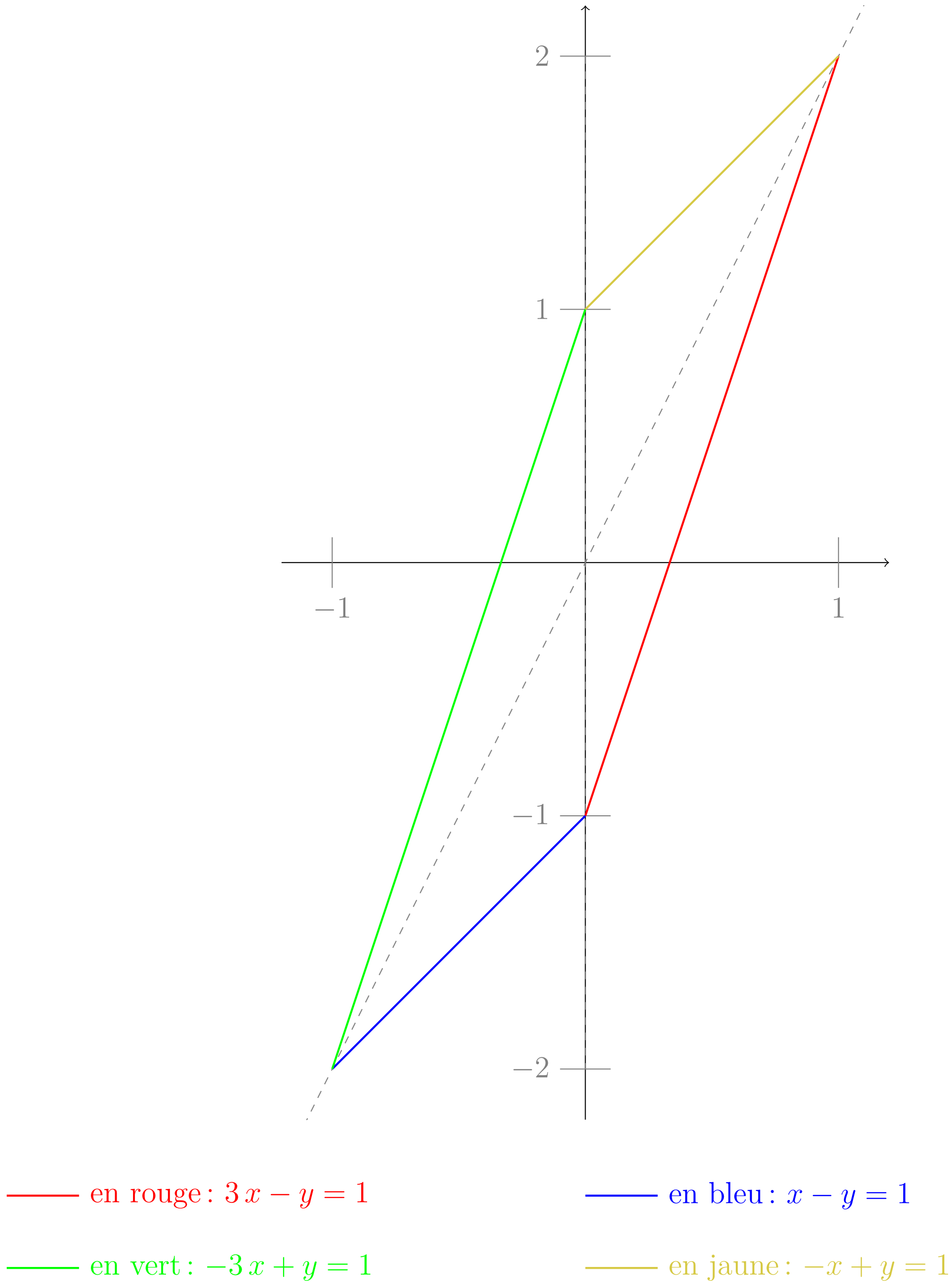
— si $x \leqslant 0$ et $-2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow -(x) + (-2\,x + y) = 1 \Longleftrightarrow -3\,x + y = 1\,;$$

— si $x \leqslant 0$ et $-2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow -(x) - (-2\,x + y) = 1 \Longleftrightarrow x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.


2
1
−1
1
−1
−2
en rouge : $3\,x - y = 1$
en bleu : $x - y = 1$
en vert : $-3\,x + y = 1$
en jaune : $-x + y = 1$

**Corrigé 65.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 7

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |3\,x_1 + 3\,x_2 + y_1 + y_2| + |2\,y_1 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |3\,x_1 + y_1| + |3\,x_2 + y_2| + |2\,y_1| + |2\,y_2| \\ &\leqslant |3\,x_1 + y_1| + |2\,y_1| + |3\,x_2 + y_2| + |2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|3\,x + y| + |2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|3\,x + y| = |2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $3\,x + y = 0$ et $2\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |3\,x + y| + |2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $3\,x + y$ et $2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $3\,x + y \geqslant 0$ et $2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,x + y) + (2\,y) = 1 \iff 3\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $3\,x + y \geqslant 0$ et $2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,x + y) - (2\,y) = 1 \iff 3\,x - y = 1\,;$$

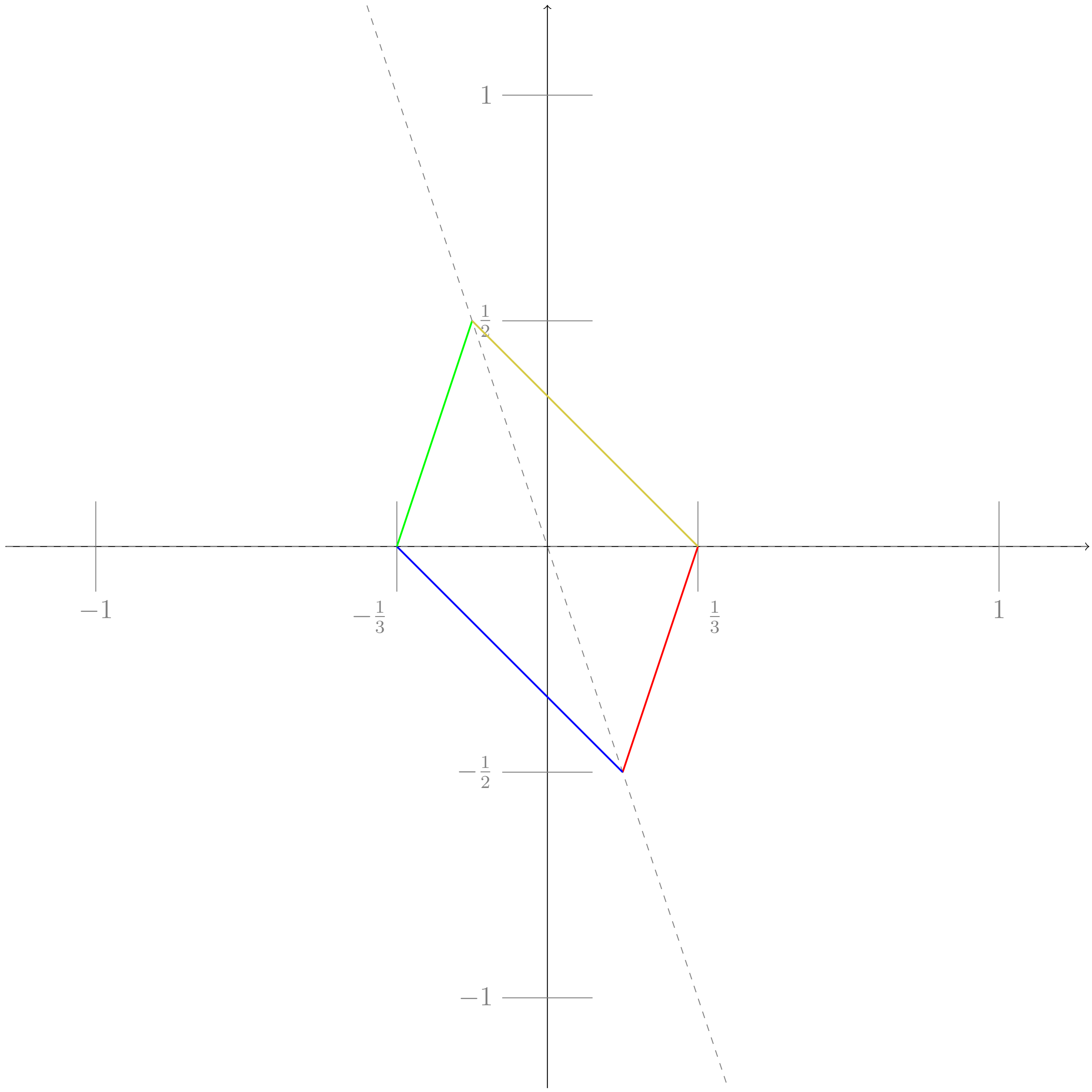
— si $3\,x + y \leqslant 0$ et $2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(3\,x + y) + (2\,y) = 1 \iff -3\,x + y = 1\,;$$

— si $3\,x + y \leqslant 0$ et $2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(3\,x + y) - (2\,y) = 1 \iff -3\,x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3x - y = 1$

en bleu : $-3x - 3y = 1$

en vert : $-3x + y = 1$

en jaune : $3x + 3y = 1$

**Corrigé 66.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+y_1+y_2| + |2\,x_1+2\,x_2+y_1+y_2| \\
&\leqslant |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + |2\,x_1+y_1| + |2\,x_2+y_2| \\
&\leqslant |x_1+y_1| + |2\,x_1+y_1| + |x_2+y_2| + |2\,x_2+y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + y| + |2\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + y| = |2\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + y = 0$ et $2\,x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ 2\,x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & y & = & 0 & \\ & - & y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x+y| + |2\,x+y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + y$ et $2\,x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + y \geqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+y) + (2\,x+y) = 1 \iff 3\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $x + y \geqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+y) - (2\,x+y) = 1 \iff -x = 1\,;$$

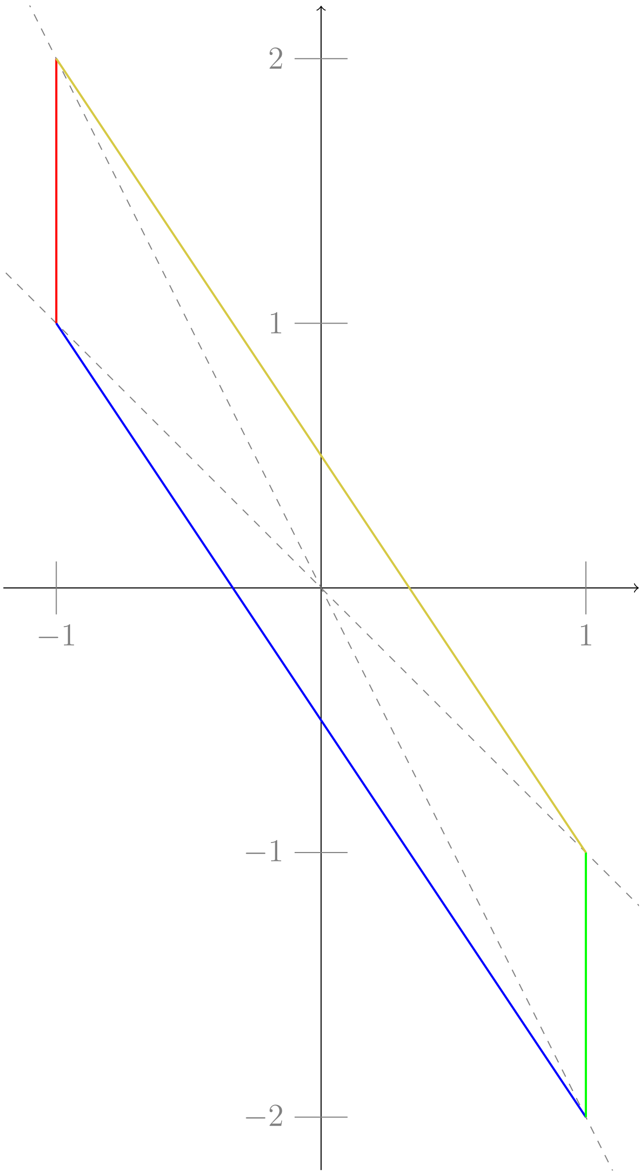
— si $x + y \leqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+y) + (2\,x+y) = 1 \iff x = 1\,;$$

— si $x + y \leqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+y) - (2\,x+y) = 1 \iff -3\,x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x = 1$

en bleu : $-3\,x - 2\,y = 1$

en vert : $x = 1$

en jaune : $3\,x + 2\,y = 1$

**Corrigé 67.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2-y_1-y_2| + |2\,x_1+2\,x_2-3\,y_1-3\,y_2| \\
&\leqslant |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |2\,x_1-3\,y_1| + |2\,x_2-3\,y_2| \\
&\leqslant |x_1-y_1| + |2\,x_1-3\,y_1| + |x_2-y_2| + |2\,x_2-3\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x,y) = 0$. C'est-à-dire : $|x-y| + |2\,x-3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x-y| = |2\,x-3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x-y=0$ et $2\,x-3\,y=0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & - & y & = & 0 & \\ & - & y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x,y)=0$ alors $(x,y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x,y)=1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x-y| + |2\,x-3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x-y$ et $2\,x-3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x-y \geqslant 0$ et $2\,x-3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff (x-y)+(2\,x-3\,y)=1 \iff 3\,x-4\,y=1\,;$$

— si $x-y \geqslant 0$ et $2\,x-3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff (x-y)-(2\,x-3\,y)=1 \iff -x+2\,y=1\,;$$

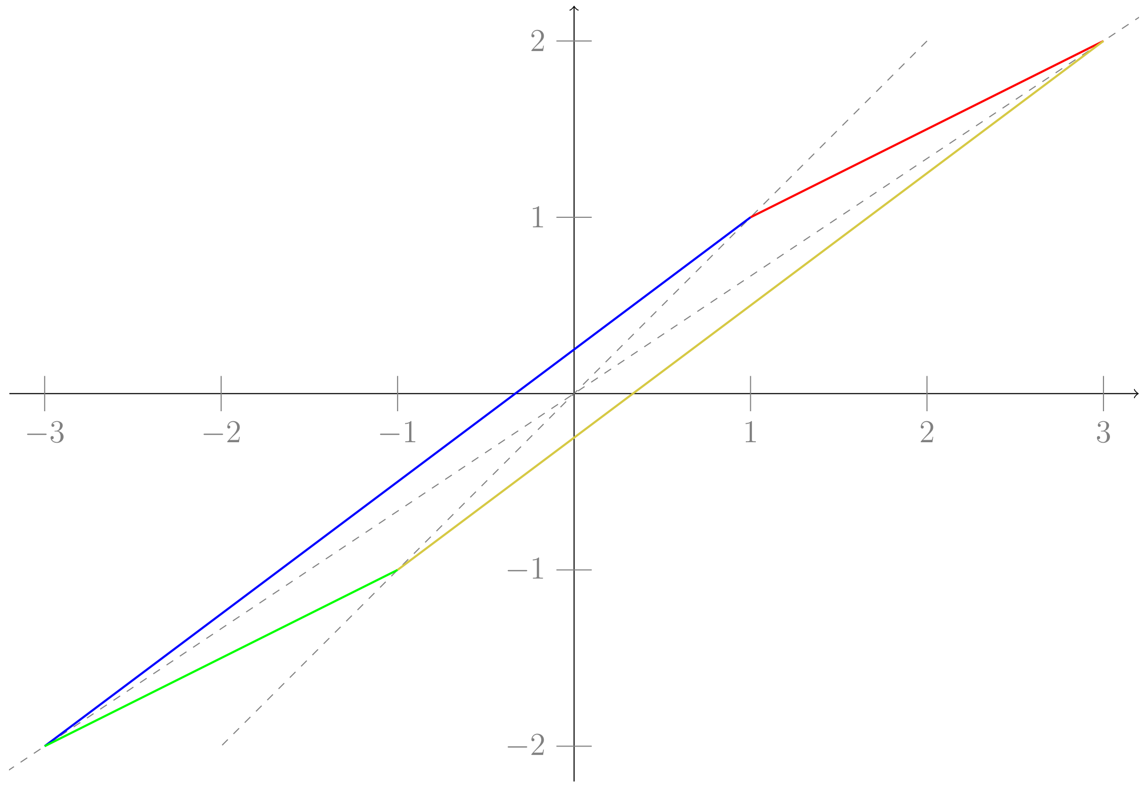
— si $x-y \leqslant 0$ et $2\,x-3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff -(x-y)+(2\,x-3\,y)=1 \iff x-2\,y=1\,;$$

— si $x-y \leqslant 0$ et $2\,x-3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff -(x-y)-(2\,x-3\,y)=1 \iff -3\,x+4\,y=1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax+b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 2\,y = 1$

en bleu : $-3\,x + 4\,y = 1$

en vert : $x - 2\,y = 1$

en jaune : $3\,x - 4\,y = 1$

**Corrigé 68.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |6\,x_1 + 6\,x_2 + 4\,y_1 + 4\,y_2| + |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |6\,x_1 + 4\,y_1| + |6\,x_2 + 4\,y_2| + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &\leqslant |6\,x_1 + 4\,y_1| + |x_1 + y_1| + |6\,x_2 + 4\,y_2| + |x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|6\,x + 4\,y| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|6\,x + 4\,y| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $6\,x + 4\,y = 0$ et $x + y = 0$. Or :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 6\,x & + & 4\,y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 6\,x & + & 4\,y & = & 0 \\ & & \frac{1}{3}\,y & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{6}L_1) \end{array} \right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |6\,x + 4\,y| + |x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $6\,x+4\,y$ et $x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $6\,x + 4\,y \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (6\,x + 4\,y) + (x + y) = 1 \iff 7\,x + 5\,y = 1\,;$$

— si $6\,x + 4\,y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (6\,x + 4\,y) - (x + y) = 1 \iff 5\,x + 3\,y = 1\,;$$

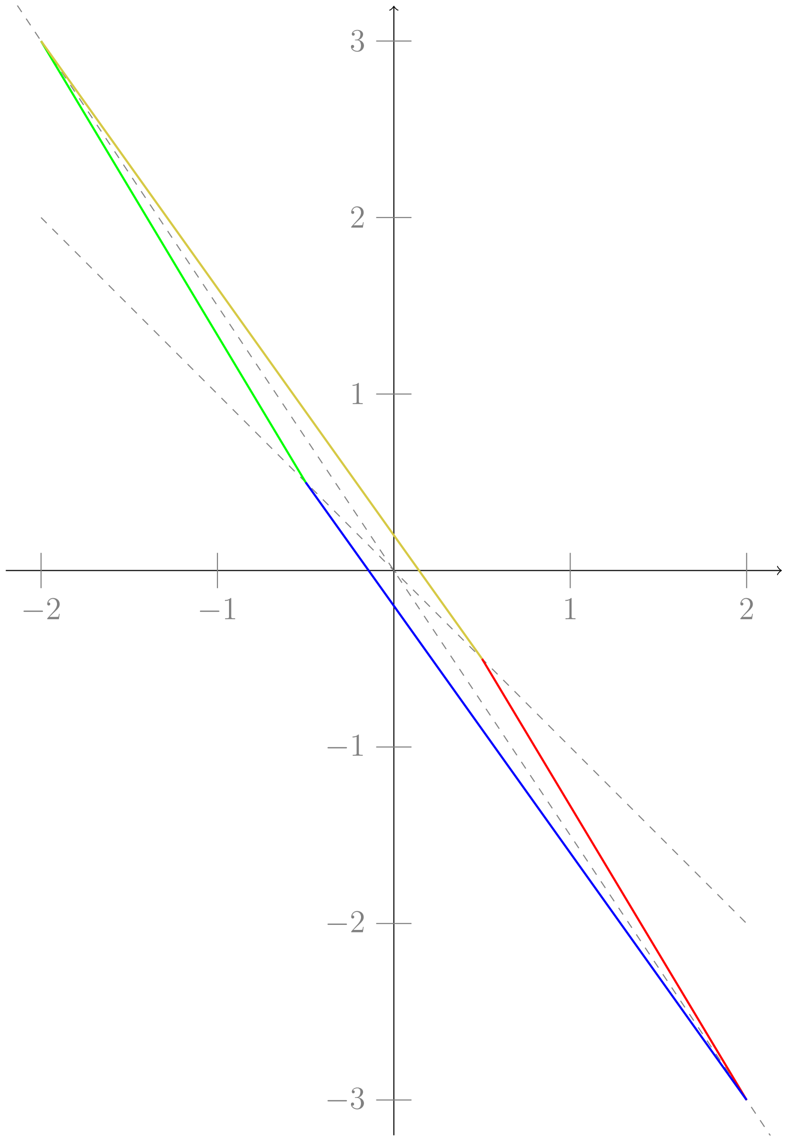
— si $6\,x + 4\,y \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(6\,x + 4\,y) + (x + y) = 1 \iff -5\,x - 3\,y = 1\,;$$

