Matrices des projecteurs et symétries

Ces exercices vous font réviser comment déterminer si un endomorphisme est un projecteur ou une symétrie, et quelles sont ses caractéristiques géométriques, à l'aide de sa matrice dans une base. Ou inversement : trouver la matrice d'un tel endomorphisme quand on connaît ses caractéristiques géométriques.

Exercice 1. Soient F le plan d'équation $23\,x - 24\,y - 10\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-2,\,0)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 13

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à G parallèlement à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 2. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-3,\,5)\,,(0,\,2,\,0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\,1,\,-5)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 14

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 3. Soient F le plan d'équation $21\,x + 2\,y - 12\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\,3,\,4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 15

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 16

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 5. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-2,\,-6)\,,(-1,\,6,\,2)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,-2,\,4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 16

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 6. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-1,\,0)\,,(-3,\,-1,\,-5)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,1,\,-6)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 17

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 7. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\,-4,\,1)\,,(1,\,5,\,5)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,4,\,4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 18

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 19

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -18 & -24 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 9. Soient F le plan d'équation $3\,x - y + 3\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,2,\,1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 20

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 10. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\ -4,\ -1)\,,(3,\ 3,\ 4)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ -1,\ 1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 21

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 11. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 2,\ 5)\,,(-3,\ -4,\ 2)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\ 4,\ 0)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 22

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 12. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\ -1,\ 0)\,,(1,\ 4,\ 5)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\ 1,\ 1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 23

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 13. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\ 6,\ 4)\,,(1,\ -4,\ -3)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 0,\ 4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 24

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à G parallèlement à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 25

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 15. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 25

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 \\ -3 & -12 & -9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 16. Soient F le plan d'équation $10\,x + 26\,y + z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\ -1,\ 2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 26

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 27

$$A = \begin{pmatrix} -19 & -60 & 0 \\ 6 & 19 & 0 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 18. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\ 1,\ -4)\,,(3,\ 0,\ -1)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ -1,\ -3)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 27

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à G parallèlement à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 19. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,-2,\,2)\,,(2,\,2,\,4)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,3,\,-2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 28

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à G parallèlement à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 20. Soient F le plan d'équation $3\,x - 4\,y + 13\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-6,\,-4,\,1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 29

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 21. Soient F le plan d'équation $2\,x - 2\,y - z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,-2,\,-1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 30

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 22. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,3,\,2)\,,(0,\,6,\,2)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\,6,\,2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 32

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 23. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-5,\,2,\,1)\,,(6,\,6,\,-3)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-6,\,-4,\,6)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 33

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 24. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 33

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 8 & -16 \\ -6 & 5 & -12 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 25. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,4,\,3)\,,(4,\,-4,\,-6)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\,-6,\,-3)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 34

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 26. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,1,\,-5)\,,(-5,\,1,\,-1)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-2,\,3)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 35

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 27. Soient F le plan d'équation $3\,x + 5\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,-3,\,0)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 36

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 28. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 37

$$A = \begin{pmatrix} -33 & 102 & 136 \\ -8 & 25 & 32 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 29. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\, 1,\, 0)\,, (5,\, 3,\, 2)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-6,\, 1,\, -5)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 38

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 30. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\, 0,\, -4)\,, (0,\, 5,\, -5)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 6,\, -5)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 38

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à G parallèlement à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 31. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\, 2,\, -2)\,, (-3,\, -2,\, 1)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\, 0,\, -2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 39

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 32. Soient F le plan d'équation $x - z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((6,\, 0,\, 4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 40

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 33. Soient F le plan d'équation $12\,x - 17\,y + 8\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\, 0,\, 1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 41

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 34. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\, 0,\, 6)\,, (-3,\, 5,\, -4)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\, -3,\, 1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 43

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 35. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 44

$$A = \begin{pmatrix} -19 & 40 & 20 \\ -8 & 17 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 36. Soient F le plan d'équation $x = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\, 1,\, 0)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 44

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 37. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 45

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 54 & -72 \\ -8 & 25 & -32 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 38. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 46

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 68 & 0 \\ -4 & 17 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 39. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((6,\ -4,\ 4),(0,\ -6,\ -4)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\ 2,\ -1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 47

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 40. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 47

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -3 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 41. Soient F le plan d'équation $x+y+z=0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\ -5,\ 2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 48

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 42. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\ -4,\ -5),(-4,\ -6,\ 0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 5,\ 5)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 49

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 43. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 50

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 18 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 44. Soient F le plan d'équation $19\,x+9\,y-16\,z=0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\ 3,\ 4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 51

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 45. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 52

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -28 & 28 \\ 6 & -11 & 12 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 46. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 53

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 47. Soient F le plan d'équation $8\,x - 14\,y - 15\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,-4,\,6)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 53

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 48. Soient F le plan d'équation $5\,x+23\,y-17\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,2,\,1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 54

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 49. Soient F le plan d'équation $28\,x-3\,y-15\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,4,\,-4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 56

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 50. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 57

$$A = \begin{pmatrix} -15 & -42 & 14 \\ 6 & 17 & -6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 51. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 58

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -16 & -12 \\ 2 & 9 & 6 \\ -2 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 52. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 58

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 3 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 53. Soient F le plan d'équation $2\,x+3\,y-5\,z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((6,\,-1,\,6)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 59

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 54. Soient F le plan d'équation $x+y-z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,3,\,6)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 60

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 55. Soient $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,-4,\,3)\,,(3,\,6,\,-1)\right)$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-6,\,1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 62

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à G parallèlement à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 56. Soient $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,2,\,-6)\,,(-4,\,-2,\,4)\right)$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,0,\,5)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 62

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 57. Soient $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-6,\,2,\,-6)\,,(6,\,-1,\,-6)\right)$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,-2,\,-2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 63

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 58. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 64

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 12 \\ -2 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 59. Soient F le plan d'équation $9\,x-6\,y+2\,z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,-2,\,-5)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 65

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à G parallèlement à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 60. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 66

$$A=\begin{pmatrix} -21 & 66 & 88 \\ -4 & 13 & 16 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 61. Soient F le plan d'équation $25\,x+13\,y-20\,z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,2,\,-3)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 67

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 62. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 68

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 28 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 63. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 69

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -14 & 0 \\ 4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 64. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\ 1,\ -6)\,,(2,\ 0,\ 3)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\ 1,\ 2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 69

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 65. Soient F le plan d'équation $10\,x+3\,y+6\,z=0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\ 2,\ -2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 70

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 66. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 71

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 4 & 1 & -12 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 67. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 72

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -42 & 0 \\ 4 & -13 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 68. Soient F le plan d'équation $5\,y-2\,z=0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\ -3,\ 2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 73

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 69. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\ -6,\ 1)\,,(2,\ 3,\ -6)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\ 3,\ 1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 74

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 70. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-3,\,-3)\,,(4,\,6,\,-5)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,1,\,1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 75

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 71. Soient F le plan d'équation $z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-3,\,2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 76

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 72. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 77

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 73. Soient F le plan d'équation $7\,x + 12\,y - 13\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((5,\,-5,\,-2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 77

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 74. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,-1,\,-4)\,,(-2,\,6,\,0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,4,\,6)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 78

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 75. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 79

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -18 & -6 \\ 2 & 7 & 2 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 76. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 80

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -52 & 26 \\ 4 & 16 & -8 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 77. Soient F le plan d'équation $12\,x+6\,y-7\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-4,\,2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 80

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à G parallèlement à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 78. Soient F le plan d'équation $3\,x-21\,y-10\,z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,-4,\,3)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 82