— si $6\,x + 4\,y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(6\,x + 4\,y) - (x + y) = 1 \iff -7\,x - 5\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $5\,x + 3\,y = 1$

en bleu : $-7\,x - 5\,y = 1$

en vert : $-5\,x - 3\,y = 1$

en jaune : $7\,x + 5\,y = 1$

**Corrigé 69.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| + |5\,x_1 + 5\,x_2 - y_1 - y_2| \\
&\leqslant |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + |5\,x_1 - y_1| + |5\,x_2 - y_2| \\
&\leqslant |x_1 + y_1| + |5\,x_1 - y_1| + |x_2 + y_2| + |5\,x_2 - y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + y| + |5\,x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + y| = |5\,x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + y = 0$ et $5\,x - y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ 5\,x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & y & = & 0 & \\ & - & 6\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x + y| + |5\,x - y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + y$ et $5\,x - y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + y \geqslant 0$ et $5\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) + (5\,x - y) = 1 \iff 6\,x = 1\,;$$

— si $x + y \geqslant 0$ et $5\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + y) - (5\,x - y) = 1 \iff -4\,x + 2\,y = 1\,;$$

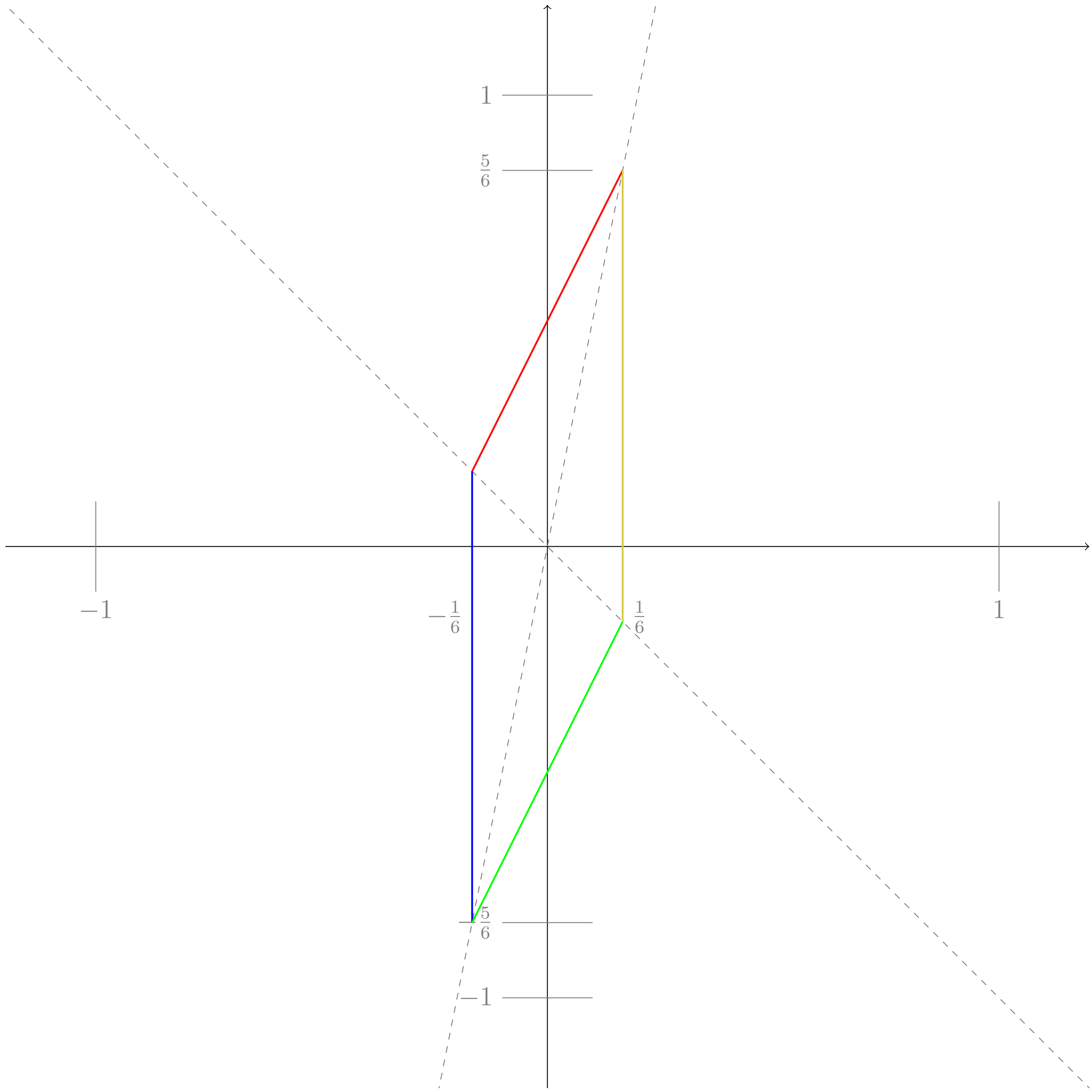
— si $x + y \leqslant 0$ et $5\,x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x + y) + (5\,x - y) = 1 \iff 4\,x - 2\,y = 1\,;$$

— si $x + y \leqslant 0$ et $5\,x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x + y) - (5\,x - y) = 1 \iff -6\,x = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-4\,x + 2\,y = 1$ en bleu : $-6\,x = 1$

en vert : $4\,x - 2\,y = 1$ en jaune : $6\,x = 1$

**Corrigé 70.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |x_1 + x_2 + 3\,y_1 + 3\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |y_2| + |x_1 + 3\,y_1| + |x_2 + 3\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |x_1 + 3\,y_1| + |y_2| + |x_2 + 3\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |x + 3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |x + 3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $x + 3\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |x + 3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $x + 3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $x + 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (x + 3\,y) = 1 \iff x + 4\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $x + 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (x + 3\,y) = 1 \iff -x - 2\,y = 1\,;$$

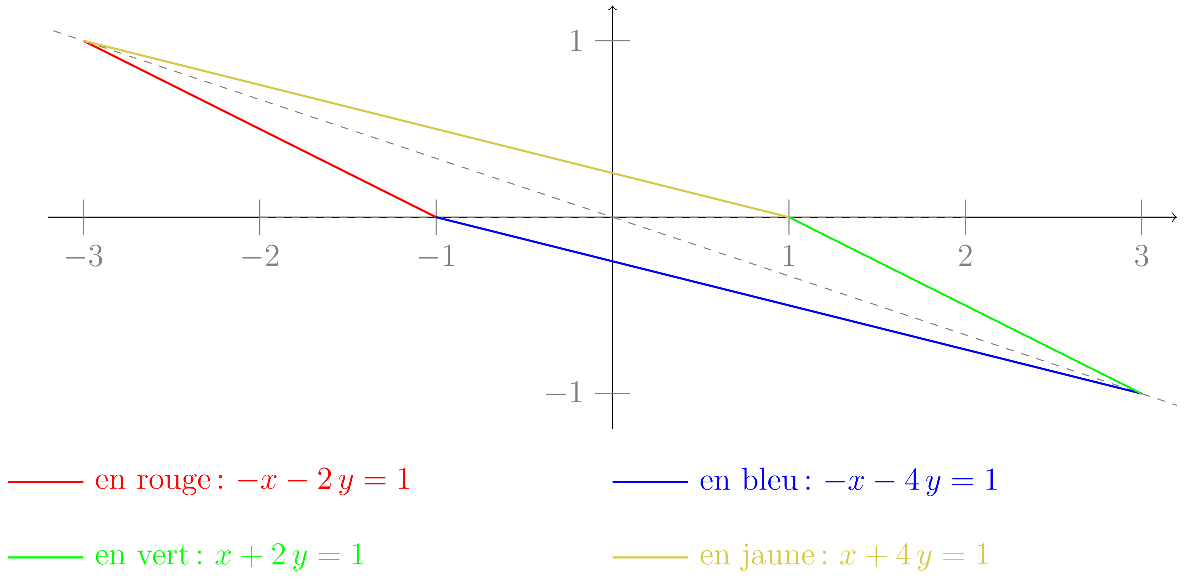
— si $y \leqslant 0$ et $x + 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) + (x + 3\,y) = 1 \iff x + 2\,y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $x + 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) - (x + 3\,y) = 1 \iff -x - 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.


1
−1
−3
−2
−1
1
2
3
en rouge : $-x - 2\,y = 1$
en bleu : $-x - 4\,y = 1$
en vert : $x + 2\,y = 1$
en jaune : $x + 4\,y = 1$

**Corrigé 71.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |-x_1-x_2+4\,y_1+4\,y_2| + |x_1+x_2+2\,y_1+2\,y_2| \\
&\leqslant |-x_1+4\,y_1| + |-x_2+4\,y_2| + |x_1+2\,y_1| + |x_2+2\,y_2| \\
&\leqslant |-x_1+4\,y_1| + |x_1+2\,y_1| + |-x_2+4\,y_2| + |x_2+2\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-x+4\,y| + |x+2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à $0$ : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-x+4\,y| = |x+2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $-x+4\,y = 0$ et $x+2\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & 4\,y & = & 0 \\ x & + & 2\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -x & + & 4\,y & = & 0 & \\ & & 6\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |-x+4\,y| + |x+2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-x+4\,y$ et $x+2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-x+4\,y \geqslant 0$ et $x+2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-x+4\,y)+(x+2\,y) = 1 \iff 6\,y = 1\,;$$

— si $-x+4\,y \geqslant 0$ et $x+2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-x+4\,y)-(x+2\,y) = 1 \iff -2\,x+2\,y = 1\,;$$

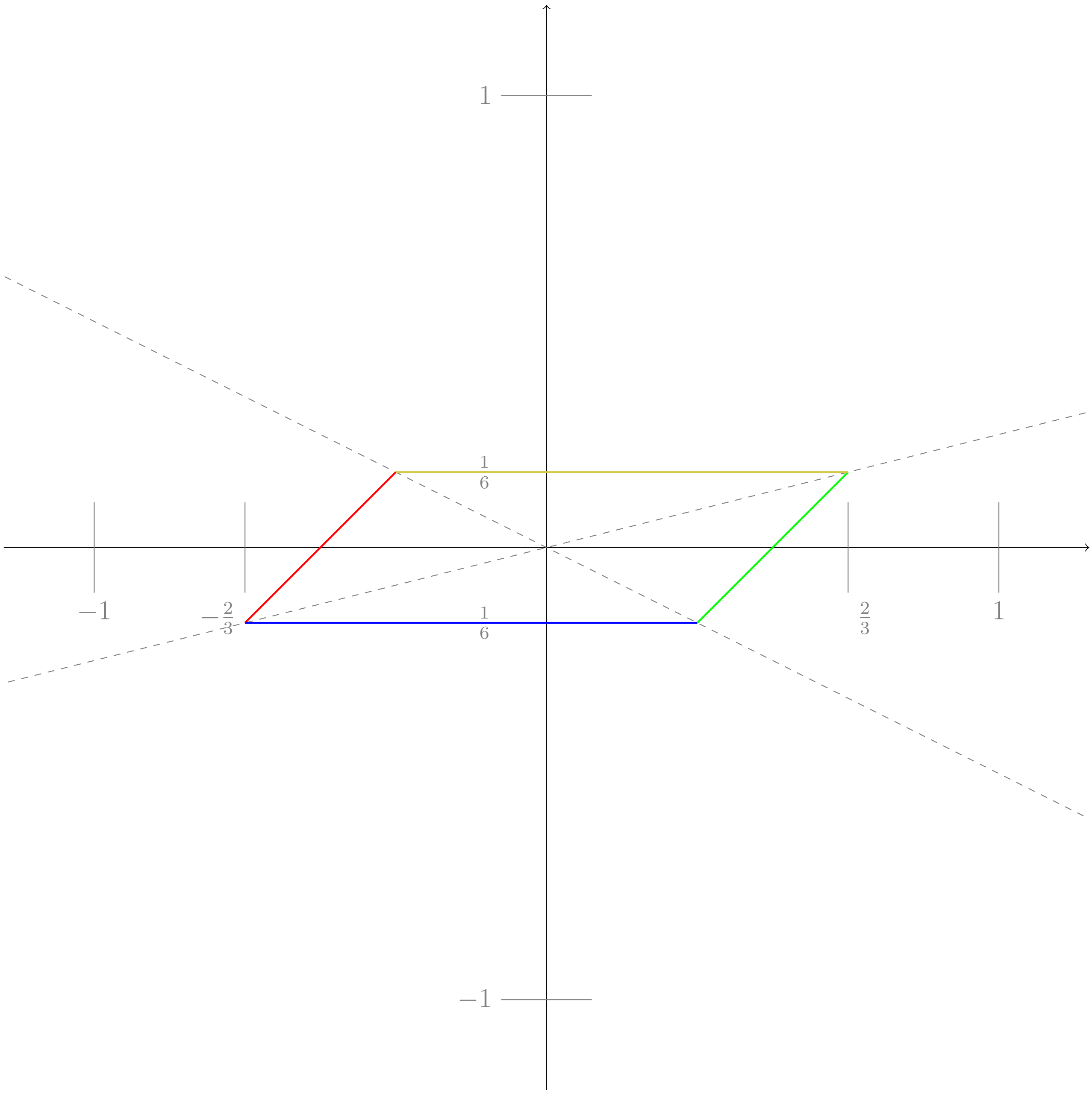
— si $-x+4\,y \leqslant 0$ et $x+2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-x+4\,y)+(x+2\,y) = 1 \iff 2\,x-2\,y = 1\,;$$

— si $-x+4\,y \leqslant 0$ et $x+2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-x+4\,y)-(x+2\,y) = 1 \iff -6\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,x + 2\,y = 1$

en bleu : $-6\,y = 1$

en vert : $2\,x - 2\,y = 1$

en jaune : $6\,y = 1$

**Corrigé 72.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2-y_1-y_2| + |-4\,x_1-4\,x_2+y_1+y_2| \\ &\leqslant |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |-4\,x_1+y_1| + |-4\,x_2+y_2| \\ &\leqslant |x_1-y_1| + |-4\,x_1+y_1| + |x_2-y_2| + |-4\,x_2+y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - y| + |-4\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - y| = |-4\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - y = 0$ et $-4\,x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ -\;4\,x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & - & y & = & 0 & \\ & - & 3\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x-y| + |-4\,x+y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x-y$ et $-4\,x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - y \geqslant 0$ et $-4\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x-y) + (-4\,x+y) = 1 \iff -3\,x = 1\,;$$

— si $x - y \geqslant 0$ et $-4\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x-y) - (-4\,x+y) = 1 \iff 5\,x - 2\,y = 1\,;$$

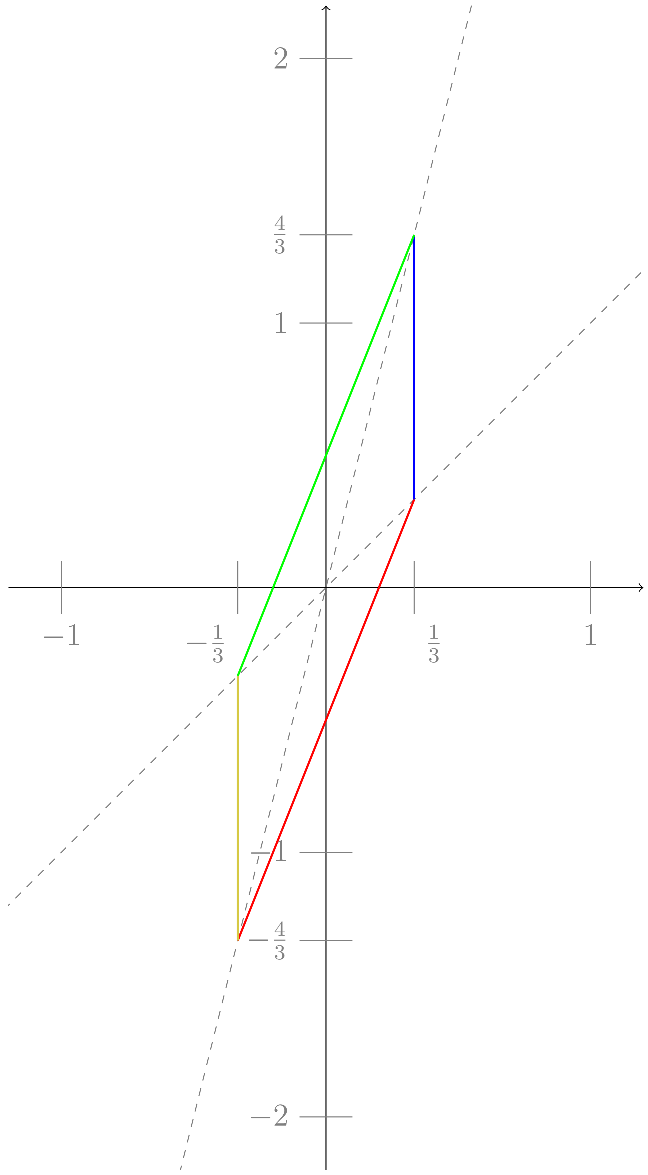
— si $x - y \leqslant 0$ et $-4\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x-y) + (-4\,x+y) = 1 \iff -5\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $x - y \leqslant 0$ et $-4\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x-y) - (-4\,x+y) = 1 \iff 3\,x = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $5\,x - 2\,y = 1$

en bleu : $3\,x = 1$

en vert : $-5\,x + 2\,y = 1$

en jaune : $-3\,x = 1$

**Corrigé 73.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-4\,x_1 - 4\,x_2 + 2\,y_1 + 2\,y_2| + |y_1 + y_2| \\ &\leqslant |-4\,x_1 + 2\,y_1| + |-4\,x_2 + 2\,y_2| + |y_1| + |y_2| \\ &\leqslant |-4\,x_1 + 2\,y_1| + |y_1| + |-4\,x_2 + 2\,y_2| + |y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-4\,x + 2\,y| + |y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-4\,x + 2\,y| = |y| = 0$, ce qui équivaut à : $-4\,x + 2\,y = 0$ et $y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow |-4\,x + 2\,y| + |y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-4\,x + 2\,y$ et $y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-4\,x + 2\,y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow (-4\,x + 2\,y) + (y) = 1 \Longleftrightarrow -4\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $-4\,x + 2\,y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow (-4\,x + 2\,y) - (y) = 1 \Longleftrightarrow -4\,x + y = 1\,;$$

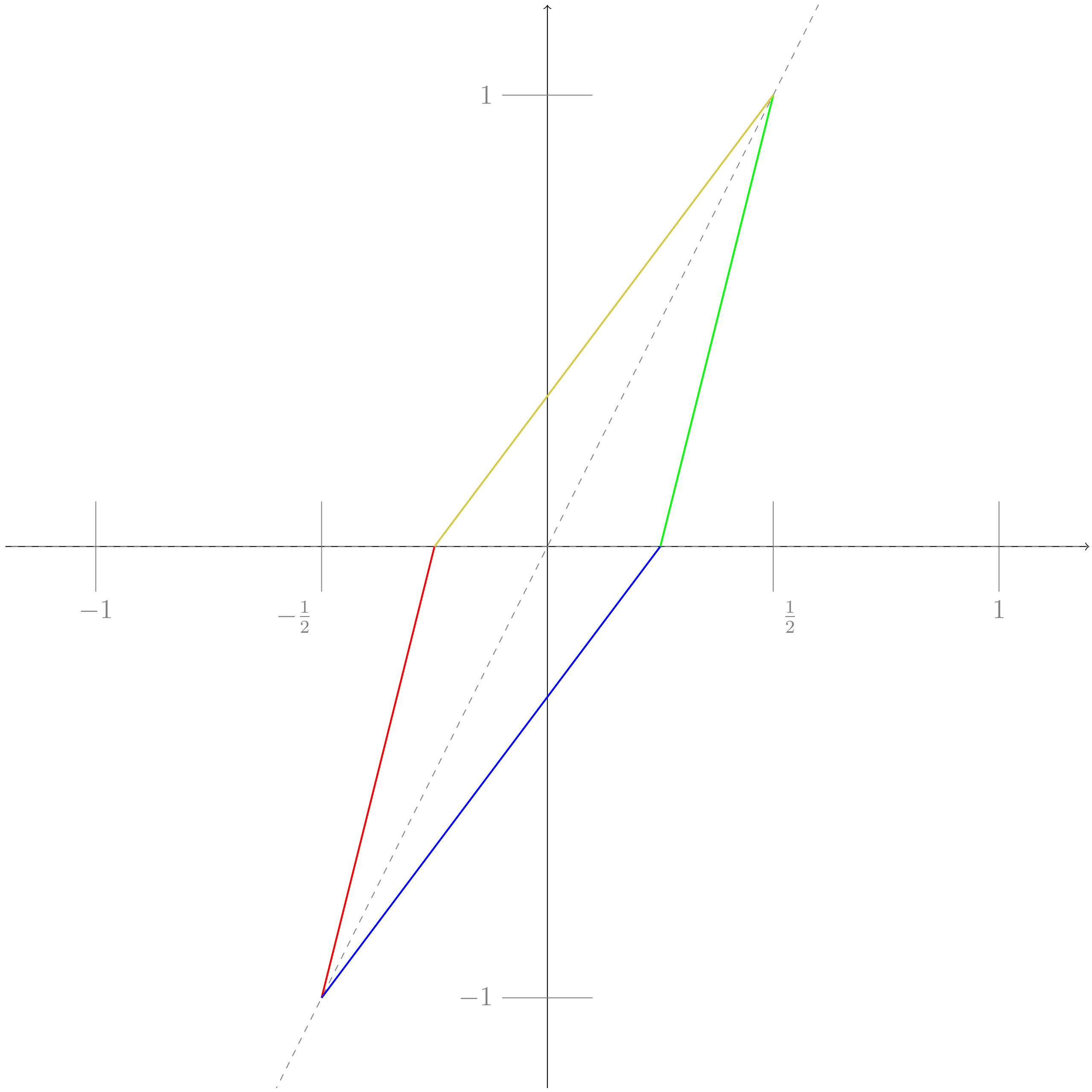
— si $-4\,x + 2\,y \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow -(-4\,x + 2\,y) + (y) = 1 \Longleftrightarrow 4\,x - y = 1\,;$$

— si $-4\,x + 2\,y \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow -(-4\,x + 2\,y) - (y) = 1 \Longleftrightarrow 4\,x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-4\,x + y = 1$

en bleu : $4\,x - 3\,y = 1$

en vert : $4\,x - y = 1$

en jaune : $-4\,x + 3\,y = 1$

**Corrigé 74.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 8

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |2\,x_1+2\,x_2-y_1-y_2| + |x_1+x_2-y_1-y_2| \\ &\leqslant |2\,x_1-y_1| + |2\,x_2-y_2| + |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \\ &\leqslant |2\,x_1-y_1| + |x_1-y_1| + |2\,x_2-y_2| + |x_2-y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,x - y| + |x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,x - y| = |x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,x - y = 0$ et $x - y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 2\,x & - & y & = & 0 & \\ & - & \frac{1}{2}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |2\,x-y| + |x-y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,x-y$ et $x-y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,x - y \geqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (2\,x-y)+(x-y) = 1 \iff 3\,x - 2\,y = 1\,;$$

— si $2\,x - y \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (2\,x-y)-(x-y) = 1 \iff x = 1\,;$$

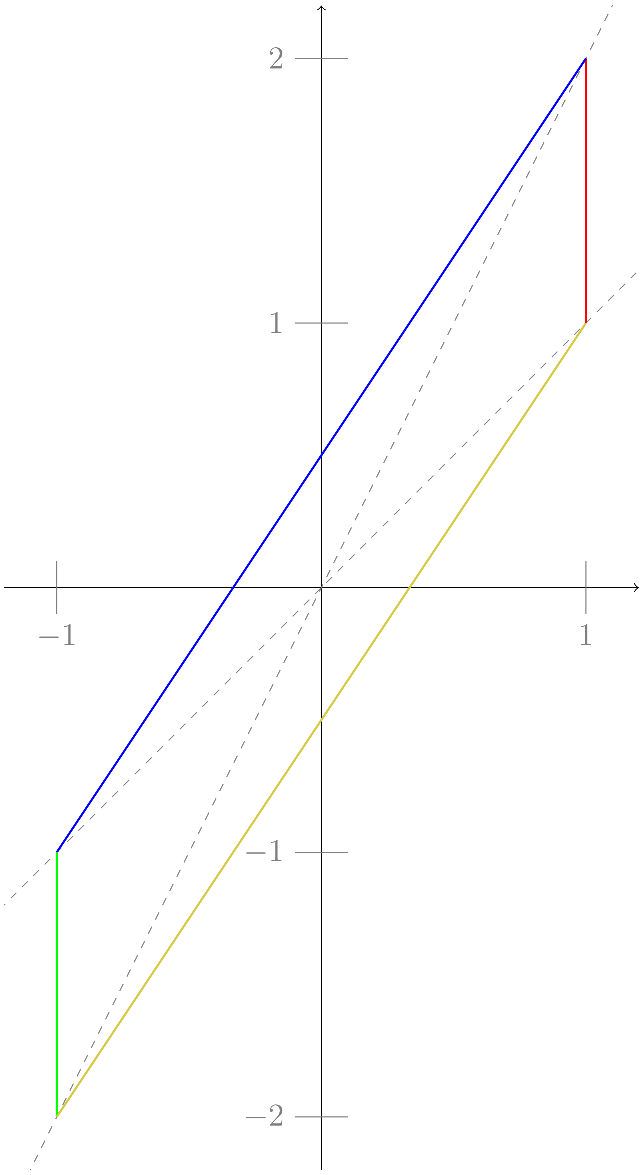
— si $2\,x - y \leqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -\,(2\,x-y)+(x-y) = 1 \iff -x = 1\,;$$

— si $2\,x - y \leqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -\,(2\,x-y)-(x-y) = 1 \iff -3\,x + 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x = 1$

en bleu : $-3\,x + 2\,y = 1$

en vert : $-x = 1$

en jaune : $3\,x - 2\,y = 1$

**Corrigé 75.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |-x_1 - x_2 + 2\,y_1 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |y_2| + |-x_1 + 2\,y_1| + |-x_2 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |-x_1 + 2\,y_1| + |y_2| + |-x_2 + 2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |-x + 2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |-x + 2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $-x + 2\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow |y| + |-x + 2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $-x + 2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $-x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow (y) + (-x + 2\,y) = 1 \Longleftrightarrow -x + 3\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $-x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow (y) - (-x + 2\,y) = 1 \Longleftrightarrow x - y = 1\,;$$

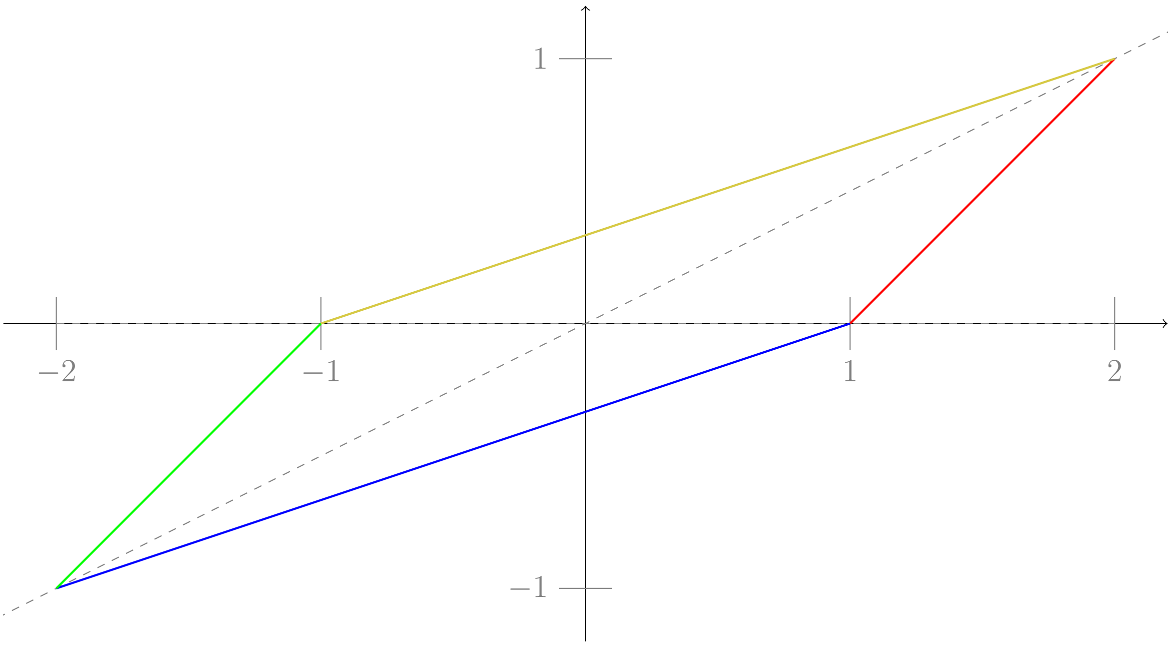
— si $y \leqslant 0$ et $-x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow -(y) + (-x + 2\,y) = 1 \Longleftrightarrow -x + y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $-x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow -(y) - (-x + 2\,y) = 1 \Longleftrightarrow x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - y = 1$

en bleu : $x - 3\,y = 1$

en vert : $-x + y = 1$

en jaune : $-x + 3\,y = 1$

**Corrigé 76.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-x_1 - x_2 + 2\,y_1 + 2\,y_2| + |y_1 + y_2| \\
&\leqslant |-x_1 + 2\,y_1| + |-x_2 + 2\,y_2| + |y_1| + |y_2| \\
&\leqslant |-x_1 + 2\,y_1| + |y_1| + |-x_2 + 2\,y_2| + |y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-x + 2\,y| + |y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-x + 2\,y| = |y| = 0$, ce qui équivaut à : $-x+2\,y = 0$ et $y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |-x + 2\,y| + |y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-x+2\,y$ et $y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-x + 2\,y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-x + 2\,y) + (y) = 1 \iff -x + 3\,y = 1\,;$$

— si $-x + 2\,y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-x + 2\,y) - (y) = 1 \iff -x + y = 1\,;$$

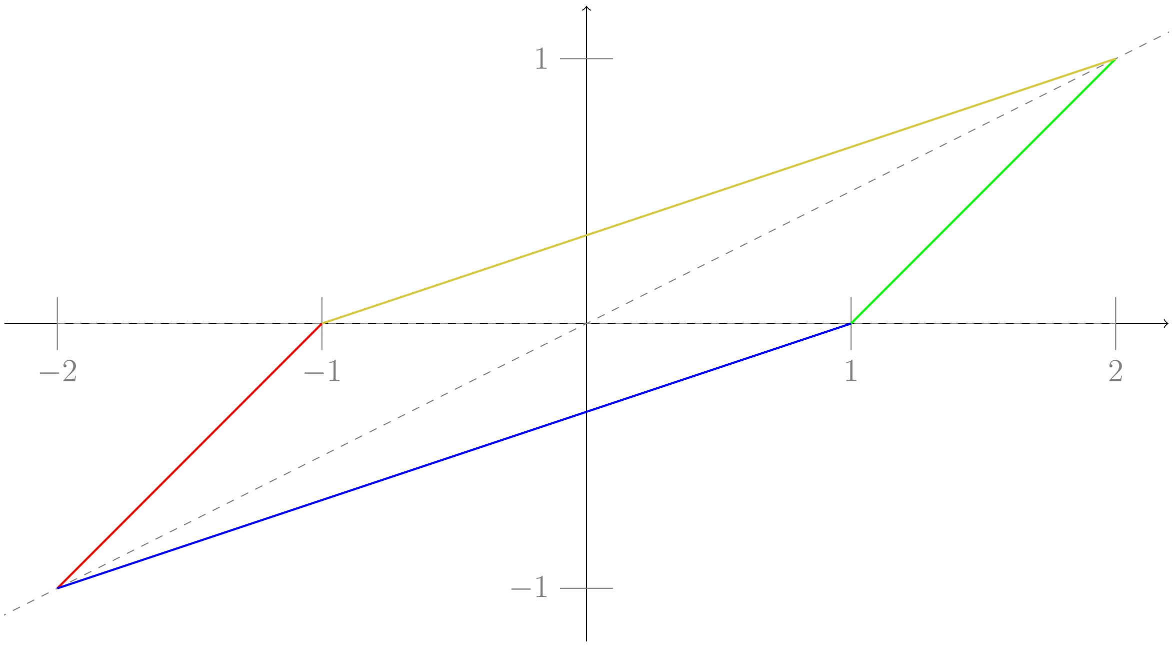
— si $-x + 2\,y \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-x + 2\,y) + (y) = 1 \iff x - y = 1\,;$$

— si $-x + 2\,y \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-x + 2\,y) - (y) = 1 \iff x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + y = 1$ — en bleu : $x - 3\,y = 1$

en vert : $x - y = 1$ — en jaune : $-x + 3\,y = 1$

**Corrigé 77.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |x_1 + x_2 + 2\,y_1 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |y_2| + |x_1 + 2\,y_1| + |x_2 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |x_1 + 2\,y_1| + |y_2| + |x_2 + 2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |x + 2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |x + 2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $x + 2\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |x + 2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $x + 2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (x + 2\,y) = 1 \iff x + 3\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (x + 2\,y) = 1 \iff -x - y = 1\,;$$

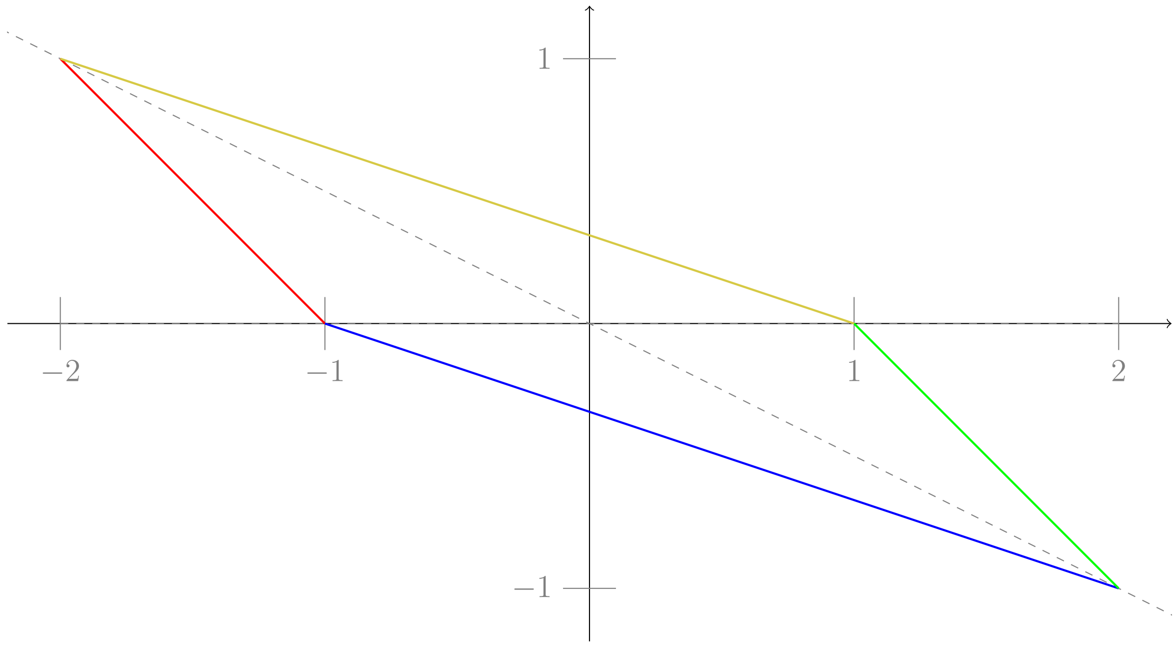
— si $y \leqslant 0$ et $x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) + (x + 2\,y) = 1 \iff x + y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) - (x + 2\,y) = 1 \iff -x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x - y = 1$ en bleu : $-x - 3\,y = 1$

en vert : $x + y = 1$ en jaune : $x + 3\,y = 1$

**Corrigé 78.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |3\,x_1 + 3\,x_2 - 2\,y_1 - 2\,y_2| + |x_1 + x_2| \\
&\leqslant |3\,x_1 - 2\,y_1| + |3\,x_2 - 2\,y_2| + |x_1| + |x_2| \\
&\leqslant |3\,x_1 - 2\,y_1| + |x_1| + |3\,x_2 - 2\,y_2| + |x_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|3\,x - 2\,y| + |x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|3\,x - 2\,y| = |x| = 0$, ce qui équivaut à : $3\,x - 2\,y = 0$ et $x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |3\,x - 2\,y| + |x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $3\,x - 2\,y$ et $x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $3\,x - 2\,y \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,x - 2\,y) + (x) = 1 \iff 4\,x - 2\,y = 1\,;$$

— si $3\,x - 2\,y \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,x - 2\,y) - (x) = 1 \iff 2\,x - 2\,y = 1\,;$$