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 79. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 83

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 16 & 24 \\ -8 & 15 & 24 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 80. Soient F le plan d'équation $4\,x+y-4\,z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,0,\,0)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 84

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 81. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 85

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 82. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 85

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 83. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 86

$$A=\begin{pmatrix} -15 & 42 & -28 \\ -4 & 11 & -8 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 84. Soient $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\,-4,\,3)\,,(6,\,-6,\,4)\right)$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,2,\,3)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 86

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 85. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 87

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 86. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,4,\,5)\,,(5,\,2,\,5)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-5,\,5,\,5)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 88

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 87. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-2,\,0)\,,(1,\,5,\,0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\,0,\,1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 89

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 88. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 90

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -21 & 21 \\ 3 & -9 & 9 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 89. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 90

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 4 & -9 & 16 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 90. Soient F le plan d'équation $x - y = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,-4,\,0)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 91

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 91. Soient F le plan d'équation $15\,x - 3\,y + 4\,z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,3,\,-4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 92

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 92. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 93

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ -3 & -6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 93. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 94

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 18 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 94. Soient F le plan d'équation $3\,x+5\,y+z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-6,\ -2,\ 4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 94

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 95. Soient F le plan d'équation $4\,y+z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\ -1,\ 2)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 96

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 96. Soient F le plan d'équation $7\,x-4\,y-2\,z=0$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\ 2,\ 0)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 97

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Écrire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 97. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 98

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 98. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 98

$$A=\begin{pmatrix} 12 & -24 & -36 \\ 4 & -8 & -12 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Exercice 99. Soient $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\ -2,\ 2),(6,\ -4,\ 4)\right)$ et $G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((6,\ -3,\ -4)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. → page 99

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. Écrire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 100. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : → page 100

$$A=\begin{pmatrix} 21 & -44 & -44 \\ 8 & -17 & -16 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est un projecteur ou une symétrie, et expliciter des bases de ses caractéristiques géométriques F et G (de sorte que f soit un projecteur sur F parallèlement à G, ou une symétrie par rapport à F et parallèlement à G).

Corrigé 1. ← page 1

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((10,\ 0,\ 23)\,,(0,\ 5,\ -12))$ et pour G la famille $((-1,\ -2,\ 0))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $23\,x-24\,y-10\,z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((10,\ 0,\ 23)\,,(0,\ 5,\ -12)\,,(-1,\ -2,\ 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 23 & -12 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -12 & \frac{23}{10} \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -12 & \frac{23}{10} \end{vmatrix} = 10\left(5\cdot\left(\frac{23}{10}\right)+12\cdot(-2)\right) = -125 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((10,\ 0,\ 23)\,,(0,\ 5,\ -12)\,,(-1,\ -2,\ 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((10,\ 0,\ 23)\,,(0,\ 5,\ -12))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((10,\ 0,\ 23)\,,(0,\ 5,\ -12)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(-1,\ -2,\ 0)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $23\,x-24\,y-10\,z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $25\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(-1,\ -2,\ 0)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_G-\vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((10,\ 0,\ 23)\,,(0,\ 5,\ -12)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(10,\ 0,\ 23)+b\,(0,\ 5,\ -12)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\ -2,\ 0)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-1,\ -2,\ 0)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(10,\ 0,\ 23)+b\,(0,\ 5,\ -12)+c\,(-1,\ -2,\ 0)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z)=a\,(10,\ 0,\ 23)+b\,(0,\ 5,\ -12)+c\,(-1,\ -2,\ 0)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 10\,a & & & - & c & = & x \\ & & 5\,b & - & 2\,c & = & y \\ 23\,a & - & 12\,b & & & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 10\,a & & & - & c & = & x \\ & & 5\,b & - & 2\,c & = & y \\ & - & 12\,b & + & \frac{23}{10}\,c & = & -\frac{23}{10}\,x+z \end{array}\right.\quad (L_3\leftarrow L_3-\tfrac{23}{10}L_1)$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcl} 10\,a & & - & c & = & x \\ & 5\,b & - & 2\,c & = & y \\ & & - & \frac{5}{2}\,c & = & -\frac{23}{10}\,x+\frac{12}{5}\,y+z \end{array}\right.\quad (L_3\leftarrow L_3+\tfrac{12}{5}L_2)$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{24}{125}\,x-\frac{12}{125}\,y-\frac{1}{25}\,z \\ b & = & \frac{46}{125}\,x-\frac{23}{125}\,y-\frac{4}{25}\,z \\ c & = & \frac{23}{25}\,x-\frac{24}{25}\,y-\frac{2}{5}\,z \end{array}\right..$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à G parallèlement à F est :
$$\begin{aligned} s(x,y,z)&=\vec{x}_G-\vec{x}_F \\ &=-a\,(10,\ 0,\ 23)-b\,(0,\ 5,\ -12)+c\,(-1,\ -2,\ 0) \\ &=-\left(\frac{24}{125}\,x-\frac{12}{125}\,y-\frac{1}{25}\,z\right)(10,\ 0,\ 23)-\left(\frac{46}{125}\,x-\frac{23}{125}\,y-\frac{4}{25}\,z\right)(0,\ 5,\ -12)+\left(\frac{23}{25}\,x-\frac{24}{25}\,y-\frac{2}{5}\,z\right)(-1,\ -2,\ 0) \\ &=\left(-\frac{71}{25}\,x+\frac{48}{25}\,y+\frac{4}{5}\,z,\ -\frac{92}{25}\,x+\frac{71}{25}\,y+\frac{8}{5}\,z,\ -z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{71}{25} & \frac{48}{25} & \frac{4}{5} \\ -\frac{92}{25} & \frac{71}{25} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-1,\,-2,\,0)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $23\,a - 24\,b - 10\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 2. ← page 1

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((3,\,-3,\,5)\,,(0,\,2,\,0))$ et pour G la famille $((-4,\,1,\,-5))$: démontrons que la famille $((3,\,-3,\,5)\,,(0,\,2,\,0)\,,(-4,\,1,\,-5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 2\,(3 \cdot (-5) - 5 \cdot (-4)) = 10 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((3,\,-3,\,5)\,,(0,\,2,\,0)\,,(-4,\,1,\,-5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((3,\,-3,\,5)\,,(0,\,2,\,0))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(3,\,-3,\,5) + b\,(0,\,2,\,0)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-4,\,1,\,-5))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-4,\,1,\,-5)$. Ainsi :
$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(3,\,-3,\,5) + b\,(0,\,2,\,0) + c\,(-4,\,1,\,-5)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x, y, z) = a\,(3,\,-3,\,5) + b\,(0,\,2,\,0) + c\,(-4,\,1,\,-5) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\,a & & & - & 4\,c & = & x \\ -\ 3\,a & + & 2\,b & + & c & = & y \\ 5\,a & & & - & 5\,c & = & z \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 3\,a & & & - & 4\,c & = & x & \\ & & 2\,b & - & 3\,c & = & x + y & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & & & & \frac{5}{3}\,c & = & -\frac{5}{3}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{3} L_1) \end{array} \right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -x + \frac{4}{5}\,z \\ b & = & -x + \frac{1}{2}\,y + \frac{9}{10}\,z \\ c & = & -x + \frac{3}{5}\,z \end{array} \right. .$$
Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(3,\,-3,\,5) + b\,(0,\,2,\,0) \\ &= \left(-x + \frac{4}{5}\,z\right)(3,\,-3,\,5) + \left(-x + \frac{1}{2}\,y + \frac{9}{10}\,z\right)(0,\,2,\,0) \\ &= \left(-3\,x + \frac{12}{5}\,z,\ x + y - \frac{3}{5}\,z,\ -5\,x + 4\,z\right). \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \frac{12}{5} \\ 1 & 1 & -\frac{3}{5} \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 3. ← page 1