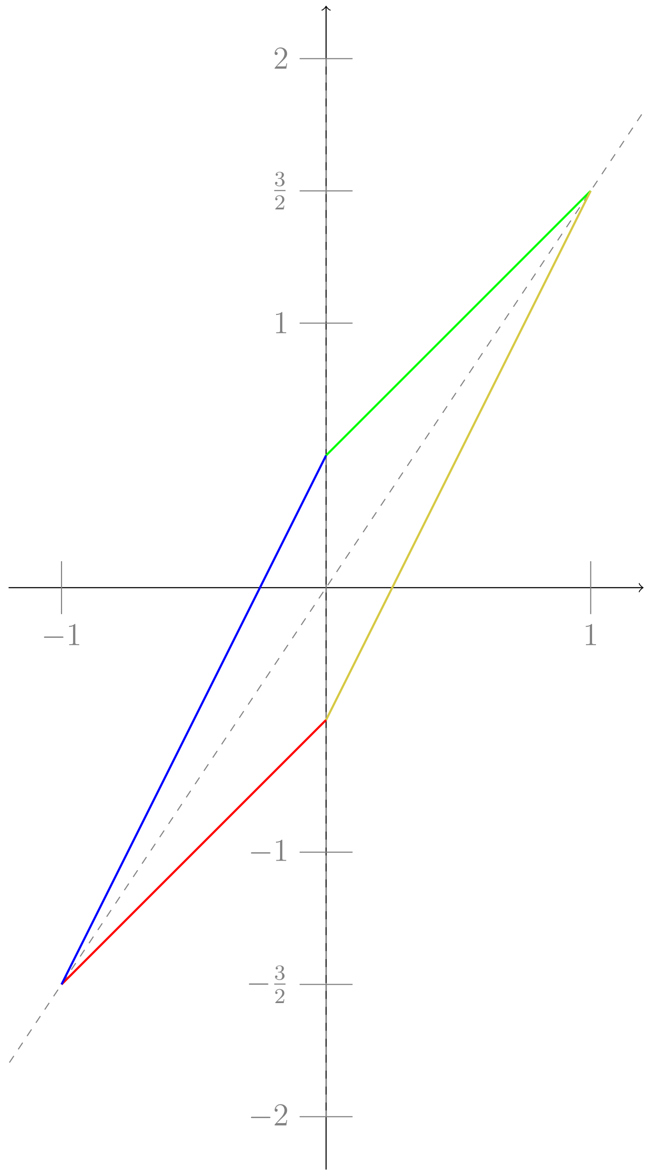
— si $3\,x - 2\,y \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(3\,x - 2\,y) + (x) = 1 \iff -2\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $3\,x - 2\,y \leqslant 0$ et $x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(3\,x - 2\,y) - (x) = 1 \iff -4\,x + 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $2\,x - 2\,y = 1$

en bleu : $-4\,x + 2\,y = 1$

en vert : $-2\,x + 2\,y = 1$

en jaune : $4\,x - 2\,y = 1$

**Corrigé 79.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |5\,x_1 + 5\,x_2 - 2\,y_1 - 2\,y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |5\,x_1 - 2\,y_1| + |5\,x_2 - 2\,y_2| + |2\,x_1 + y_1| + |2\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |5\,x_1 - 2\,y_1| + |2\,x_1 + y_1| + |5\,x_2 - 2\,y_2| + |2\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|5\,x - 2\,y| + |2\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|5\,x - 2\,y| = |2\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $5\,x - 2\,y = 0$ et $2\,x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5\,x & - & 2\,y & = & 0 \\ 2\,x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 5\,x & - & 2\,y & = & 0 & \\ & & \frac{9}{5}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{5} L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |5\,x - 2\,y| + |2\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $5\,x - 2\,y$ et $2\,x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $5\,x - 2\,y \geqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (5\,x - 2\,y) + (2\,x + y) = 1 \iff 7\,x - y = 1\,;$$

— si $5\,x - 2\,y \geqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (5\,x - 2\,y) - (2\,x + y) = 1 \iff 3\,x - 3\,y = 1\,;$$

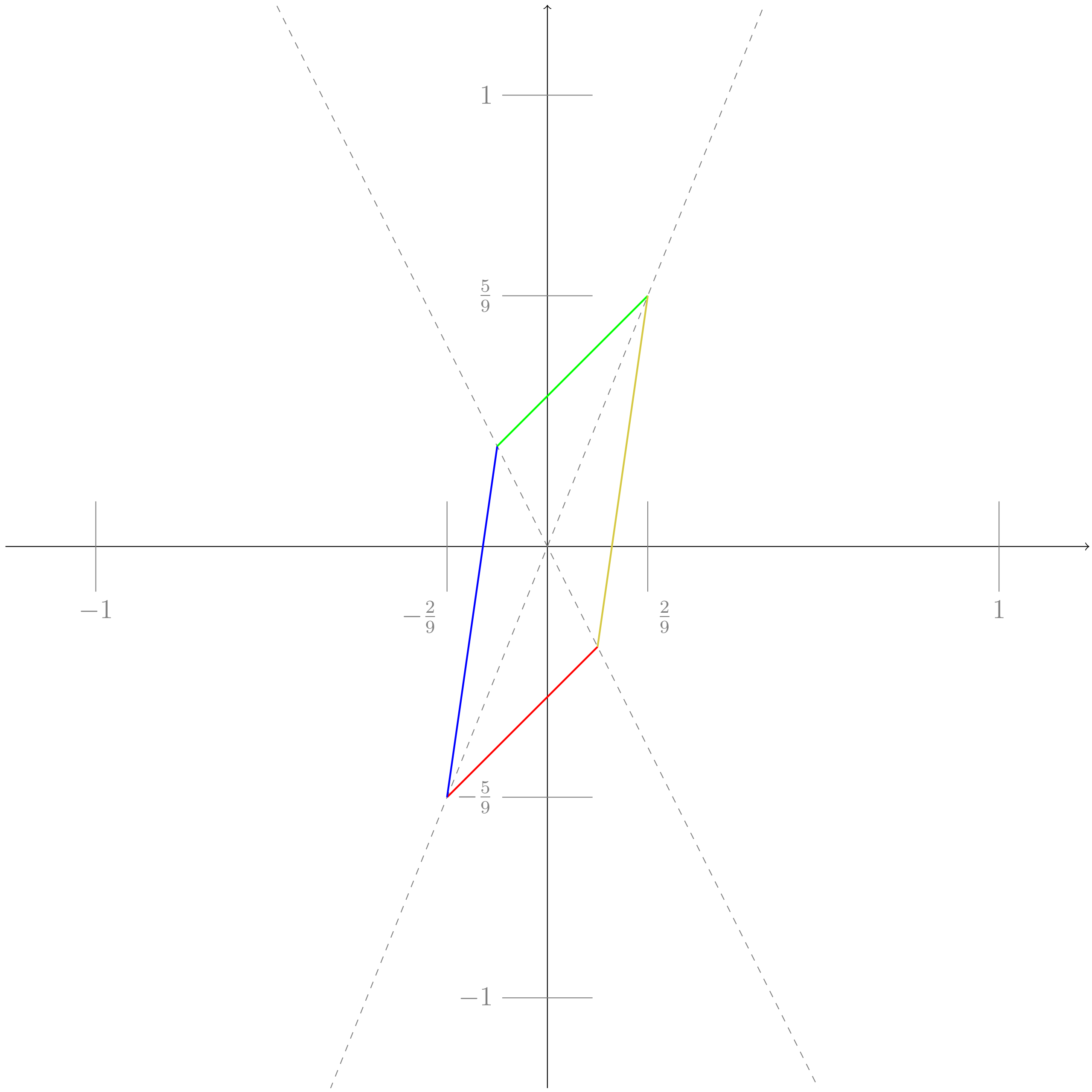
— si $5\,x - 2\,y \leqslant 0$ et $2\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(5\,x - 2\,y) + (2\,x + y) = 1 \iff -3\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $5\,x - 2\,y \leqslant 0$ et $2\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(5\,x - 2\,y) - (2\,x + y) = 1 \iff -7\,x + y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,x - 3\,y = 1$

en bleu : $-7\,x + y = 1$

en vert : $-3\,x + 3\,y = 1$

en jaune : $7\,x - y = 1$

**Corrigé 80.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |3\,y_1+3\,y_2| + |x_1+x_2+4\,y_1+4\,y_2| \\ &\leqslant |3\,y_1| + |3\,y_2| + |x_1+4\,y_1| + |x_2+4\,y_2| \\ &\leqslant |3\,y_1| + |x_1+4\,y_1| + |3\,y_2| + |x_2+4\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|3\,y| + |x + 4\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|3\,y| = |x + 4\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $3\,y = 0$ et $x+4\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff |3\,y| + |x+4\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $3\,y$ et $x + 4\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $3\,y \geqslant 0$ et $x + 4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff (3\,y)+(x+4\,y)=1 \iff x+7\,y=1\,;$$

— si $3\,y \geqslant 0$ et $x + 4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff (3\,y)-(x+4\,y)=1 \iff -x-y=1\,;$$

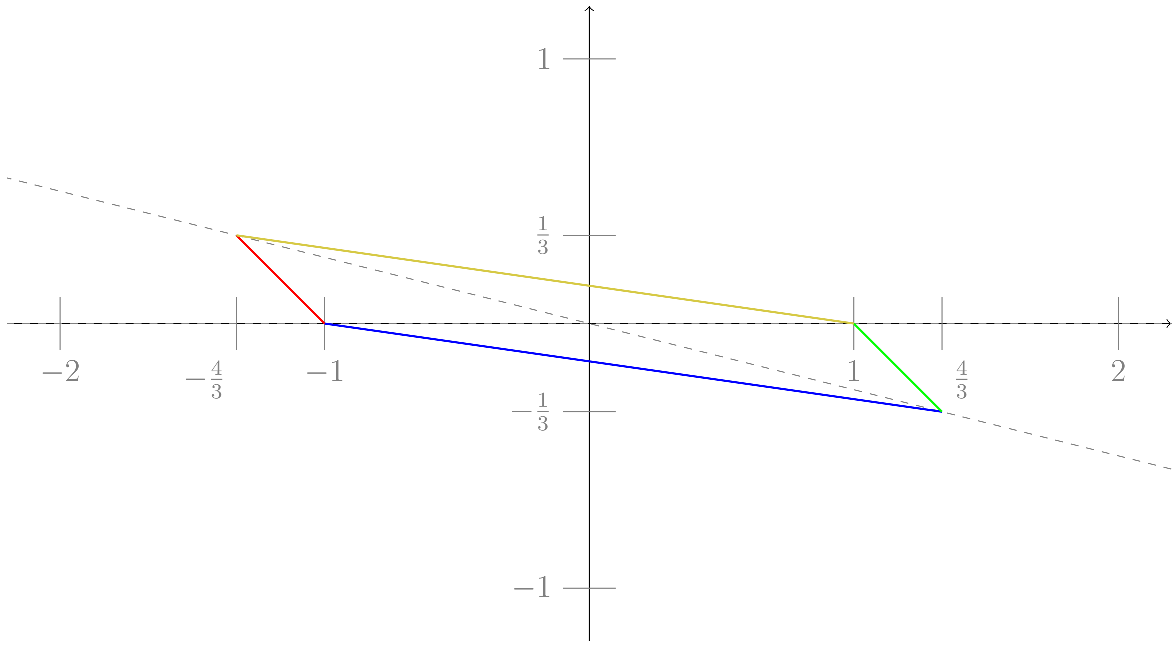
— si $3\,y \leqslant 0$ et $x + 4\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff -(3\,y)+(x+4\,y)=1 \iff x+y=1\,;$$

— si $3\,y \leqslant 0$ et $x + 4\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y)=1 \iff -(3\,y)-(x+4\,y)=1 \iff -x-7\,y=1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x - y = 1$

en bleu : $-x - 7\,y = 1$

en vert : $x + y = 1$

en jaune : $x + 7\,y = 1$

**Corrigé 81.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |-9\,x_1 - 9\,x_2 + y_1 + y_2| + |2\,x_1 + 2\,x_2| \\ &\leqslant |-9\,x_1 + y_1| + |-9\,x_2 + y_2| + |2\,x_1| + |2\,x_2| \\ &\leqslant |-9\,x_1 + y_1| + |2\,x_1| + |-9\,x_2 + y_2| + |2\,x_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-9\,x + y| + |2\,x| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à $0$ : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-9\,x + y| = |2\,x| = 0$, ce qui équivaut à : $-9\,x + y = 0$ et $2\,x = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |-9\,x + y| + |2\,x| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-9\,x + y$ et $2\,x$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-9\,x + y \geqslant 0$ et $2\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-9\,x + y) + (2\,x) = 1 \iff -7\,x + y = 1\,;$$

— si $-9\,x + y \geqslant 0$ et $2\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (-9\,x + y) - (2\,x) = 1 \iff -11\,x + y = 1\,;$$

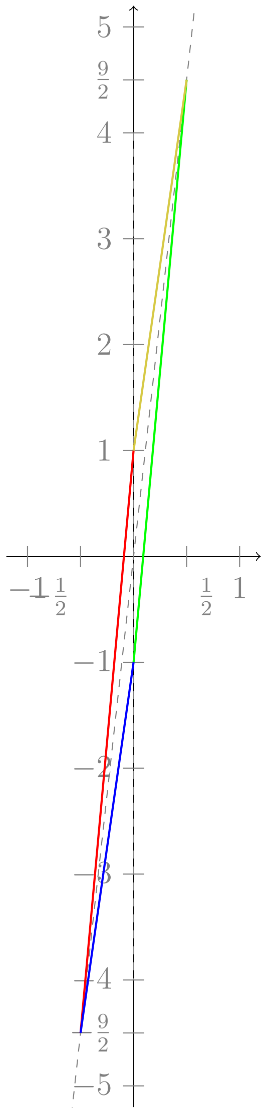
— si $-9\,x + y \leqslant 0$ et $2\,x \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-9\,x + y) + (2\,x) = 1 \iff 11\,x - y = 1\,;$$

— si $-9\,x + y \leqslant 0$ et $2\,x \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(-9\,x + y) - (2\,x) = 1 \iff 7\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-11\,x + y = 1$ — en bleu : $7\,x - y = 1$

en vert : $11\,x - y = 1$ — en jaune : $-7\,x + y = 1$

**Corrigé 82.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |3\,y_1 + 3\,y_2| + |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |3\,y_1| + |3\,y_2| + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &\leqslant |3\,y_1| + |x_1 + y_1| + |3\,y_2| + |x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|3\,y| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|3\,y| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $3\,y = 0$ et $x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |3\,y| + |x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $3\,y$ et $x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $3\,y \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,y) + (x + y) = 1 \iff x + 4\,y = 1\,;$$

— si $3\,y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (3\,y) - (x + y) = 1 \iff -x + 2\,y = 1\,;$$

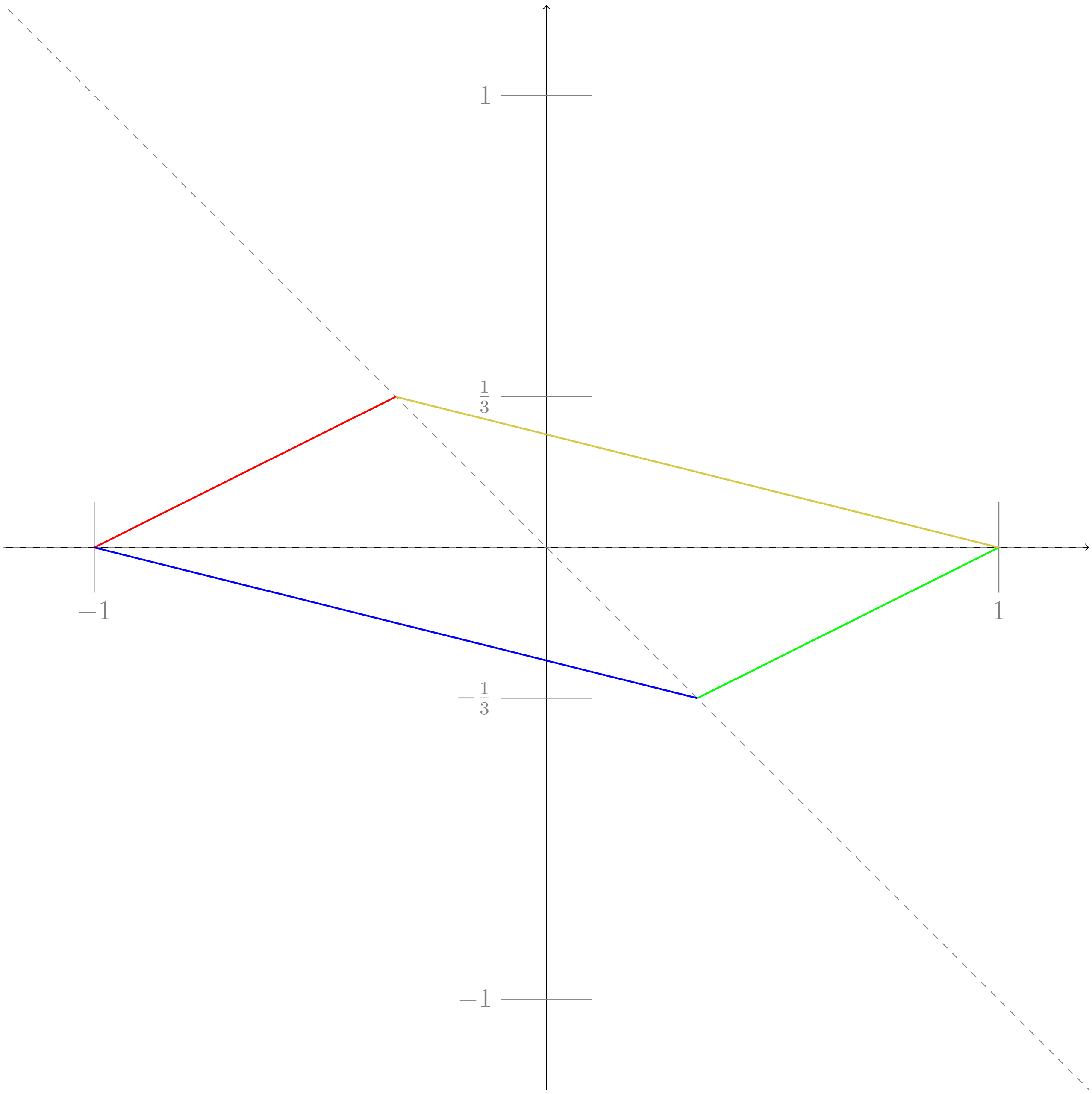
— si $3\,y \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(3\,y) + (x + y) = 1 \iff x - 2\,y = 1\,;$$

— si $3\,y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(3\,y) - (x + y) = 1 \iff -x - 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 2\,y = 1$

en bleu : $-x - 4\,y = 1$

en vert : $x - 2\,y = 1$

en jaune : $x + 4\,y = 1$

**Corrigé 83.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 9

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2+2\,y_1+2\,y_2| + |7\,x_1+7\,x_2+2\,y_1+2\,y_2| \\ &\leqslant |x_1+2\,y_1| + |x_2+2\,y_2| + |7\,x_1+2\,y_1| + |7\,x_2+2\,y_2| \\ &\leqslant |x_1+2\,y_1| + |7\,x_1+2\,y_1| + |x_2+2\,y_2| + |7\,x_2+2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + 2\,y| + |7\,x + 2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + 2\,y| = |7\,x + 2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + 2\,y = 0$ et $7\,x + 2\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2\,y & = & 0 \\ 7\,x & + & 2\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & 2\,y & = & 0 & \\ & - & 12\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x+2\,y| + |7\,x+2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x+2\,y$ et $7\,x+2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + 2\,y \geqslant 0$ et $7\,x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+2\,y) + (7\,x+2\,y) = 1 \iff 8\,x + 4\,y = 1\,;$$

— si $x + 2\,y \geqslant 0$ et $7\,x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x+2\,y) - (7\,x+2\,y) = 1 \iff -6\,x = 1\,;$$