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((4,\,0,\,7)\,,(0,\,6,\,1))$ et pour G la famille $((4,\,3,\,4))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $21\,x+2\,y-12\,z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((4,\,0,\,7)\,,(0,\,6,\,1)\,,(4,\,3,\,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4\,(6\cdot(-3)-1\cdot(3)) = -84 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((4,\,0,\,7)\,,(0,\,6,\,1)\,,(4,\,3,\,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((4,\,0,\,7)\,,(0,\,6,\,1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((4,\,0,\,7)\,,(0,\,6,\,1))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(4,\,3,\,4)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $21\,x+2\,y-12\,z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $42\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(4,\,3,\,4)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $p(x,y,z)=\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((4,\,0,\,7)\,,(0,\,6,\,1))$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(4,\,0,\,7)+b\,(0,\,6,\,1)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((4,\,3,\,4))$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(4,\,3,\,4)$. Ainsi :

$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(4,\,0,\,7)+b\,(0,\,6,\,1)+c\,(4,\,3,\,4)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z)=a\,(4,\,0,\,7)+b\,(0,\,6,\,1)+c\,(4,\,3,\,4) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & & & + & 4\,c & = & x \\ & & 6\,b & + & 3\,c & = & y \\ 7\,a & + & b & + & 4\,c & = & z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & & & + & 4\,c & = & x \\ & & 6\,b & + & 3\,c & = & y \\ & & b & - & 3\,c & = & -\frac{7}{4}\,x+z \quad (L_3\leftarrow L_3-\frac{7}{4}L_1) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & & & + & 4\,c & = & x \\ & & 6\,b & + & 3\,c & = & y \\ & & & - & \frac{7}{2}\,c & = & -\frac{7}{4}\,x-\frac{1}{6}\,y+z \quad (L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{6}L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{4}\,x-\frac{1}{21}\,y+\frac{2}{7}\,z \\ b & = & -\frac{1}{4}\,x+\frac{1}{7}\,y+\frac{1}{7}\,z \\ c & = & \frac{1}{2}\,x+\frac{1}{21}\,y-\frac{2}{7}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(4,\,3,\,4) \\ &= \left(\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{21}\,y-\frac{2}{7}\,z\right)(4,\,3,\,4) \\ &= \left(2\,x+\frac{4}{21}\,y-\frac{8}{7}\,z,\ \frac{3}{2}\,x+\frac{1}{7}\,y-\frac{6}{7}\,z,\ 2\,x+\frac{4}{21}\,y-\frac{8}{7}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{21} & -\frac{8}{7} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ 2 & \frac{4}{21} & -\frac{8}{7} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(4,\, 3,\, 4)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $21\,a + 2\,b - 12\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 4. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 1

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et} : G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} : \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\, -1,\, 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\, 1,\, 0), (3,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 5. ← page 1

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((3,\, -2,\, -6), (-1,\, 6,\, 2))$ et pour G la famille $((-3,\, -2,\, 4))$: démontrons que la famille $((3,\, -2,\, -6), (-1,\, 6,\, 2), (-3,\, -2,\, 4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 6 & -2 \\ -6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{16}{3} & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -32 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((3,\, -2,\, -6), (-1,\, 6,\, 2), (-3,\, -2,\, 4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-2,\,-6)\,,(-1,\,6,\,2)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(3,\,-2,\,-6)+b\,(-1,\,6,\,2)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,-2,\,4)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-3,\,-2,\,4)$. Ainsi :

$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(3,\,-2,\,-6)+b\,(-1,\,6,\,2)+c\,(-3,\,-2,\,4)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z)=a\,(3,\,-2,\,-6)+b\,(-1,\,6,\,2)+c\,(-3,\,-2,\,4)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,a & - & b & - & 3\,c & = & x\\ -\;2\,a & + & 6\,b & - & 2\,c & = & y\\ -\;6\,a & + & 2\,b & + & 4\,c & = & z\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3\,a & - & b & - & 3\,c & = & x & \\ & & \frac{16}{3}\,b & - & 4\,c & = & \frac{2}{3}\,x+y & (L_2\leftarrow L_2+\frac{2}{3}L_1)\\ & & & - & 2\,c & = & 2\,x+z & (L_3\leftarrow L_3+2L_1)\end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{7}{8}\,x+\frac{1}{16}\,y-\frac{5}{8}\,z\\ b & = & -\frac{5}{8}\,x+\frac{3}{16}\,y-\frac{3}{8}\,z\\ c & = & -x-\frac{1}{2}\,z\end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F-\vec{x}_G\\ &= a\,(3,\,-2,\,-6)+b\,(-1,\,6,\,2)-c\,(-3,\,-2,\,4)\\ &= \left(-\frac{7}{8}\,x+\frac{1}{16}\,y-\frac{5}{8}\,z\right)(3,\,-2,\,-6)+\left(-\frac{5}{8}\,x+\frac{3}{16}\,y-\frac{3}{8}\,z\right)(-1,\,6,\,2)-\left(-x-\frac{1}{2}\,z\right)(-3,\,-2,\,4)\\ &= (-5\,x-3\,z,\,-4\,x+y-2\,z,\,8\,x+5\,z)\,.\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s)=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -3\\ -4 & 1 & -2\\ 8 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Corrigé 6. ← page 1

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $\left((-1,\,-1,\,0)\,,(-3,\,-1,\,-5)\right)$ et pour G la famille $\left((-3,\,1,\,-6)\right)$: démontrons que la famille $\left((-1,\,-1,\,0)\,,(-3,\,-1,\,-5)\,,(-3,\,1,\,-6)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix}-1 & -3 & -3\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & -5 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -3 & -3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ -5 & -6\end{vmatrix}=-\left(2\cdot(-6)+5\cdot(4)\right)=-8\neq 0.$$

Ainsi la famille $\left((-1,\,-1,\,0)\,,(-3,\,-1,\,-5)\,,(-3,\,1,\,-6)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-1,\,0)\,,(-3,\,-1,\,-5)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(-1,\,-1,\,0)+b\,(-3,\,-1,\,-5)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,1,\,-6)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-3,\,1,\,-6)$. Ainsi :

$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(-1,\,-1,\,0)+b\,(-3,\,-1,\,-5)+c\,(-3,\,1,\,-6)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z) = a\,(-1,\,-1,\,0) + b\,(-3,\,-1,\,-5) + c\,(-3,\,1,\,-6) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\,a & - & 3\,b & - & 3\,c & = & x \\ -\,a & - & b & + & c & = & y \\ & - & 5\,b & - & 6\,c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\,a & - & 3\,b & - & 3\,c & = & x & \\ & & 2\,b & + & 4\,c & = & -x+y & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & - & 5\,b & - & 6\,c & = & z & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\,a & - & 3\,b & - & 3\,c & = & x & \\ & & 2\,b & + & 4\,c & = & -x+y & \\ & & & & 4\,c & = & -\frac{5}{2}\,x + \frac{5}{2}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{2} L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{11}{8}\,x + \frac{3}{8}\,y + \frac{3}{4}\,z \\ b & = & \frac{3}{4}\,x - \frac{3}{4}\,y - \frac{1}{2}\,z \\ c & = & -\frac{5}{8}\,x + \frac{5}{8}\,y + \frac{1}{4}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(-1,\,-1,\,0) + b\,(-3,\,-1,\,-5) - c\,(-3,\,1,\,-6) \\ &= \left(-\frac{11}{8}\,x + \frac{3}{8}\,y + \frac{3}{4}\,z\right)(-1,\,-1,\,0) + \left(\frac{3}{4}\,x - \frac{3}{4}\,y - \frac{1}{2}\,z\right)(-3,\,-1,\,-5) - \left(-\frac{5}{8}\,x + \frac{5}{8}\,y + \frac{1}{4}\,z\right)(-3,\,1,\,-6) \\ &= \left(-\frac{11}{4}\,x + \frac{15}{4}\,y + \frac{3}{2}\,z,\ \frac{5}{4}\,x - \frac{1}{4}\,y - \frac{1}{2}\,z,\ -\frac{15}{2}\,x + \frac{15}{2}\,y + 4\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & \frac{15}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{15}{2} & \frac{15}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 7. ← page 1