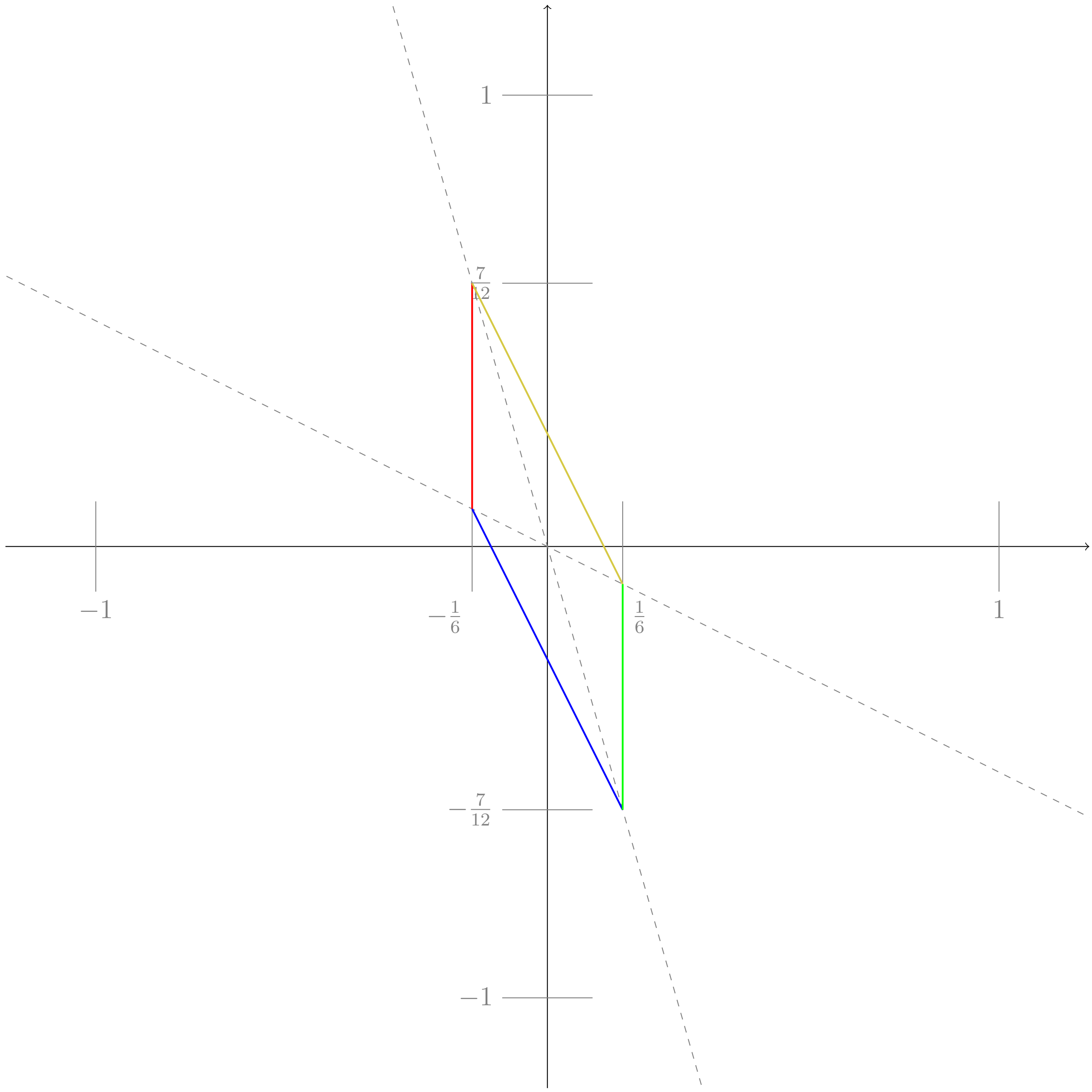
— si $x + 2\,y \leqslant 0$ et $7\,x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+2\,y) + (7\,x+2\,y) = 1 \iff 6\,x = 1\,;$$

— si $x + 2\,y \leqslant 0$ et $7\,x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x+2\,y) - (7\,x+2\,y) = 1 \iff -8\,x - 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-6\,x = 1$

en bleu : $-8\,x - 4\,y = 1$

en vert : $6\,x = 1$

en jaune : $8\,x + 4\,y = 1$

**Corrigé 84.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |5\,x_1 + 5\,x_2 - 3\,y_1 - 3\,y_2| + |y_1 + y_2| \\
&\leqslant |5\,x_1 - 3\,y_1| + |5\,x_2 - 3\,y_2| + |y_1| + |y_2| \\
&\leqslant |5\,x_1 - 3\,y_1| + |y_1| + |5\,x_2 - 3\,y_2| + |y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|5\,x - 3\,y| + |y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|5\,x - 3\,y| = |y| = 0$, ce qui équivaut à : $5\,x - 3\,y = 0$ et $y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |5\,x - 3\,y| + |y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $5\,x - 3\,y$ et $y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $5\,x - 3\,y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (5\,x - 3\,y) + (y) = 1 \iff 5\,x - 2\,y = 1\,;$$

— si $5\,x - 3\,y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (5\,x - 3\,y) - (y) = 1 \iff 5\,x - 4\,y = 1\,;$$

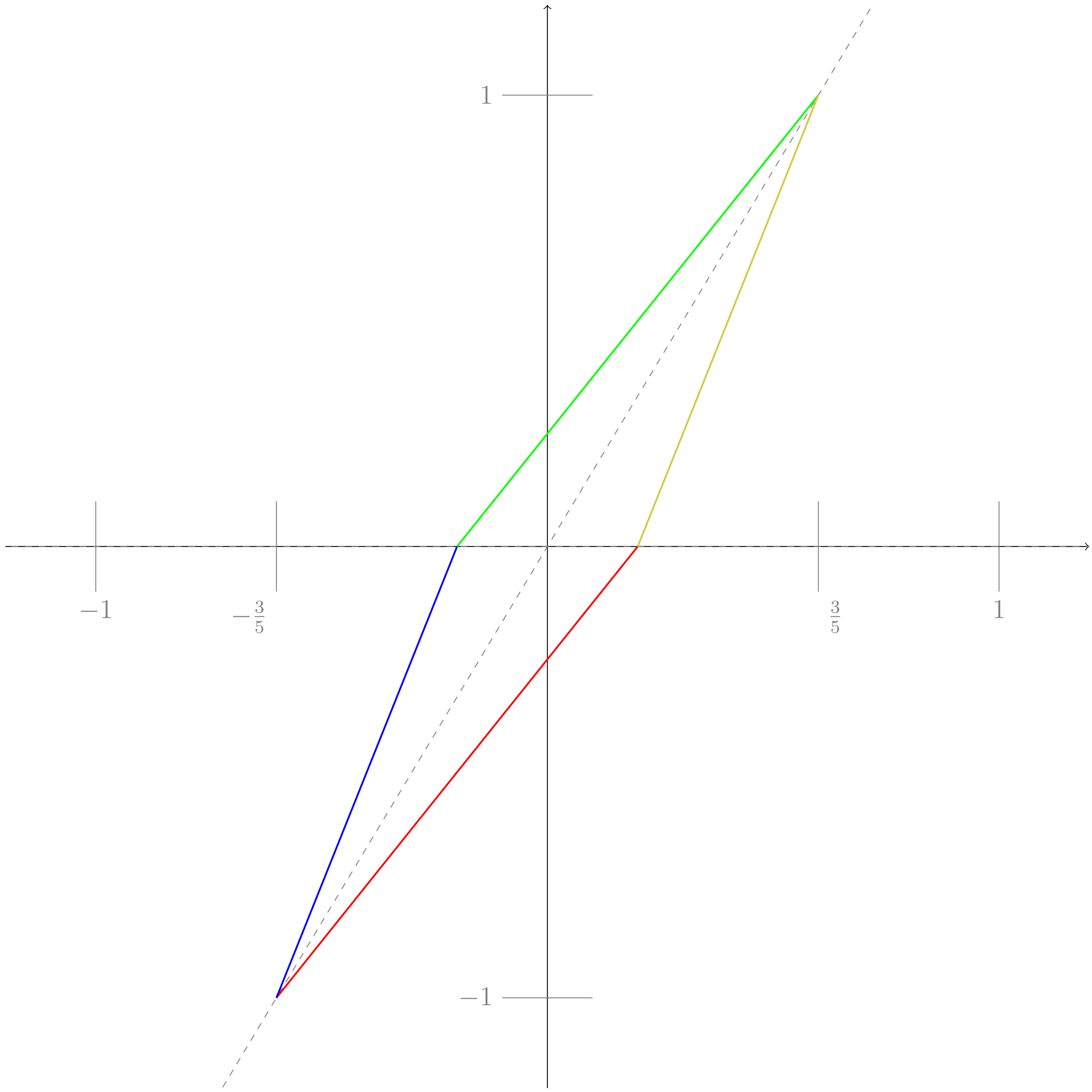
— si $5\,x - 3\,y \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(5\,x - 3\,y) + (y) = 1 \iff -5\,x + 4\,y = 1\,;$$

— si $5\,x - 3\,y \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(5\,x - 3\,y) - (y) = 1 \iff -5\,x + 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $5\,x - 4\,y = 1$

en bleu : $-5\,x + 2\,y = 1$

en vert : $-5\,x + 4\,y = 1$

en jaune : $5\,x - 2\,y = 1$

**Corrigé 85.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |-x_1-x_2+2\,y_1+2\,y_2| + |x_1+x_2-3\,y_1-3\,y_2| \\ &\leqslant |-x_1+2\,y_1| + |-x_2+2\,y_2| + |x_1-3\,y_1| + |x_2-3\,y_2| \\ &\leqslant |-x_1+2\,y_1| + |x_1-3\,y_1| + |-x_2+2\,y_2| + |x_2-3\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1)+\mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-x + 2\,y| + |x - 3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-x + 2\,y| = |x - 3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $-x + 2\,y = 0$ et $x - 3\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & 2\,y & = & 0 \\ x & - & 3\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -x & + & 2\,y & = & 0 & \\ & - & y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |-x+2\,y| + |x-3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-x+2\,y$ et $x-3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-x + 2\,y \geqslant 0$ et $x - 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-x+2\,y) + (x-3\,y) = 1 \iff -y = 1\,;$$

— si $-x + 2\,y \geqslant 0$ et $x - 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-x+2\,y) - (x-3\,y) = 1 \iff -2\,x + 5\,y = 1\,;$$

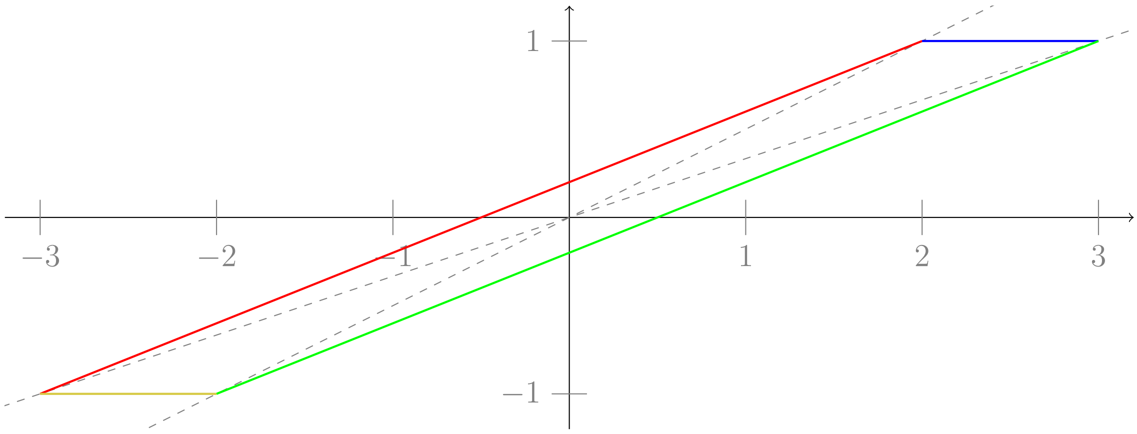
— si $-x + 2\,y \leqslant 0$ et $x - 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-x+2\,y) + (x-3\,y) = 1 \iff 2\,x - 5\,y = 1\,;$$

— si $-x + 2\,y \leqslant 0$ et $x - 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-x+2\,y) - (x-3\,y) = 1 \iff y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-2\,x+5\,y=1$

en bleu : $y=1$

en vert : $2\,x-5\,y=1$

en jaune : $-y=1$

← page 10

**Corrigé 86.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue.

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |10\, y_1 + 10\, y_2| + |4\, x_1 + 4\, x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |10\, y_1| + |10\, y_2| + |4\, x_1 + y_1| + |4\, x_2 + y_2| \\ &\leqslant |10\, y_1| + |4\, x_1 + y_1| + |10\, y_2| + |4\, x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|10\, y| + |4\, x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|10\, y| = |4\, x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $10\, y = 0$ et $4\, x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |10\, y| + |4\, x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $10\, y$ et $4\, x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $10\, y \geqslant 0$ et $4\, x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (10\, y) + (4\, x + y) = 1 \iff 4\, x + 11\, y = 1\,;$$

— si $10\, y \geqslant 0$ et $4\, x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (10\, y) - (4\, x + y) = 1 \iff -4\, x + 9\, y = 1\,;$$

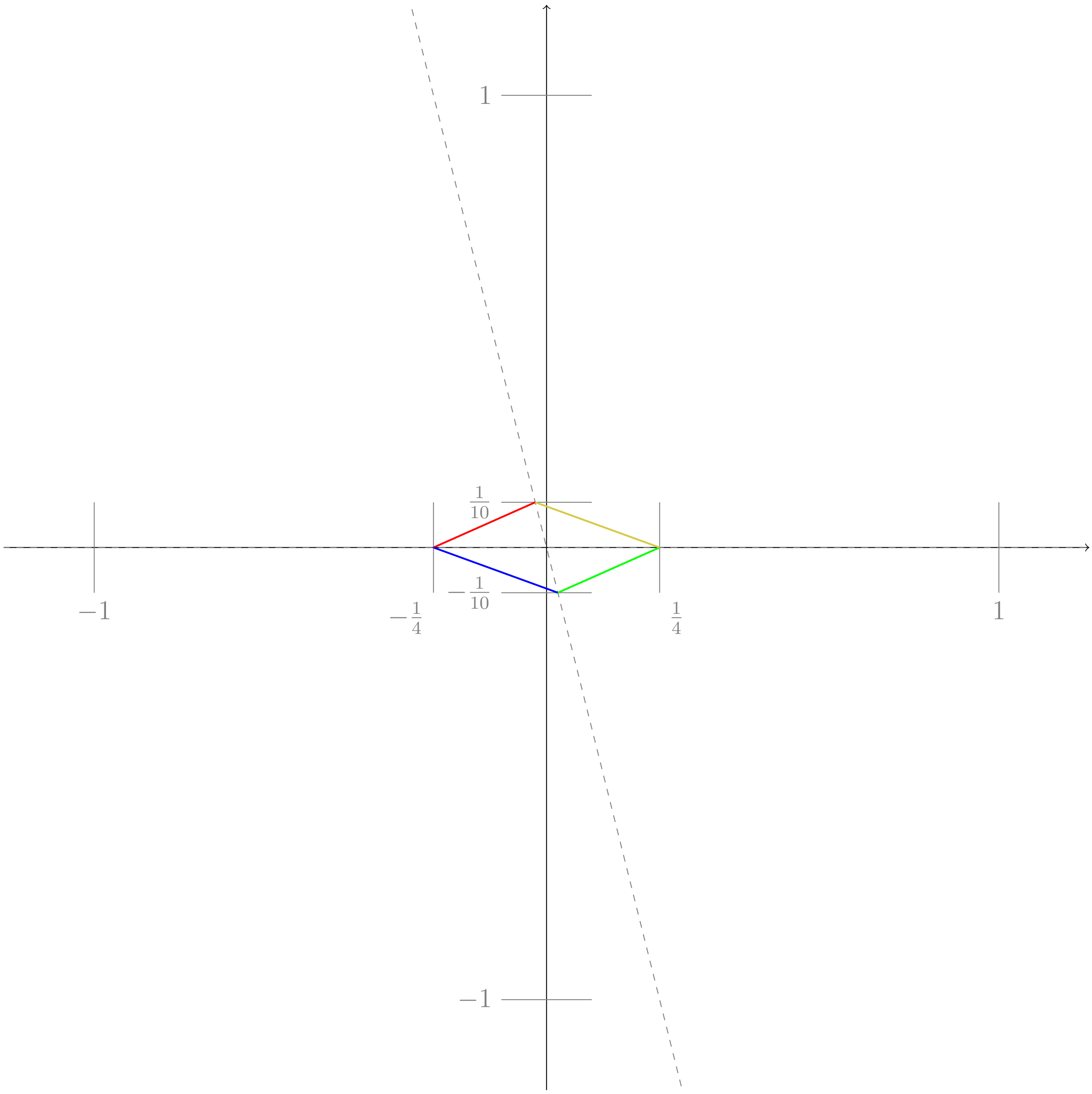
— si $10\, y \leqslant 0$ et $4\, x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(10\, y) + (4\, x + y) = 1 \iff 4\, x - 9\, y = 1\,;$$

— si $10\, y \leqslant 0$ et $4\, x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(10\, y) - (4\, x + y) = 1 \iff -4\, x - 11\, y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-4\,x + 9\,y = 1$

en bleu : $-4\,x - 11\,y = 1$

en vert : $4\,x - 9\,y = 1$

en jaune : $4\,x + 11\,y = 1$

**Corrigé 87.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 + 4\,y_1 + 4\,y_2| + |6\,x_1 + 6\,x_2 + 3\,y_1 + 3\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 + 4\,y_1| + |x_2 + 4\,y_2| + |6\,x_1 + 3\,y_1| + |6\,x_2 + 3\,y_2| \\ &\leqslant |x_1 + 4\,y_1| + |6\,x_1 + 3\,y_1| + |x_2 + 4\,y_2| + |6\,x_2 + 3\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x + 4\,y| + |6\,x + 3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x + 4\,y| = |6\,x + 3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x + 4\,y = 0$ et $6\,x + 3\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 4\,y & = & 0 \\ 6\,x & + & 3\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & 4\,y & = & 0 & \\ & - & 21\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x + 4\,y| + |6\,x + 3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x + 4\,y$ et $6\,x + 3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x + 4\,y \geqslant 0$ et $6\,x + 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + 4\,y) + (6\,x + 3\,y) = 1 \iff 7\,x + 7\,y = 1\,;$$

— si $x + 4\,y \geqslant 0$ et $6\,x + 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x + 4\,y) - (6\,x + 3\,y) = 1 \iff -5\,x + y = 1\,;$$

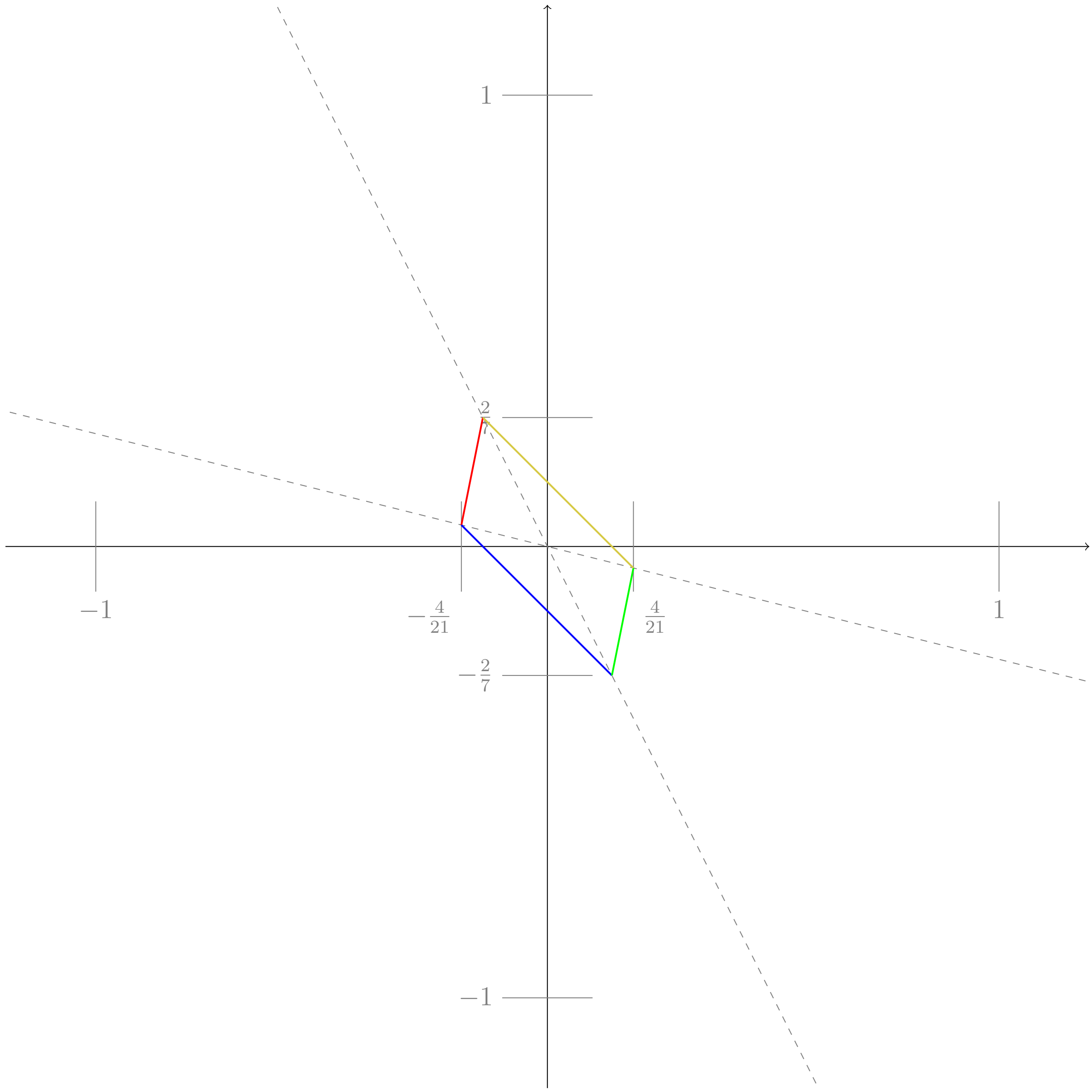
— si $x + 4\,y \leqslant 0$ et $6\,x + 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x + 4\,y) + (6\,x + 3\,y) = 1 \iff 5\,x - y = 1\,;$$