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-4,\,-4,\,1)\,,(1,\,5,\,5))$ et pour G la famille $((2,\,4,\,4))$: démontrons que la famille $((-4,\,-4,\,1)\,,(1,\,5,\,5)\,,(2,\,4,\,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ \frac{21}{4} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = -4\left(4 \cdot \left(\frac{9}{2}\right) - \frac{21}{4} \cdot (2)\right) = -30 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-4,\,-4,\,1)\,,(1,\,5,\,5)\,,(2,\,4,\,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-4,\,-4,\,1)\,,(1,\,5,\,5))$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-4,\,-4,\,1) + b\,(1,\,5,\,5)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((2,\,4,\,4))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\,4,\,4)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-4,\,-4,\,1) + b\,(1,\,5,\,5) + c\,(2,\,4,\,4)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans

l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z) = a\,(-4,\,-4,\,1) + b\,(1,\,5,\,5) + c\,(2,\,4,\,4) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\;4\,a & + & b & + & 2\,c & = & x \\ -\;4\,a & + & 5\,b & + & 4\,c & = & y \\ a & + & 5\,b & + & 4\,c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\;4\,a & + & b & + & 2\,c & = & x & \\ & & 4\,b & + & 2\,c & = & -x+y & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & \frac{21}{4}\,b & + & \frac{9}{2}\,c & = & \frac{1}{4}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{4} L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\;4\,a & + & b & + & 2\,c & = & x & \\ & & 4\,b & + & 2\,c & = & -x+y & \\ & & & & \frac{15}{8}\,c & = & \frac{25}{16}\,x - \frac{21}{16}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{21}{16} L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{5}\,y + \frac{1}{5}\,z \\ b & = & -\frac{2}{3}\,x + \frac{3}{5}\,y - \frac{4}{15}\,z \\ c & = & \frac{5}{6}\,x - \frac{7}{10}\,y + \frac{8}{15}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(2,\,4,\,4) \\ &= \left(\frac{5}{6}\,x - \frac{7}{10}\,y + \frac{8}{15}\,z\right)(2,\,4,\,4) \\ &= \left(\frac{5}{3}\,x - \frac{7}{5}\,y + \frac{16}{15}\,z,\ \frac{10}{3}\,x - \frac{14}{5}\,y + \frac{32}{15}\,z,\ \frac{10}{3}\,x - \frac{14}{5}\,y + \frac{32}{15}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{7}{5} & \frac{16}{15} \\ \frac{10}{3} & -\frac{14}{5} & \frac{32}{15} \\ \frac{10}{3} & -\frac{14}{5} & \frac{32}{15} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 8. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 1

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\;8\,x & - & 18\,y & - & 24\,z & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \\ 2\,x & + & 6\,y & + & 6\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x & + & 6\,y & + & 6\,z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & - & 2\,y & & & = & 0 & \\ -\;8\,x & - & 18\,y & - & 24\,z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x & + & 6\,y & + & 6\,z & = & 0 & \\ & - & 2\,y & & & = & 0 & \\ & & 6\,y & & & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x & + & 6\,y & + & 6\,z & = & 0 & \\ & - & 2\,y & & & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y - 3z \\ y & = & 0 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3a \\ y & = & 0 \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A+\mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A+\mathrm{I}_3\right)=\{X\in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid AX=-X\}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,1,\,0),(-4,\,0,\,1)\right).$$

Corrigé 9. ← page 1

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\,0,\,-1),(0,\,3,\,1))$ et pour G la famille $((-2,\,2,\,1))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $3\,x-y+3\,z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\,0,\,-1),(0,\,3,\,1),(-2,\,2,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&3&2\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&3&2\\0&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\1&-1\end{vmatrix}=(3\cdot(-1)-1\cdot(2))=-5\neq 0.$$

   Ainsi la famille $((1,\,0,\,-1),(0,\,3,\,1),(-2,\,2,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
   Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\,0,\,-1),(0,\,3,\,1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,-1),(0,\,3,\,1)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
   Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(-2,\,2,\,1)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $3\,x-y+3\,z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-5\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(-2,\,2,\,1)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $p(x,y,z)=\vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
   Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,-1),(0,\,3,\,1)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(1,\,0,\,-1)+b\,(0,\,3,\,1)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,2,\,1)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-2,\,2,\,1)$. Ainsi :

$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(1,\,0,\,-1)+b\,(0,\,3,\,1)+c\,(-2,\,2,\,1).$$

   On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}(x,y,z)=a\,(1,\,0,\,-1)+b\,(0,\,3,\,1)+c\,(-2,\,2,\,1)&\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}a&&&-&2\,c&=&x\\&&3\,b&+&2\,c&=&y\\-\;a&+&b&+&c&=&z\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}a&&&-&2\,c&=&x\\&&3\,b&+&2\,c&=&y\\&&b&-&c&=&x+z\quad(L_3\leftarrow L_3+L_1)\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}a&&&-&2\,c&=&x\\&&3\,b&+&2\,c&=&y\\&&&-&\frac{5}{3}\,c&=&x-\frac{1}{3}\,y+z\quad(L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{3}L_2)\end{array}\right.\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{lll} a & = & -\frac{1}{5}\,x + \frac{2}{5}\,y - \frac{6}{5}\,z \\ b & = & \frac{2}{5}\,x + \frac{1}{5}\,y + \frac{2}{5}\,z \\ c & = & -\frac{3}{5}\,x + \frac{1}{5}\,y - \frac{3}{5}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(1,\,0,\,-1) + b\,(0,\,3,\,1) \\ &= \left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{2}{5}\,y - \frac{6}{5}\,z\right)(1,\,0,\,-1) + \left(\frac{2}{5}\,x + \frac{1}{5}\,y + \frac{2}{5}\,z\right)(0,\,3,\,1) \\ &= \left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{2}{5}\,y - \frac{6}{5}\,z,\ \frac{6}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y + \frac{6}{5}\,z,\ \frac{3}{5}\,x - \frac{1}{5}\,y + \frac{8}{5}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-2,\,2,\,1)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $3\,a - b + 3\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 10. ← page 2