— si $x + 4\,y \leqslant 0$ et $6\,x + 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x + 4\,y) - (6\,x + 3\,y) = 1 \iff -7\,x - 7\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-5\,x + y = 1$

en bleu : $-7\,x - 7\,y = 1$

en vert : $5\,x - y = 1$

en jaune : $7\,x + 7\,y = 1$

**Corrigé 88.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |x_1+x_2-y_1-y_2| + |x_1+x_2-3\,y_1-3\,y_2| \\
&\leqslant |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |x_1-3\,y_1| + |x_2-3\,y_2| \\
&\leqslant |x_1-y_1| + |x_1-3\,y_1| + |x_2-y_2| + |x_2-3\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - y| + |x - 3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - y| = |x - 3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - y = 0$ et $x - 3\,y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & - & 3\,y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & - & y & = & 0 & \\ & - & 2\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |x-y| + |x-3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - y$ et $x - 3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - y \geqslant 0$ et $x - 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x-y) + (x-3\,y) = 1 \iff 2\,x - 4\,y = 1\,;$$

— si $x - y \geqslant 0$ et $x - 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (x-y) - (x-3\,y) = 1 \iff 2\,y = 1\,;$$

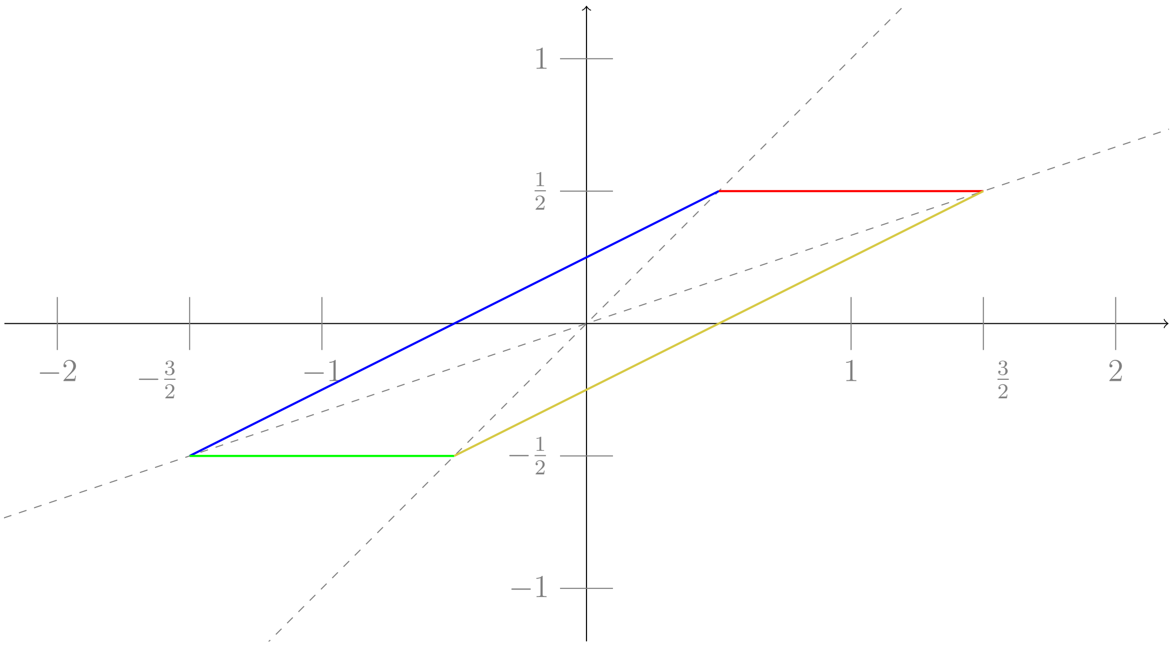
— si $x - y \leqslant 0$ et $x - 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x-y) + (x-3\,y) = 1 \iff -2\,y = 1\,;$$

— si $x - y \leqslant 0$ et $x - 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(x-y) - (x-3\,y) = 1 \iff -2\,x + 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $2\,y = 1$

en bleu : $-2\,x + 4\,y = 1$

en vert : $-2\,y = 1$

en jaune : $2\,x - 4\,y = 1$

**Corrigé 89.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |-3\,x_1 - 3\,x_2 + 5\,y_1 + 5\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |y_2| + |-3\,x_1 + 5\,y_1| + |-3\,x_2 + 5\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |-3\,x_1 + 5\,y_1| + |y_2| + |-3\,x_2 + 5\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |-3\,x + 5\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |-3\,x + 5\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $-3\,x + 5\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |-3\,x + 5\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $-3\,x + 5\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $-3\,x + 5\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (-3\,x + 5\,y) = 1 \iff -3\,x + 6\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $-3\,x + 5\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (-3\,x + 5\,y) = 1 \iff 3\,x - 4\,y = 1\,;$$

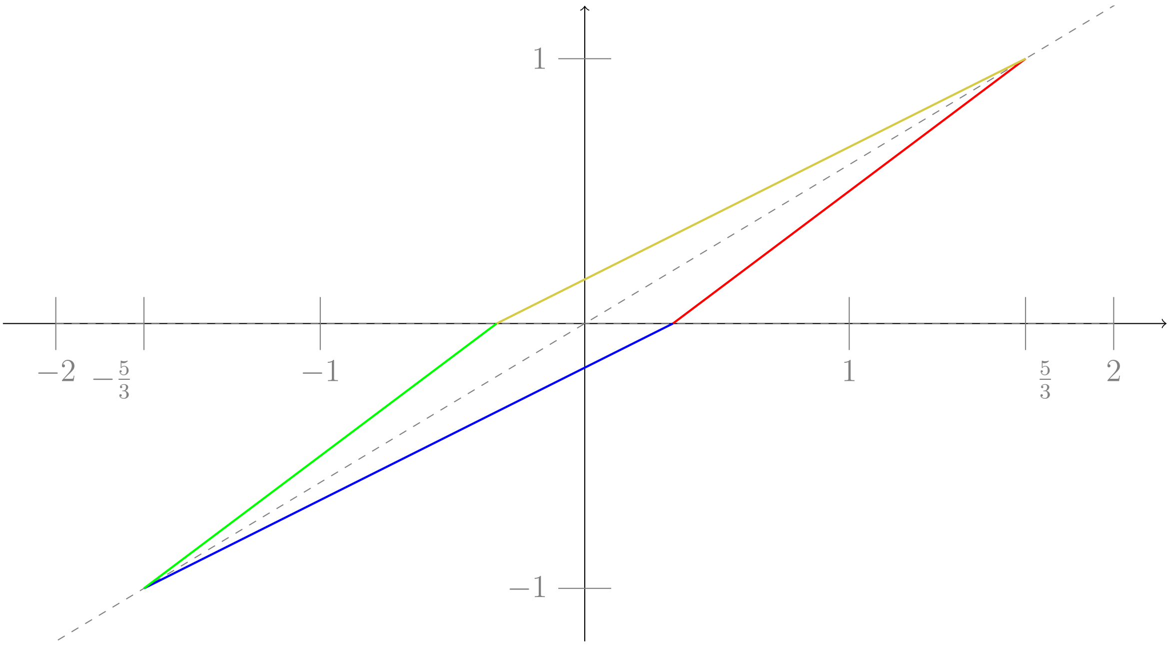
— si $y \leqslant 0$ et $-3\,x + 5\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) + (-3\,x + 5\,y) = 1 \iff -3\,x + 4\,y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $-3\,x + 5\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) - (-3\,x + 5\,y) = 1 \iff 3\,x - 6\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,x - 4\,y = 1$

en bleu : $3\,x - 6\,y = 1$

en vert : $-3\,x + 4\,y = 1$

en jaune : $-3\,x + 6\,y = 1$

**Corrigé 90.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |6\,x_1 + 6\,x_2 + 3\,y_1 + 3\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |y_2| + |6\,x_1 + 3\,y_1| + |6\,x_2 + 3\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |6\,x_1 + 3\,y_1| + |y_2| + |6\,x_2 + 3\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |6\,x + 3\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |6\,x + 3\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $6\,x + 3\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |6\,x + 3\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $6\,x + 3\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $6\,x + 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (6\,x + 3\,y) = 1 \iff 6\,x + 4\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $6\,x + 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (6\,x + 3\,y) = 1 \iff -6\,x - 2\,y = 1\,;$$

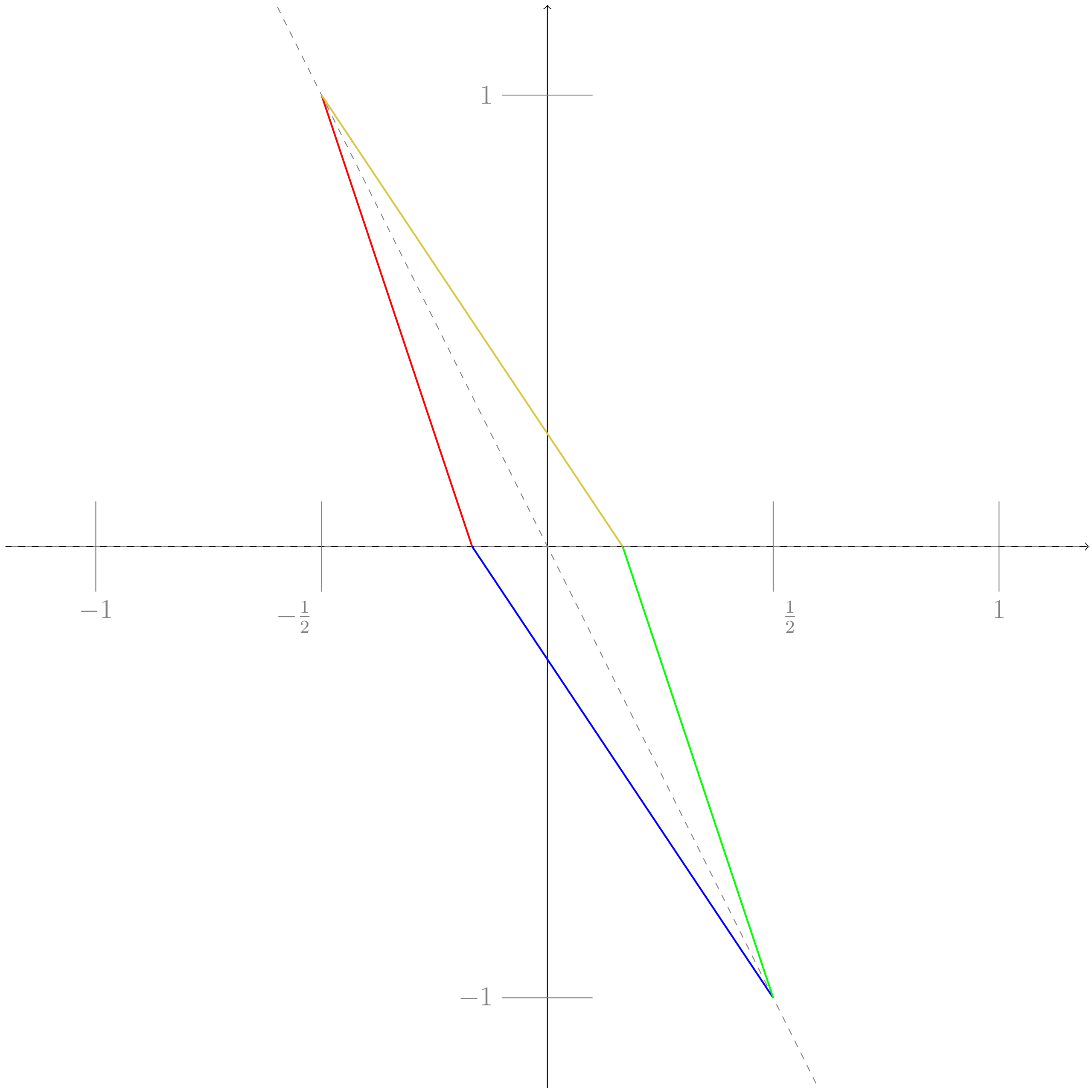
— si $y \leqslant 0$ et $6\,x + 3\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) + (6\,x + 3\,y) = 1 \iff 6\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $6\,x + 3\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) - (6\,x + 3\,y) = 1 \iff -6\,x - 4\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-6\,x - 2\,y = 1$

en bleu : $-6\,x - 4\,y = 1$

en vert : $6\,x + 2\,y = 1$

en jaune : $6\,x + 4\,y = 1$

**Corrigé 91.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |x_1 + x_2 - 2\,y_1 - 2\,y_2| + |-x_1 - x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |x_1 - 2\,y_1| + |x_2 - 2\,y_2| + |-x_1 + y_1| + |-x_2 + y_2| \\ &\leqslant |x_1 - 2\,y_1| + |-x_1 + y_1| + |x_2 - 2\,y_2| + |-x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|x - 2\,y| + |-x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|x - 2\,y| = |-x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $x - 2\,y = 0$ et $-x + y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} & x & - & 2\,y & = 0 \\ - & x & + & y & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2\,y & = & 0 \\ & - & y & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |x - 2\,y| + |-x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $x - 2\,y$ et $-x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $x - 2\,y \geqslant 0$ et $-x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - 2\,y) + (-x + y) = 1 \iff -y = 1\,;$$

— si $x - 2\,y \geqslant 0$ et $-x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (x - 2\,y) - (-x + y) = 1 \iff 2\,x - 3\,y = 1\,;$$

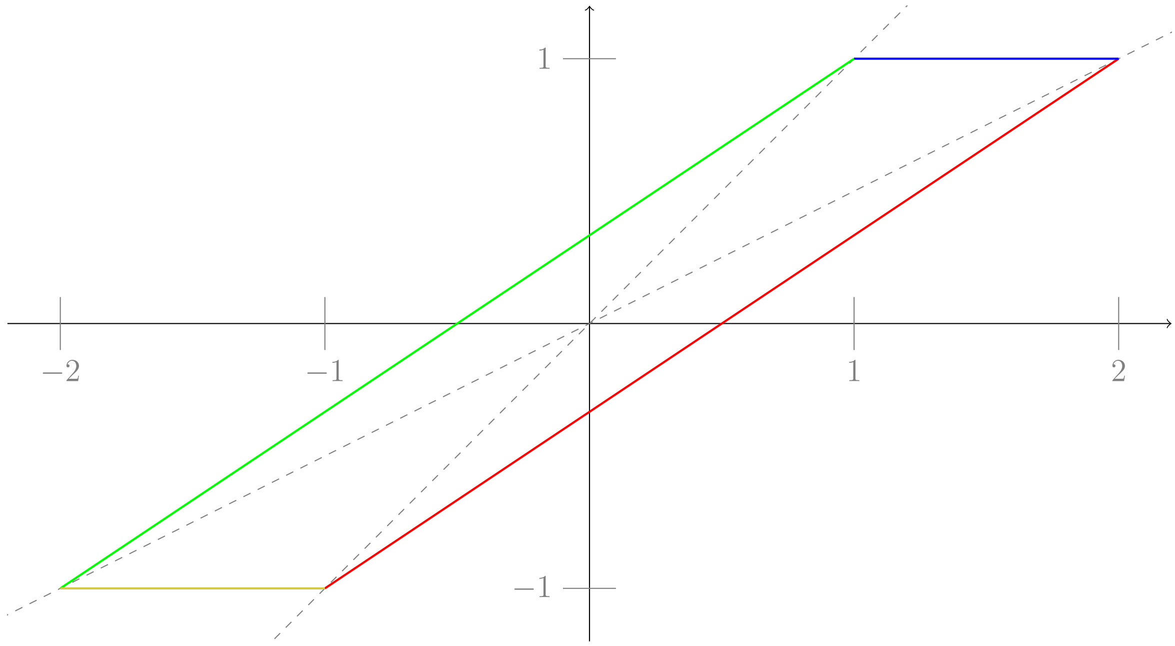
— si $x - 2\,y \leqslant 0$ et $-x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x - 2\,y) + (-x + y) = 1 \iff -2\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $x - 2\,y \leqslant 0$ et $-x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(x - 2\,y) - (-x + y) = 1 \iff y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $2\,x - 3\,y = 1$

en bleu : $y = 1$

en vert : $-2\,x + 3\,y = 1$

en jaune : $-y = 1$

**Corrigé 92.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |-4\,x_1 - 4\,x_2 + y_1 + y_2| + |6\,x_1 + 6\,x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |-4\,x_1 + y_1| + |-4\,x_2 + y_2| + |6\,x_1 + y_1| + |6\,x_2 + y_2| \\ &\leqslant |-4\,x_1 + y_1| + |6\,x_1 + y_1| + |-4\,x_2 + y_2| + |6\,x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-4\,x + y| + |6\,x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-4\,x + y| = |6\,x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $-4\,x + y = 0$ et $6\,x + y = 0$. Or :

$$\begin{cases} -4\,x + y = 0 \\ 6\,x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4\,x + y = 0 \\ \frac{5}{2}\,y = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1) \end{cases}$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |-4\,x + y| + |6\,x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-4\,x+y$ et $6\,x+y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-4\,x + y \geqslant 0$ et $6\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-4\,x + y) + (6\,x + y) = 1 \iff 2\,x + 2\,y = 1\,;$$

— si $-4\,x + y \geqslant 0$ et $6\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-4\,x + y) - (6\,x + y) = 1 \iff -10\,x = 1\,;$$