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-2,\,-4,\,-1)\,,(3,\,3,\,4))$ et pour G la famille $((1,\,-1,\,1))$: démontrons que la famille $((-2,\,-4,\,-1)\,,(3,\,3,\,4)\,,(1,\,-1,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -2\left(-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} \cdot (-3)\right) = -12 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-2,\,-4,\,-1)\,,(3,\,3,\,4)\,,(1,\,-1,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,-4,\,-1)\,,(3,\,3,\,4)\right)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-2,\,-4,\,-1) + b\,(3,\,3,\,4)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,-1,\,1)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(1,\,-1,\,1)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-2,\,-4,\,-1) + b\,(3,\,3,\,4) + c\,(1,\,-1,\,1)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z) = a\,(-2,\,-4,\,-1) + b\,(3,\,3,\,4) + c\,(1,\,-1,\,1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\,2\,a & + & 3\,b & + & c & = & x \\ -\,4\,a & + & 3\,b & - & c & = & y \\ -\,a & + & 4\,b & + & c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\,2\,a & + & 3\,b & + & c & = & x & \\ & - & 3\,b & - & 3\,c & = & -2\,x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & \frac{5}{2}\,b & + & \frac{1}{2}\,c & = & -\frac{1}{2}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\,2\,a & + & 3\,b & + & c & = & x & \\ & - & 3\,b & - & 3\,c & = & -2\,x + y & \\ & & & - & 2\,c & = & -\frac{13}{6}\,x + \frac{5}{6}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{6}L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{7}{12}\,x - \frac{1}{12}\,y + \frac{1}{2}\,z \\ b & = & -\frac{5}{12}\,x + \frac{1}{12}\,y + \frac{1}{2}\,z \\ c & = & \frac{13}{12}\,x - \frac{5}{12}\,y - \frac{1}{2}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(-2,\ -4,\ -1) + b\,(3,\ 3,\ 4) \\ &= \left(-\frac{7}{12}\,x - \frac{1}{12}\,y + \frac{1}{2}\,z\right)(-2,\ -4,\ -1) + \left(-\frac{5}{12}\,x + \frac{1}{12}\,y + \frac{1}{2}\,z\right)(3,\ 3,\ 4) \\ &= \left(-\frac{1}{12}\,x + \frac{5}{12}\,y + \frac{1}{2}\,z,\ \frac{13}{12}\,x + \frac{7}{12}\,y - \frac{1}{2}\,z,\ -\frac{13}{12}\,x + \frac{5}{12}\,y + \frac{3}{2}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{13}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{12} & \frac{5}{12} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 11. ← page 2

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\ 2,\ 5),(-3,\ -4,\ 2))$ et pour G la famille $((3,\ 4,\ 0))$: démontrons que la famille $((1,\ 2,\ 5),(-3,\ -4,\ 2),(3,\ 4,\ 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -4 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 17 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 17 & -15 \end{vmatrix} = (2\cdot(-15) - 17\cdot(-2)) = 4 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((1,\ 2,\ 5),(-3,\ -4,\ 2),(3,\ 4,\ 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,\ 2,\ 5),(-3,\ -4,\ 2))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(1,\ 2,\ 5) + b\,(-3,\ -4,\ 2)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((3,\ 4,\ 0))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(3,\ 4,\ 0)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(1,\ 2,\ 5) + b\,(-3,\ -4,\ 2) + c\,(3,\ 4,\ 0).$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} (x,y,z) = a\,(1,\ 2,\ 5) + b\,(-3,\ -4,\ 2) + c\,(3,\ 4,\ 0) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & - & 3\,b & + & 3\,c & = & x \\ 2\,a & - & 4\,b & + & 4\,c & = & y \\ 5\,a & + & 2\,b & & & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & - & 3\,b & + & 3\,c & = & x & \\ & & 2\,b & - & 2\,c & = & -2\,x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & 17\,b & - & 15\,c & = & -5\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & - & 3\,b & + & 3\,c & = & x & \\ & & 2\,b & - & 2\,c & = & -2\,x + y & \\ & & & & 2\,c & = & 12\,x - \frac{17}{2}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{17}{2}L_2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2\,x + \frac{3}{2}\,y \\ b & = & 5\,x - \frac{15}{4}\,y + \frac{1}{2}\,z \\ c & = & 6\,x - \frac{17}{4}\,y + \frac{1}{2}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\
&= a\,(1,\,2,\,5) + b\,(-3,\,-4,\,2) - c\,(3,\,4,\,0) \\
&= \left(-2\,x + \frac{3}{2}\,y\right)(1,\,2,\,5) + \left(5\,x - \frac{15}{4}\,y + \frac{1}{2}\,z\right)(-3,\,-4,\,2) - \left(6\,x - \frac{17}{4}\,y + \frac{1}{2}\,z\right)(3,\,4,\,0) \\
&= \left(-35\,x + \frac{51}{2}\,y - 3\,z,\ -48\,x + 35\,y - 4\,z,\ z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -35 & \frac{51}{2} & -3 \\ -48 & 35 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 12. ← page 2

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-2,\,-1,\,0)\,,(1,\,4,\,5))$ et pour G la famille $((0,\,1,\,1))$: démontrons que la famille $((-2,\,-1,\,0)\,,(1,\,4,\,5)\,,(0,\,1,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2\left(\frac{7}{2}\cdot(1) - 5\cdot(1)\right) = 3 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-2,\,-1,\,0)\,,(1,\,4,\,5)\,,(0,\,1,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-2,\,-1,\,0)\,,(1,\,4,\,5))$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-2,\,-1,\,0) + b\,(1,\,4,\,5)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((0,\,1,\,1))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(0,\,1,\,1)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-2,\,-1,\,0) + b\,(1,\,4,\,5) + c\,(0,\,1,\,1)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(-2,\,-1,\,0) + b\,(1,\,4,\,5) + c\,(0,\,1,\,1) &\iff \begin{cases} -2\,a + b = x \\ -a + 4\,b + c = y \\ 5\,b + c = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2\,a + b = x \\ \frac{7}{2}\,b + c = -\frac{1}{2}\,x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1) \\ 5\,b + c = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2\,a + b = x \\ \frac{7}{2}\,b + c = -\frac{1}{2}\,x + y \\ -\frac{3}{7}\,c = \frac{5}{7}\,x - \frac{10}{7}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{10}{7}L_2) \end{cases}
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3}\,z \\ b = \frac{1}{3}\,x - \frac{2}{3}\,y + \frac{2}{3}\,z \\ c = -\frac{5}{3}\,x + \frac{10}{3}\,y - \frac{7}{3}\,z \end{cases}.$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\
&= a\,(-2,\,-1,\,0) + b\,(1,\,4,\,5) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3}\,z\right)(-2,\,-1,\,0) + \left(\frac{1}{3}\,x - \frac{2}{3}\,y + \frac{2}{3}\,z\right)(1,\,4,\,5) \\
&= \left(x,\ \frac{5}{3}\,x - \frac{7}{3}\,y + \frac{7}{3}\,z,\ \frac{5}{3}\,x - \frac{10}{3}\,y + \frac{10}{3}\,z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 13. ← page 2

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-1,\,6,\,4)\,,(1,\,-4,\,-3))$ et pour G la famille $((1,\,0,\,4))$: démontrons que la famille $((-1,\,6,\,4)\,,(1,\,-4,\,-3)\,,(1,\,0,\,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -\left(2\cdot(8) - 1\cdot(6)\right) = -10 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-1,\,6,\,4)\,,(1,\,-4,\,-3)\,,(1,\,0,\,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_G - \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,6,\,4)\,,(1,\,-4,\,-3)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-1,\,6,\,4) + b\,(1,\,-4,\,-3)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,4)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(1,\,0,\,4)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-1,\,6,\,4) + b\,(1,\,-4,\,-3) + c\,(1,\,0,\,4)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(-1,\,6,\,4) + b\,(1,\,-4,\,-3) + c\,(1,\,0,\,4) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & x \\ 6a & - & 4b & & & = & y \\ 4a & - & 3b & + & 4c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -a & + & b & + & c & = & x & \\ & & 2b & + & 6c & = & 6x+y & (L_2 \leftarrow L_2 + 6L_1) \\ & & b & + & 8c & = & 4x+z & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -a & + & b & + & c & = & x & \\ & & 2b & + & 6c & = & 6x+y & \\ & & & & 5c & = & x - \frac{1}{2}y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{8}{5}x + \frac{7}{10}y - \frac{2}{5}z \\ b & = & \frac{12}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z \\ c & = & \frac{1}{5}x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{5}z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_G - \vec{x}_F \\
&= -a\,(-1,\,6,\,4) - b\,(1,\,-4,\,-3) + c\,(1,\,0,\,4) \\
&= -\left(\frac{8}{5}x + \frac{7}{10}y - \frac{2}{5}z\right)(-1,\,6,\,4) - \left(\frac{12}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z\right)(1,\,-4,\,-3) + \left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{5}z\right)(1,\,0,\,4) \\
&= \left(-\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}z,\; -y,\; \frac{8}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 14. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 2