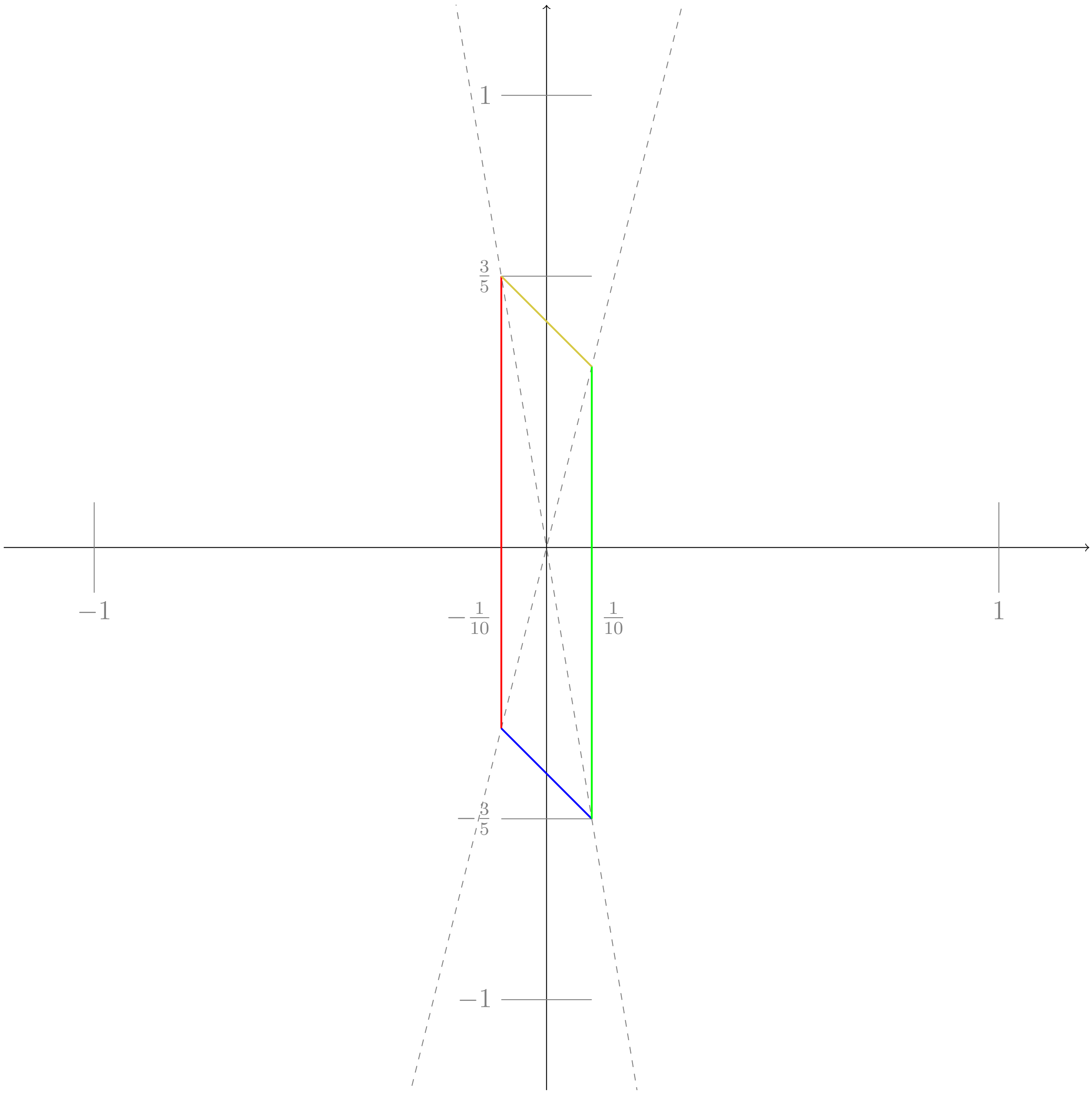
— si $-4\,x + y \leqslant 0$ et $6\,x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-4\,x + y) + (6\,x + y) = 1 \iff 10\,x = 1\,;$$

— si $-4\,x + y \leqslant 0$ et $6\,x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-4\,x + y) - (6\,x + y) = 1 \iff -2\,x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-10\,x = 1$

en bleu : $-2\,x - 2\,y = 1$

en vert : $10\,x = 1$

en jaune : $2\,x + 2\,y = 1$

**Corrigé 93.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 10

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |-x_1 - x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |y_2| + |-x_1 + y_1| + |-x_2 + y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |-x_1 + y_1| + |y_2| + |-x_2 + y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |-x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |-x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $-x+y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |-x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $-x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $-x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (-x + y) = 1 \iff -x + 2\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $-x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (-x + y) = 1 \iff x = 1\,;$$

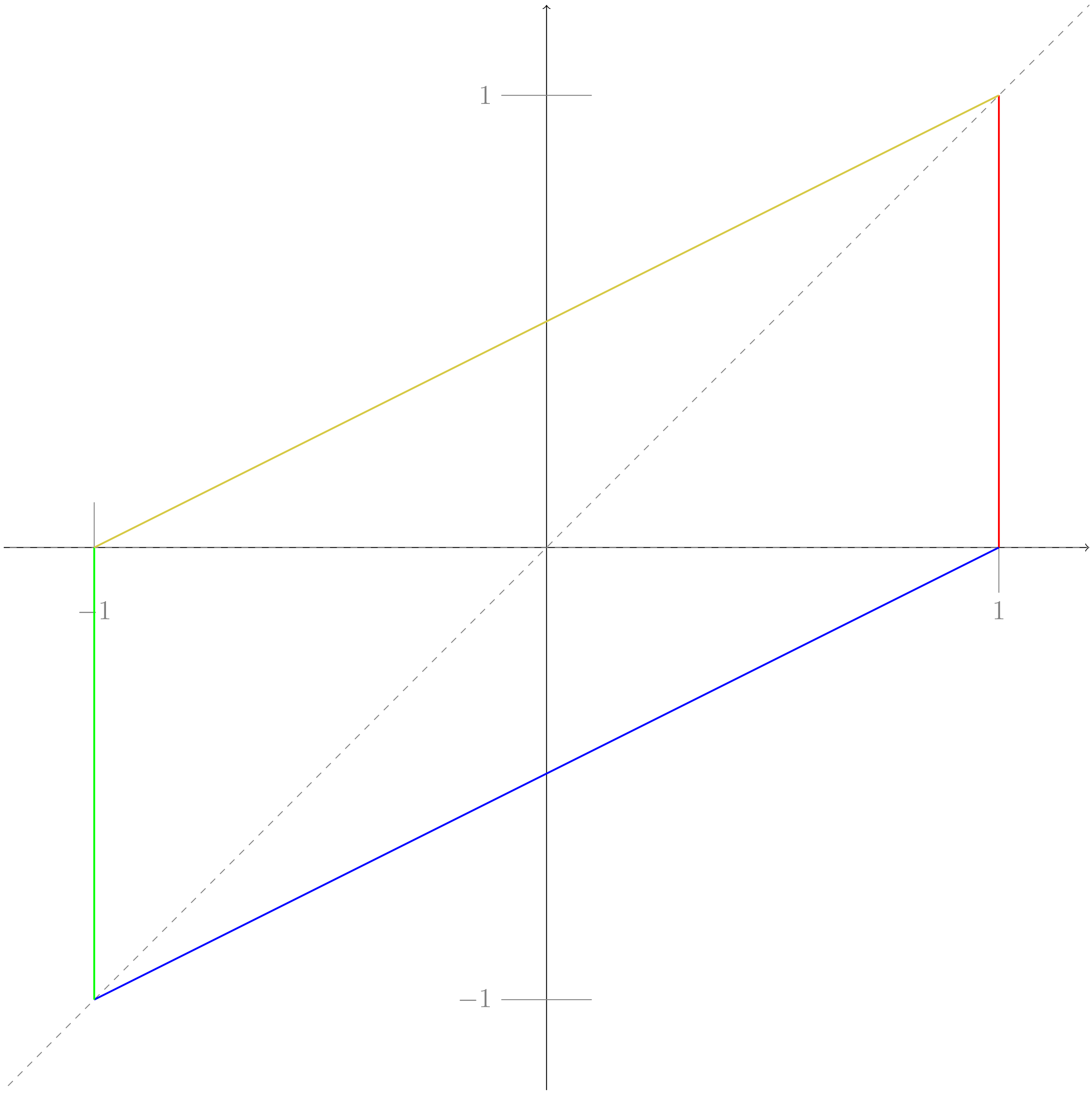
— si $y \leqslant 0$ et $-x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) + (-x + y) = 1 \iff -x = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $-x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) - (-x + y) = 1 \iff x - 2\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x = 1$

en bleu : $x - 2y = 1$

en vert : $-x = 1$

en jaune : $-x + 2y = 1$

**Corrigé 94.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 11

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |4\,x_1 + 4\,x_2| + |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \\
&\leqslant |4\,x_1| + |4\,x_2| + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\
&\leqslant |4\,x_1| + |x_1 + y_1| + |4\,x_2| + |x_2 + y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|4\,x| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|4\,x| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $4\,x = 0$ et $x + y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |4\,x| + |x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $4\,x$ et $x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $4\,x \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (4\,x) + (x + y) = 1 \iff 5\,x + y = 1\,;$$

— si $4\,x \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (4\,x) - (x + y) = 1 \iff 3\,x - y = 1\,;$$

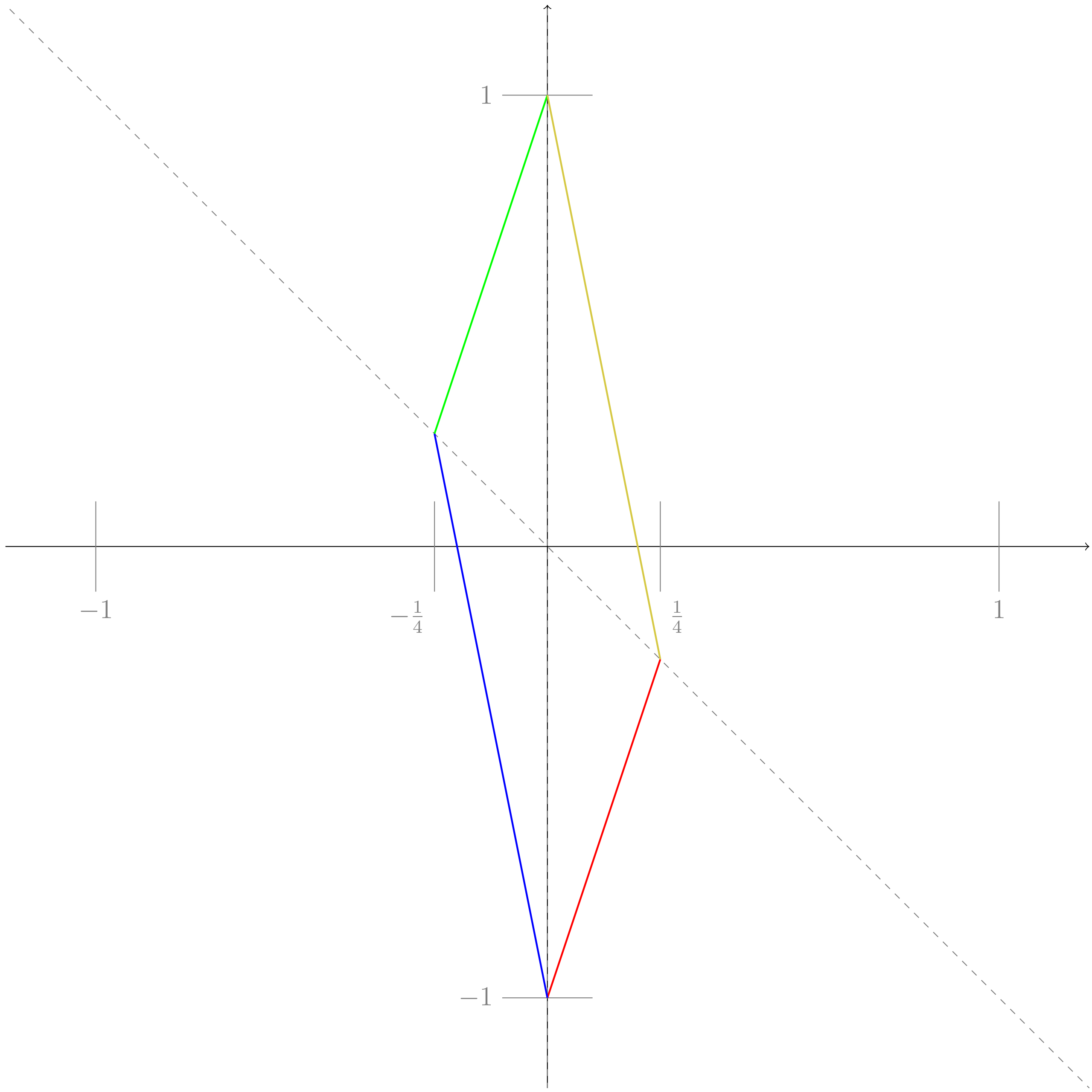
— si $4\,x \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(4\,x) + (x + y) = 1 \iff -3\,x + y = 1\,;$$

— si $4\,x \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(4\,x) - (x + y) = 1 \iff -5\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $3\,x - y = 1$

en bleu : $-5\,x - y = 1$

en vert : $-3\,x + y = 1$

en jaune : $5\,x + y = 1$

**Corrigé 95.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 11

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |2\,y_1 + 2\,y_2| + |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| \\
&\leqslant |2\,y_1| + |2\,y_2| + |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\
&\leqslant |2\,y_1| + |x_1 - y_1| + |2\,y_2| + |x_2 - y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,y| + |x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,y| = |x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,y = 0$ et $x - y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |2\,y| + |x - y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,y$ et $x - y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,y \geqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,y) + (x - y) = 1 \iff x + y = 1\,;$$

— si $2\,y \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,y) - (x - y) = 1 \iff -x + 3\,y = 1\,;$$

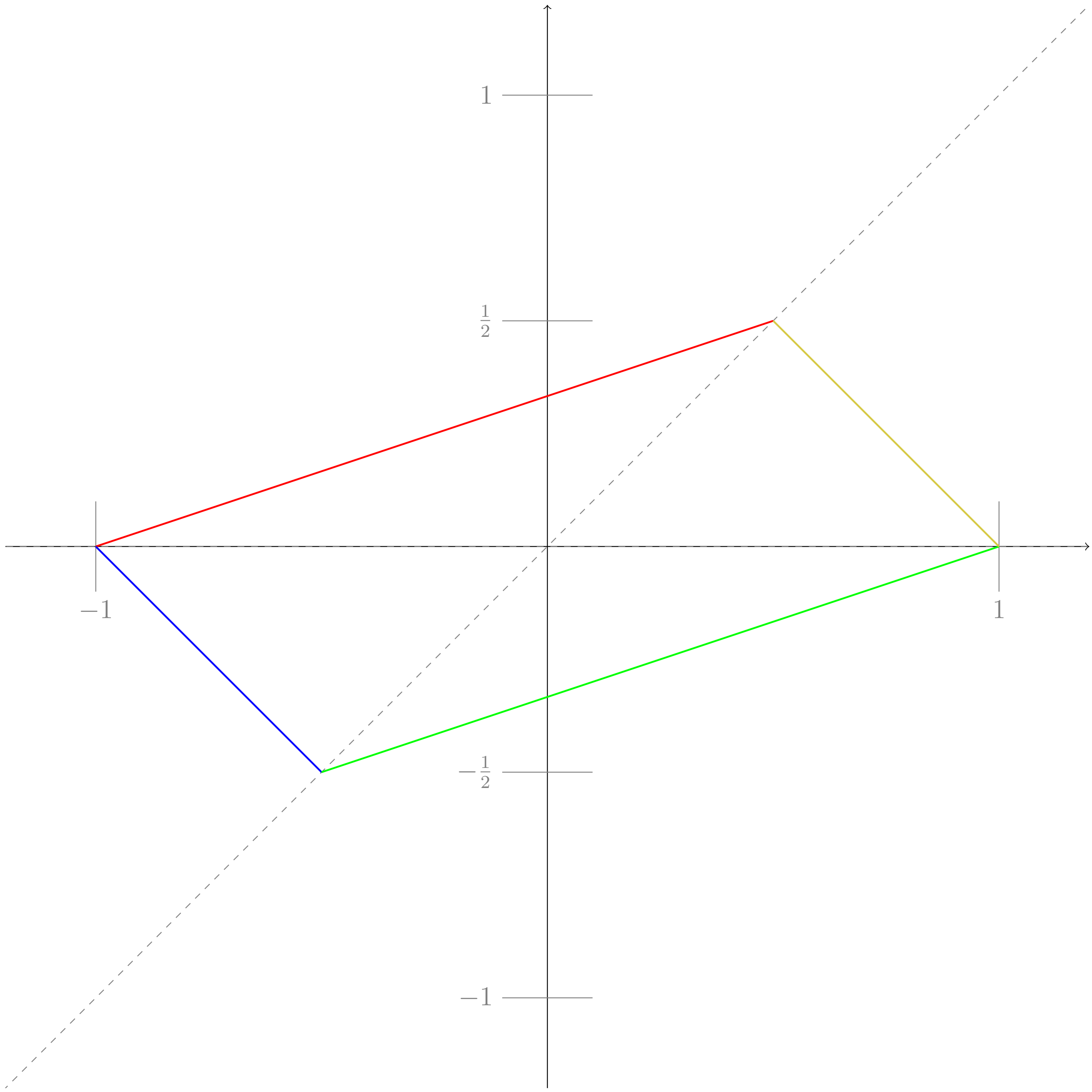
— si $2\,y \leqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(2\,y) + (x - y) = 1 \iff x - 3\,y = 1\,;$$

— si $2\,y \leqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(2\,y) - (x - y) = 1 \iff -x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 3\,y = 1$

en bleu : $-x - y = 1$

en vert : $x - 3\,y = 1$

en jaune : $x + y = 1$

**Corrigé 96.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 11

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |x_1 + x_2 + 2\,y_1 + 2\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |y_2| + |x_1 + 2\,y_1| + |x_2 + 2\,y_2| \\
&\leqslant |y_1| + |x_1 + 2\,y_1| + |y_2| + |x_2 + 2\,y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |x + 2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |x + 2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $x + 2\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |x + 2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $x + 2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (x + 2\,y) = 1 \iff x + 3\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (x + 2\,y) = 1 \iff -x - y = 1\,;$$

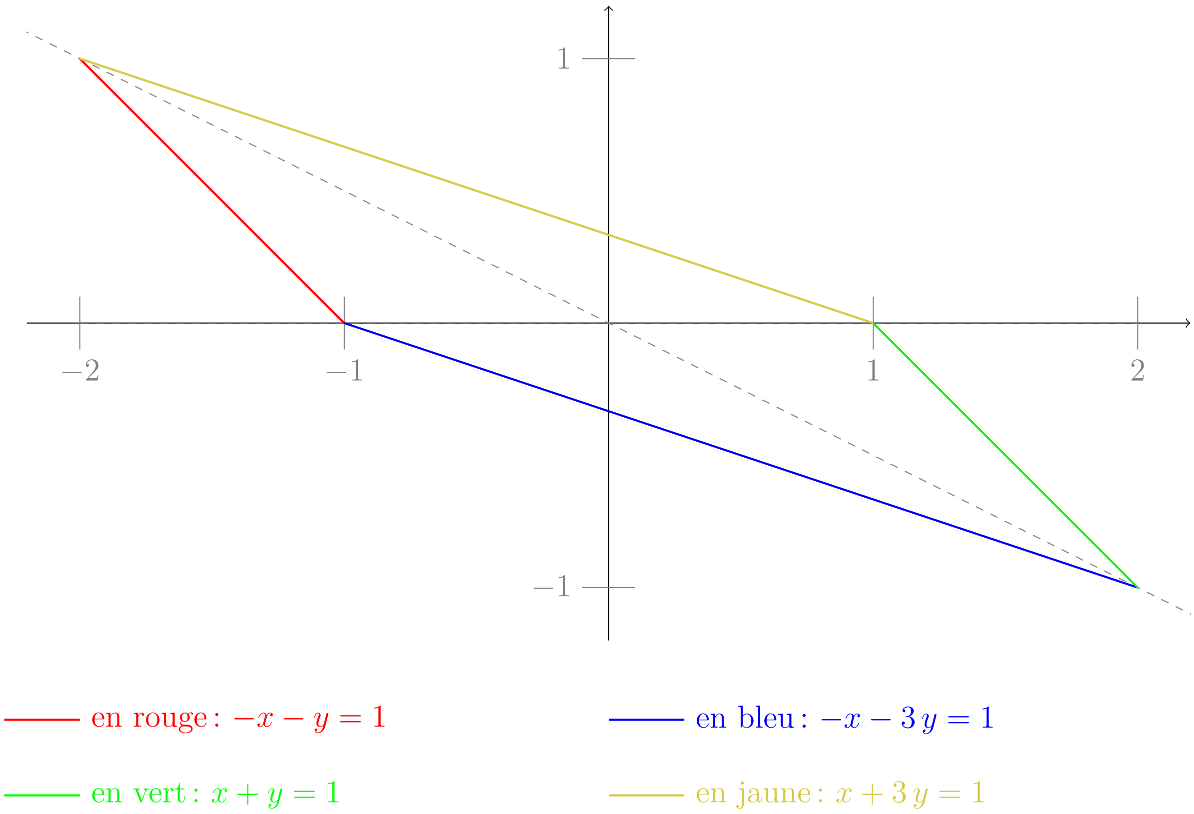
— si $y \leqslant 0$ et $x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(y) + (x + 2\,y) = 1 \iff x + y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(y) - (x + 2\,y) = 1 \iff -x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.