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \begin{cases} -2x = 0 \\ -2x - 6y - 6z = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} -2x = 0 & \\ \quad -6y - 6z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \quad 4y + 4z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ \quad 4y + 4z = 0 & \\ \quad -6y - 6z = 0 & \end{cases}
\iff \begin{cases} -2x = 0 & \\ \quad 4y + 4z = 0 & \\ \quad 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_2) \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = a \end{cases}
\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -a \\ z = a \end{cases}
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\, -1,\, 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\, 1,\, 0), (-3,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 15. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 \\ -3 & -12 & -9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 2

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 40 & 30 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -12 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :
$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((10,\ -3,\ 1)\right),$$
et parallèlement à :
$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\ 1,\ 0),(-3,\ 0,\ 1)\right).$$

Corrigé 16. ← page 2

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\ 0,\ -10),(0,\ 1,\ -26))$ et pour G la famille $((4,\ -1,\ 2))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $10\,x+26\,y+z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\ 0,\ -10),(0,\ 1,\ -26),(4,\ -1,\ 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -10 & -26 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -26 & 42 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -26 & 42 \end{vmatrix} = (1\cdot(42)+26\cdot(-1)) = 16 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((1,\ 0,\ -10),(0,\ 1,\ -26),(4,\ -1,\ 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\ 0,\ -10),(0,\ 1,\ -26))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 0,\ -10),(0,\ 1,\ -26)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(4,\ -1,\ 2)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $10\,x+26\,y+z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $16\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(4,\ -1,\ 2)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 0,\ -10),(0,\ 1,\ -26)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(1,\ 0,\ -10)+b\,(0,\ 1,\ -26)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\ -1,\ 2)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(4,\ -1,\ 2)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(1,\ 0,\ -10)+b\,(0,\ 1,\ -26)+c\,(4,\ -1,\ 2).$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}(x,y,z)=a\,(1,\ 0,\ -10)+b\,(0,\ 1,\ -26)+c\,(4,\ -1,\ 2) &\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} a & & +\ 4\,c & = & x \\ & b & -\ c & = & y \\ -\ 10\,a & -\ 26\,b & +\ 2\,c & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} a & & +\ 4\,c & = & x & \\ & b & -\ c & = & y & \\ & -\ 26\,b & +\ 42\,c & = & 10\,x+z & (L_3\leftarrow L_3+10L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} a & & +\ 4\,c & = & x & \\ & b & -\ c & = & y & \\ & & 16\,c & = & 10\,x+26\,y+z & (L_3\leftarrow L_3+26L_2) \end{array}\right.\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{3}{2}\,x-\frac{13}{2}\,y-\frac{1}{4}\,z \\ b & = & \frac{5}{8}\,x+\frac{21}{8}\,y+\frac{1}{16}\,z \\ c & = & \frac{5}{8}\,x+\frac{13}{8}\,y+\frac{1}{16}\,z \end{array}\right..$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(1,\,0,\,-10) + b\,(0,\,1,\,-26) - c\,(4,\,-1,\,2) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\,x - \frac{13}{2}\,y - \frac{1}{4}\,z\right)(1,\,0,\,-10) + \left(\frac{5}{8}\,x + \frac{21}{8}\,y + \frac{1}{16}\,z\right)(0,\,1,\,-26) - \left(\frac{5}{8}\,x + \frac{13}{8}\,y + \frac{1}{16}\,z\right)(4,\,-1,\,2) \\ &= \left(-4\,x - 13\,y - \frac{1}{2}\,z,\ \frac{5}{4}\,x + \frac{17}{4}\,y + \frac{1}{8}\,z,\ -\frac{5}{2}\,x - \frac{13}{2}\,y + \frac{3}{4}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -4 & -13 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{17}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(4,\,-1,\,2)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $10\,a + 26\,b + c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 17. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 2

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\},\ \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \begin{cases} -20\,x - 60\,y = 0 \\ 6\,x + 18\,y = 0 \\ -2\,x - 6\,y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,x - 6\,y = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 6\,x + 18\,y = 0 \\ -20\,x - 60\,y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2\,x - 6\,y = 0 \\ 0 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1) \end{cases} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = -3y \\ y = a \\ z = b \end{cases} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = -3a \\ y = a \\ z = b \end{cases} \end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \left\{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,1,\,0), (0,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((10,\,-3,\,1)\right).$$

Corrigé 18. ← page 2

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((4,\,1,\,-4)\,,(3,\,0,\,-1))$ et pour G la famille $((1,\,-1,\,-3))$: démontrons que la famille $((4,\,1,\,-4)\,,(3,\,0,\,-1)\,,(1,\,-1,\,-3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4\left(-\frac{3}{4}\cdot(-2) - 2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = 16 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((4,\,1,\,-4)\,,(3,\,0,\,-1)\,,(1,\,-1,\,-3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_G - \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\,1,\,-4)\,,(3,\,0,\,-1)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(4,\,1,\,-4) + b\,(3,\,0,\,-1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,-1,\,-3)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(1,\,-1,\,-3)$. Ainsi :
$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(4,\,1,\,-4) + b\,(3,\,0,\,-1) + c\,(1,\,-1,\,-3)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}(x,y,z) = a\,(4,\,1,\,-4) + b\,(3,\,0,\,-1) + c\,(1,\,-1,\,-3) &\iff \begin{cases} 4a + 3b + c = x \\ a - c = y \\ -4a - b - 3c = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4a + 3b + c = x \\ -\frac{3}{4}b - \frac{5}{4}c = -\frac{1}{4}x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4}L_1) \\ 2b - 2c = x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4a + 3b + c = x \\ -\frac{3}{4}b - \frac{5}{4}c = -\frac{1}{4}x + y \\ -\frac{16}{3}c = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{8}{3}L_2) \end{cases}\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\begin{cases} a = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{16}z \\ b = \frac{7}{16}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{16}z \\ c = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{16}z \end{cases}.$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à G parallèlement à F est :
$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_G - \vec{x}_F \\ &= -a\,(4,\,1,\,-4) - b\,(3,\,0,\,-1) + c\,(1,\,-1,\,-3) \\ &= -\left(-\frac{1}{16}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{16}z\right)(4,\,1,\,-4) - \left(\frac{7}{16}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{16}z\right)(3,\,0,\,-1) + \left(-\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{16}z\right)(1,\,-1,\,-3) \\ &= \left(-\frac{9}{8}x - y - \frac{3}{8}z,\ \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}z,\ \frac{3}{8}x + 3y + \frac{1}{8}z\right). \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} & -1 & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & 3 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 19. ← page 3