1
−1
−2
−1
1
2
en rouge : $-x - y = 1$
en bleu : $-x - 3\,y = 1$
en vert : $x + y = 1$
en jaune : $x + 3\,y = 1$

**Corrigé 97.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 11

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |y_1 + y_2| + |-4\,x_1 - 4\,x_2 + 2\,y_1 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |y_2| + |-4\,x_1 + 2\,y_1| + |-4\,x_2 + 2\,y_2| \\ &\leqslant |y_1| + |-4\,x_1 + 2\,y_1| + |y_2| + |-4\,x_2 + 2\,y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|y| + |-4\,x + 2\,y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|y| = |-4\,x + 2\,y| = 0$, ce qui équivaut à : $y = 0$ et $-4\,x + 2\,y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |y| + |-4\,x + 2\,y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $y$ et $-4\,x + 2\,y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $y \geqslant 0$ et $-4\,x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) + (-4\,x + 2\,y) = 1 \iff -4\,x + 3\,y = 1\,;$$

— si $y \geqslant 0$ et $-4\,x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (y) - (-4\,x + 2\,y) = 1 \iff 4\,x - y = 1\,;$$

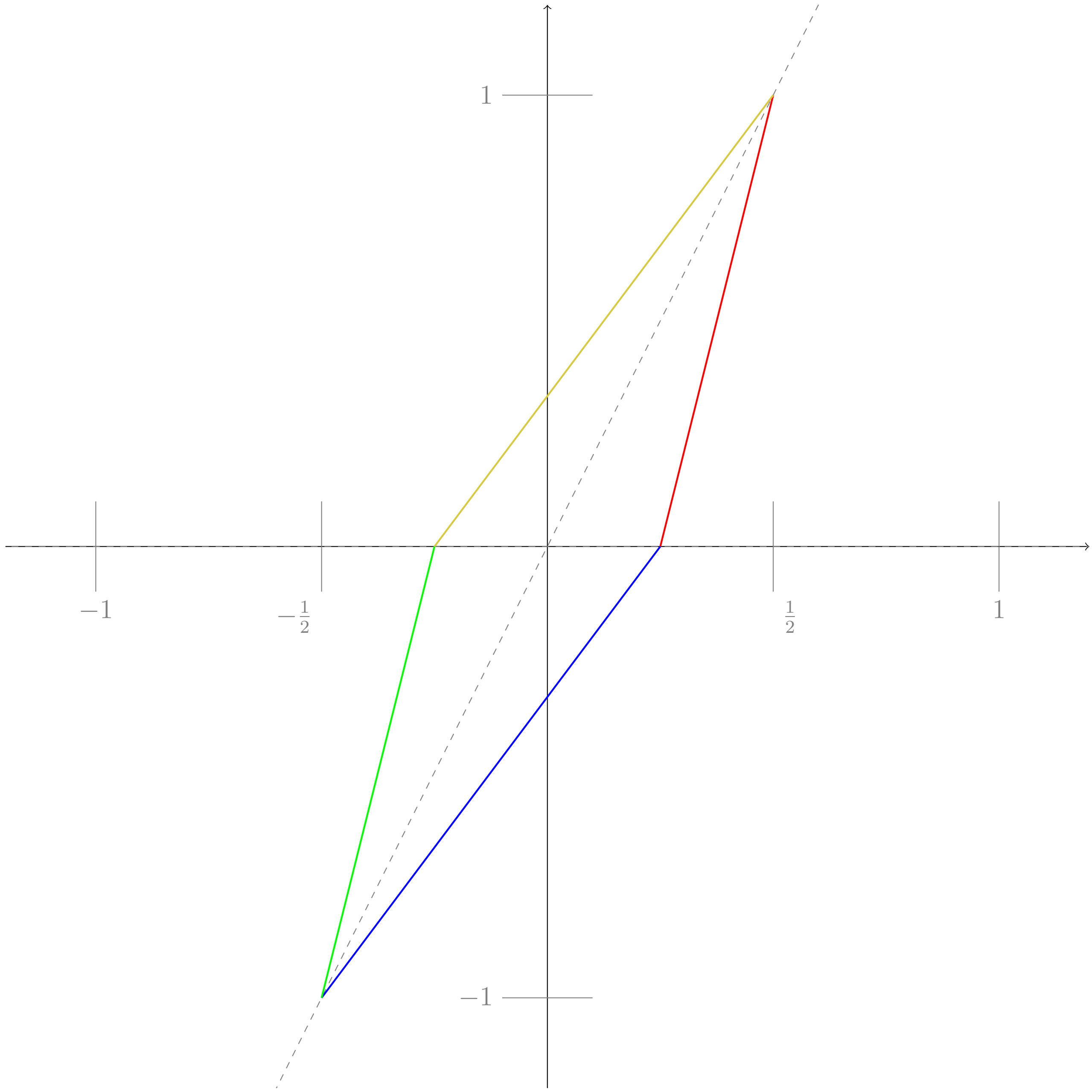
— si $y \leqslant 0$ et $-4\,x + 2\,y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) + (-4\,x + 2\,y) = 1 \iff -4\,x + y = 1\,;$$

— si $y \leqslant 0$ et $-4\,x + 2\,y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -(y) - (-4\,x + 2\,y) = 1 \iff 4\,x - 3\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $4\,x - y = 1$

en bleu : $4\,x - 3\,y = 1$

en vert : $-4\,x + y = 1$

en jaune : $-4\,x + 3\,y = 1$

**Corrigé 98.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 11

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) &= |2\,x_1 + 2\,x_2| + |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \\
&\leqslant |2\,x_1| + |2\,x_2| + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\
&\leqslant |2\,x_1| + |x_1 + y_1| + |2\,x_2| + |x_2 + y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1, y_1) + \mathrm{N}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|2\,x| + |x + y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|2\,x| = |x + y| = 0$, ce qui équivaut à : $2\,x = 0$ et $x+y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff |2\,x| + |x + y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $2\,x$ et $x + y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $2\,x \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,x) + (x + y) = 1 \iff 3\,x + y = 1\,;$$

— si $2\,x \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff (2\,x) - (x + y) = 1 \iff x - y = 1\,;$$

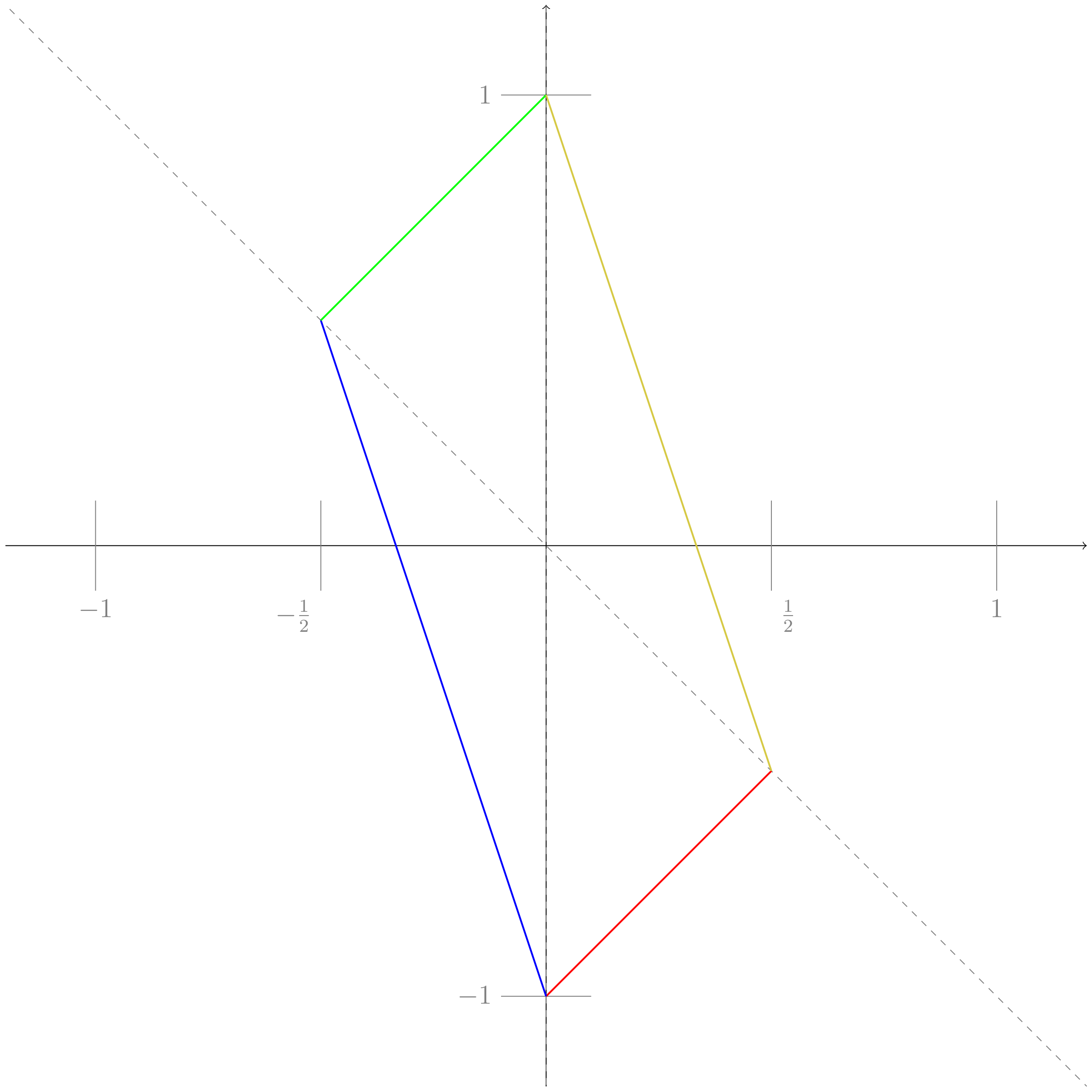
— si $2\,x \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(2\,x) + (x + y) = 1 \iff -x + y = 1\,;$$

— si $2\,x \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x, y) = 1 \iff -\,(2\,x) - (x + y) = 1 \iff -3\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $x - y = 1$

en bleu : $-3\,x - y = 1$

en vert : $-x + y = 1$

en jaune : $3\,x + y = 1$

**Corrigé 99.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 11

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |5\,x_1+5\,x_2+2\,y_1+2\,y_2| + |x_1+x_2-y_1-y_2| \\
&\leqslant |5\,x_1+2\,y_1| + |5\,x_2+2\,y_2| + |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \\
&\leqslant |5\,x_1+2\,y_1| + |x_1-y_1| + |5\,x_2+2\,y_2| + |x_2-y_2| \\
&= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|5\,x + 2\,y| + |x - y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|5\,x + 2\,y| = |x - y| = 0$, ce qui équivaut à : $5\,x + 2\,y = 0$ et $x - y = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 5\,x & + & 2\,y & = & 0 & \\ & - & \frac{7}{5}\,y & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{5}L_1) \end{array}\right.$$

donc $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0{,}0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |5\,x+2\,y| + |x-y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $5\,x+2\,y$ et $x-y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $5\,x + 2\,y \geqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (5\,x+2\,y) + (x-y) = 1 \iff 6\,x + y = 1\,;$$

— si $5\,x + 2\,y \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (5\,x+2\,y) - (x-y) = 1 \iff 4\,x + 3\,y = 1\,;$$

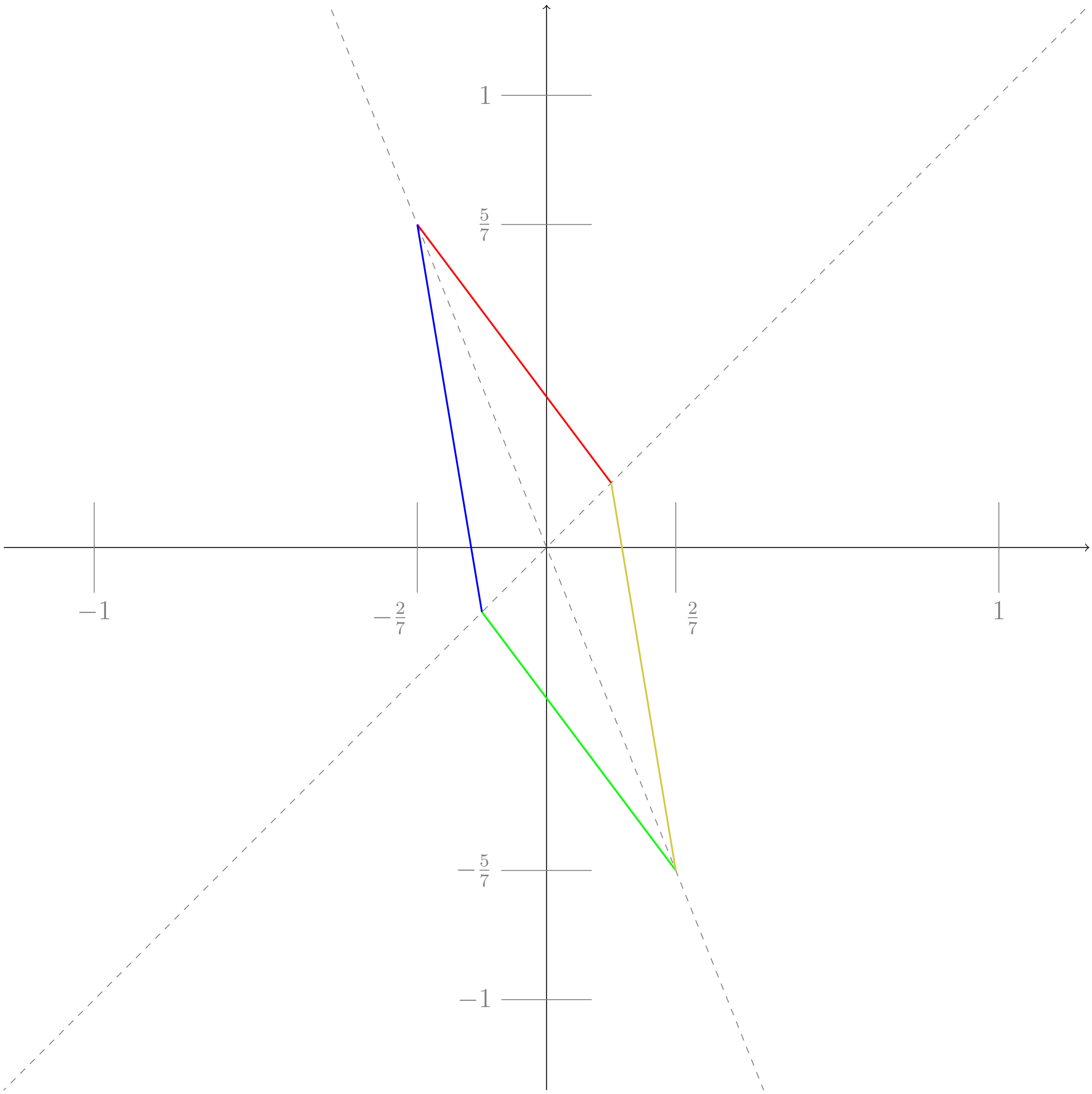
— si $5\,x + 2\,y \leqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(5\,x+2\,y) + (x-y) = 1 \iff -4\,x - 3\,y = 1\,;$$

— si $5\,x + 2\,y \leqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ : dans ce cas,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(5\,x+2\,y) - (x-y) = 1 \iff -6\,x - y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $4\,x + 3\,y = 1$

en bleu : $-6\,x - y = 1$

en vert : $-4\,x - 3\,y = 1$

en jaune : $6\,x + y = 1$

**Corrigé 100.** La positivité de N est évidente : elle est définie comme une somme de valeurs absolues. De même, son homogénéité est immédiatement conséquence de l'homogénéité de la valeur absolue. ← page 11

Montrons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, nous allons utiliser le fait que la valeur absolue la vérifie. Pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \mathrm{N}\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= |-x_1 - x_2 + 5\,y_1 + 5\,y_2| + |y_1 + y_2| \\ &\leqslant |-x_1 + 5\,y_1| + |-x_2 + 5\,y_2| + |y_1| + |y_2| \\ &\leqslant |-x_1 + 5\,y_1| + |y_1| + |-x_2 + 5\,y_2| + |y_2| \\ &= \mathrm{N}(x_1,y_1) + \mathrm{N}(x_2,y_2), \end{aligned}$$

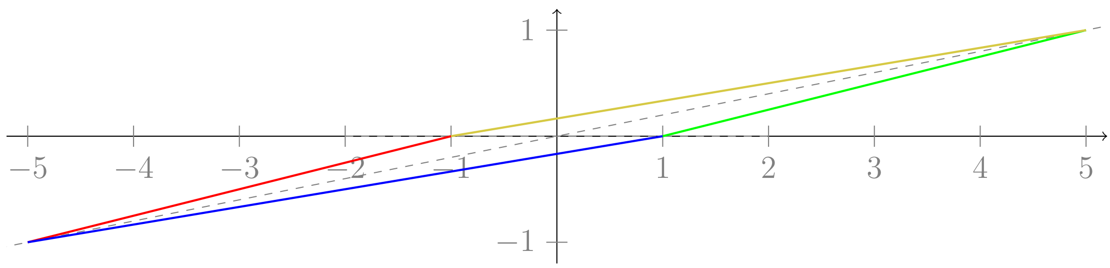
donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par N. Il reste à vérifier la propriété de séparation de N : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N}(x, y) = 0$. C'est-à-dire : $|-x + 5\,y| + |y| = 0$. Nous avons là une somme de réels POSITIFS (en tant que valeurs absolues) et égale à 0 : ce n'est possible que si chaque terme de la somme est nul. Donc : $|-x + 5\,y| = |y| = 0$, ce qui équivaut à : $-x+5\,y = 0$ et $y = 0$. De là on déduit aisément que $x = y = 0$. On a bien montré que si $\mathrm{N}(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0,0)$, donc N est séparée. Ceci achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons sa sphère unité, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\mathrm{N}(x, y) = 1$. On a :

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff |-x + 5\,y| + |y| = 1.$$

Pour y voir clair, nous allons faire quatre distinctions de cas, selon les signes respectifs de $-x+5\,y$ et $y$ : si nous connaissons leurs signes, alors nous savons ce que valent leurs valeurs absolues. Cela permet de les simplifier, et donc de reconnaître des équations affines (donc de droites) :

— si $-x + 5\,y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-x+5\,y) + (y) = 1 \iff -x + 6\,y = 1\,;$$
— si $-x + 5\,y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff (-x+5\,y) - (y) = 1 \iff -x + 4\,y = 1\,;$$
— si $-x + 5\,y \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-x+5\,y) + (y) = 1 \iff x - 4\,y = 1\,;$$
— si $-x + 5\,y \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ : dans ce cas,
$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \iff -(-x+5\,y) - (y) = 1 \iff x - 6\,y = 1.$$

Nous avons quatre équations de droite, que nous n'avons plus qu'à tracer dans les régions du plan délimitées par les deux inégalités correspondantes que nous avons supposées (si cela vous aide, mettre les équations de droite sous la forme $y = ax + b$ quand c'est possible). Notons qu'une sphère est nécessairement symétrique par rapport à l'origine, ainsi que convexe. Cela devrait vous permettre de remarquer une absurdité dans votre tracé. Le tracé est à la page suivante.




en rouge : $-x + 4\,y = 1$ — en bleu : $x - 6\,y = 1$

en vert : $x - 4\,y = 1$ — en jaune : $-x + 6\,y = 1$