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-3,\,-2,\,2)\,,(2,\,2,\,4))$ et pour G la famille $((3,\,3,\,-2))$: démontrons que la famille $((-3,\,-2,\,2)\,,(2,\,2,\,4)\,,(3,\,3,\,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{16}{3} & 0 \end{vmatrix} = -3\left(\frac{2}{3}\cdot(0) - \frac{16}{3}\cdot(1)\right) = 16 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-3,\ -2,\ 2)\,,(2,\ 2,\ 4)\,,(3,\ 3,\ -2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_G - \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-3,\ -2,\ 2)\,,(2,\ 2,\ 4))$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-3,\ -2,\ 2) + b\,(2,\ 2,\ 4)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((3,\ 3,\ -2))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(3,\ 3,\ -2)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-3,\ -2,\ 2) + b\,(2,\ 2,\ 4) + c\,(3,\ 3,\ -2)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(-3,\ -2,\ 2) + b\,(2,\ 2,\ 4) + c\,(3,\ 3,\ -2) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3a &+& 2b &+& 3c &=& x\\ -2a &+& 2b &+& 3c &=& y\\ 2a &+& 4b &-& 2c &=& z \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3a &+& 2b &+& 3c &=& x & \\ && \frac{2}{3}b &+& c &=& -\frac{2}{3}x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1)\\ && \frac{16}{3}b &&&=& \frac{2}{3}x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_1) \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3a &+& 2b &+& 3c &=& x & \\ && \frac{2}{3}b &+& c &=& -\frac{2}{3}x + y & \\ &&&-& 8c &=& 6x - 8y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& -x + y\\ b &=& \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}z\\ c &=& -\frac{3}{4}x + y - \frac{1}{8}z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_G - \vec{x}_F\\
&= -a\,(-3,\ -2,\ 2) - b\,(2,\ 2,\ 4) + c\,(3,\ 3,\ -2)\\
&= -\,(-x+y)\,(-3,\ -2,\ 2) - \left(\frac{1}{8}x + \frac{3}{16}z\right)(2,\ 2,\ 4) + \left(-\frac{3}{4}x + y - \frac{1}{8}z\right)(3,\ 3,\ -2)\\
&= \left(-\frac{11}{2}x + 6y - \frac{3}{4}z,\ -\frac{9}{2}x + 5y - \frac{3}{4}z,\ 3x - 4y - \frac{1}{2}z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & 6 & -\frac{3}{4}\\ -\frac{9}{2} & 5 & -\frac{3}{4}\\ 3 & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 20. ← page 3

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((13,\ 0,\ -3)\,,(0,\ 13,\ 4))$ et pour G la famille $((-6,\ -4,\ 1))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $3x - 4y + 13z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((13,\ 0,\ -3)\,,(0,\ 13,\ 4)\,,(-6,\ -4,\ 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 13 & 0 & -6\\ 0 & 13 & -4\\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 0 & -6\\ 0 & 13 & -4\\ 0 & 4 & -\frac{5}{13} \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 13 & -4\\ 4 & -\frac{5}{13} \end{vmatrix} = 13\left(13 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - 4 \cdot (-4)\right) = 143 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((13,\ 0,\ -3)\,,(0,\ 13,\ 4)\,,(-6,\ -4,\ 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((13,\ 0,\ -3)\,,(0,\ 13,\ 4))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle

est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((13,\ 0,\ -3),(0,\ 13,\ 4)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.

Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Comme $(x,y,z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z) = a\,(-6,\ -4,\ 1)$. Comme $(x,y,z) \in F$, on a de plus : $3\,x - 4\,y + 13\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $11\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x,y,z) = 0 \times (-6,\ -4,\ 1) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((13,\ 0,\ -3),(0,\ 13,\ 4)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(13,\ 0,\ -3) + b\,(0,\ 13,\ 4)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-6,\ -4,\ 1)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-6,\ -4,\ 1)$. Ainsi :
$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(13,\ 0,\ -3) + b\,(0,\ 13,\ 4) + c\,(-6,\ -4,\ 1)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}(x,y,z) = a\,(13,\ 0,\ -3) + b\,(0,\ 13,\ 4) + c\,(-6,\ -4,\ 1) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 13\,a & & & - & 6\,c & = & x \\ & & 13\,b & - & 4\,c & = & y \\ -\ 3\,a & + & 4\,b & + & c & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 13\,a & & & - & 6\,c & = & x & \\ & & 13\,b & - & 4\,c & = & y & \\ & & 4\,b & - & \frac{5}{13}\,c & = & \frac{3}{13}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{13} L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 13\,a & & & - & 6\,c & = & x & \\ & & 13\,b & - & 4\,c & = & y & \\ & & & & \frac{11}{13}\,c & = & \frac{3}{13}\,x - \frac{4}{13}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{13} L_2) \end{array}\right.\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{29}{143}\,x - \frac{24}{143}\,y + \frac{6}{11}\,z \\ b & = & \frac{12}{143}\,x - \frac{5}{143}\,y + \frac{4}{11}\,z \\ c & = & \frac{3}{11}\,x - \frac{4}{11}\,y + \frac{13}{11}\,z \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(13,\ 0,\ -3) + b\,(0,\ 13,\ 4) - c\,(-6,\ -4,\ 1) \\ &= \left(\frac{29}{143}\,x - \frac{24}{143}\,y + \frac{6}{11}\,z\right)(13,\ 0,\ -3) + \left(\frac{12}{143}\,x - \frac{5}{143}\,y + \frac{4}{11}\,z\right)(0,\ 13,\ 4) - \left(\frac{3}{11}\,x - \frac{4}{11}\,y + \frac{13}{11}\,z\right)(-6,\ -4,\ 1) \\ &= \left(\frac{47}{11}\,x - \frac{48}{11}\,y + \frac{156}{11}\,z,\ \frac{24}{11}\,x - \frac{21}{11}\,y + \frac{104}{11}\,z,\ -\frac{6}{11}\,x + \frac{8}{11}\,y - \frac{15}{11}\,z\right). \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} \frac{47}{11} & -\frac{48}{11} & \frac{156}{11} \\ \frac{24}{11} & -\frac{21}{11} & \frac{104}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{8}{11} & -\frac{15}{11} \end{pmatrix}.$$
Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-6,\ -4,\ 1)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $3\,a - 4\,b + 13\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 21. ← page 3

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\ 0,\ 2)\,,(0,\ 1,\ -2))$ et pour G la famille $((-3,\ -2,\ -1))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $2\,x-2\,y-z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\ 0,\ 2)\,,(0,\ 1,\ -2)\,,(-3,\ -2,\ -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (1\cdot(5)+2\cdot(-2)) = 1 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((1,\ 0,\ 2)\,,(0,\ 1,\ -2)\,,(-3,\ -2,\ -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\ 0,\ 2)\,,(0,\ 1,\ -2))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 0,\ 2)\,,(0,\ 1,\ -2)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(-3,\ -2,\ -1)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $2\,x-2\,y-z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(-3,\ -2,\ -1)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 0,\ 2)\,,(0,\ 1,\ -2)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(1,\ 0,\ 2)+b\,(0,\ 1,\ -2)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\ -2,\ -1)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-3,\ -2,\ -1)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(1,\ 0,\ 2)+b\,(0,\ 1,\ -2)+c\,(-3,\ -2,\ -1)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}(x,y,z)=a\,(1,\ 0,\ 2)+b\,(0,\ 1,\ -2)+c\,(-3,\ -2,\ -1) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & - & 3\,c & = & x \\ & & b & - & 2\,c & = & y \\ 2\,a & - & 2\,b & - & c & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & & & - & 3\,c & = & x & \\ & & b & - & 2\,c & = & y & \\ & - & 2\,b & + & 5\,c & = & -2\,x+z & (L_3\leftarrow L_3-2L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & & & - & 3\,c & = & x & \\ & & b & - & 2\,c & = & y & \\ & & & & c & = & -2\,x+2\,y+z & (L_3\leftarrow L_3+2L_2) \end{array}\right.\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -5\,x+6\,y+3\,z \\ b & = & -4\,x+5\,y+2\,z \\ c & = & -2\,x+2\,y+z \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F-\vec{x}_G \\ &= a\,(1,\ 0,\ 2)+b\,(0,\ 1,\ -2)-c\,(-3,\ -2,\ -1) \\ &= (-5\,x+6\,y+3\,z)\,(1,\ 0,\ 2)+(-4\,x+5\,y+2\,z)\,(0,\ 1,\ -2)-(-2\,x+2\,y+z)\,(-3,\ -2,\ -1) \\ &= (-11\,x+12\,y+6\,z,\ -8\,x+9\,y+4\,z,\ -4\,x+4\,y+3\,z)\,. \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s)=\begin{pmatrix} -11 & 12 & 6 \\ -8 & 9 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-3,\,-2,\,-1)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $2\,a - 2\,b - c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 22. ← page 3

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((0,\,3,\,2)\,,(0,\,6,\,2))$ et pour G la famille $((-4,\,6,\,2))$: démontrons que la famille $((0,\,3,\,2)\,,(0,\,6,\,2)\,,(-4,\,6,\,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\,(3 \cdot (2) - 2 \cdot (6)) = 24 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((0,\,3,\,2)\,,(0,\,6,\,2)\,,(-4,\,6,\,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((0,\,3,\,2)\,,(0,\,6,\,2))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(0,\,3,\,2) + b\,(0,\,6,\,2)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-4,\,6,\,2))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-4,\,6,\,2)$. Ainsi :
$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(0,\,3,\,2) + b\,(0,\,6,\,2) + c\,(-4,\,6,\,2)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(0,\,3,\,2) + b\,(0,\,6,\,2) + c\,(-4,\,6,\,2) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & - & 4\,c & = & x \\ 3\,a & + & 6\,b & + & 6\,c & = & y \\ 2\,a & + & 2\,b & + & 2\,c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,a & + & 2\,b & + & 2\,c & = & z \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 3\,a & + & 6\,b & + & 6\,c & = & y \\ & & & - & 4\,c & = & x \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,a & + & 2\,b & + & 2\,c & = & z \\ & & 3\,b & + & 3\,c & = & y - \frac{3}{2}\,z \quad (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_1) \\ & & & - & 4\,c & = & x \end{array}\right.
\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{3}\,y + z \\ b & = & \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{2}\,z \\ c & = & -\frac{1}{4}\,x \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned}
s(x, y, z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\
&= a\,(0,\,3,\,2) + b\,(0,\,6,\,2) - c\,(-4,\,6,\,2) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\,y + z\right)(0,\,3,\,2) + \left(\frac{1}{4}\,x + \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{2}\,z\right)(0,\,6,\,2) - \left(-\frac{1}{4}\,x\right)(-4,\,6,\,2) \\
&= (-x,\,3\,x + y,\,x + z)\,.
\end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 23. ← page 3

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-5,\,2,\,1)\,,(6,\,6,\,-3))$ et pour G la famille $((-6,\,-4,\,6))$: démontrons que la famille $((-5,\,2,\,1)\,,(6,\,6,\,-3)\,,(-6,\,-4,\,6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -5 & 6 & -6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -6 \\ 0 & \frac{42}{5} & -\frac{32}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{24}{5} \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} \frac{42}{5} & -\frac{32}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{24}{5} \end{vmatrix} = -5\left(\frac{42}{5}\cdot\left(\frac{24}{5}\right) + \frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{32}{5}\right)\right) = -144 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-5,\,2,\,1)\,,(6,\,6,\,-3)\,,(-6,\,-4,\,6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-5,\,2,\,1)\,,(6,\,6,\,-3))$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-5,\,2,\,1) + b\,(6,\,6,\,-3)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-6,\,-4,\,6))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-6,\,-4,\,6)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-5,\,2,\,1) + b\,(6,\,6,\,-3) + c\,(-6,\,-4,\,6)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z) = a\,(-5,\,2,\,1) + b\,(6,\,6,\,-3) + c\,(-6,\,-4,\,6) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -5a & + & 6b & - & 6c & = & x \\ 2a & + & 6b & - & 4c & = & y \\ a & - & 3b & + & 6c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -5a & + & 6b & - & 6c & = & x & \\ & & \frac{42}{5}b & - & \frac{32}{5}c & = & \frac{2}{5}x + y & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{5}L_1) \\ & - & \frac{9}{5}b & + & \frac{24}{5}c & = & \frac{1}{5}x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -5a & + & 6b & - & 6c & = & x & \\ & & \frac{42}{5}b & - & \frac{32}{5}c & = & \frac{2}{5}x + y & \\ & & & & \frac{24}{7}c & = & \frac{2}{7}x + \frac{3}{14}y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{14}L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}y - \frac{1}{12}z \\ b & = & \frac{1}{9}x + \frac{1}{6}y + \frac{2}{9}z \\ c & = & \frac{1}{12}x + \frac{1}{16}y + \frac{7}{24}z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(-5,\,2,\,1) + b\,(6,\,6,\,-3) - c\,(-6,\,-4,\,6) \\ &= \left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}y - \frac{1}{12}z\right)(-5,\,2,\,1) + \left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}y + \frac{2}{9}z\right)(6,\,6,\,-3) - \left(\frac{1}{12}x + \frac{1}{16}y + \frac{7}{24}z\right)(-6,\,-4,\,6) \\ &= \left(2x + \frac{3}{4}y + \frac{7}{2}z,\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y + \frac{7}{3}z,\ -x - \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \\ -1 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 24. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 3

$$F = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\},\ \text{ et : } G = \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -10x & + & 8y & - & 16z & = & 0 \\ -6x & + & 4y & - & 12z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -6x & + & 4y & - & 12z & = & 0 & \\ -10x & + & 8y & - & 16z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 & \\ & - & 2y & - & 6z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & - & 2y & - & 6z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 & \\ & - & 2y & - & 6z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y - z \\ y & = & -3z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4a \\ y & = & -3a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker(A + \mathrm{I}_3) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\, -3,\, 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 1,\, 0), (-2,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 25. ← page 3

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((2,\, 4,\, 3), (4,\, -4,\, -6))$ et pour G la famille $((-4,\, -6,\, -3))$: démontrons que la famille $((2,\, 4,\, 3), (4,\, -4,\, -6), (-4,\, -6,\, -3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -6 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -12 & 2 \\ 0 & -12 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -12 & 3 \end{vmatrix} = 2\left(-12 \cdot (3) + 12 \cdot (2)\right) = -24 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((2,\, 4,\, 3), (4,\, -4,\, -6), (-4,\, -6,\, -3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\, 4,\, 3), (4,\, -4,\, -6)\right)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(2,\, 4,\, 3) + b\,(4,\, -4,\, -6)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\, -6,\, -3)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-4,\, -6,\, -3)$. Ainsi :
$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(2,\, 4,\, 3) + b\,(4,\, -4,\, -6) + c\,(-4,\, -6,\, -3).$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x, y, z) = a\,(2,\, 4,\, 3) + b\,(4,\, -4,\, -6) + c\,(-4,\, -6,\, -3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & 4b & - & 4c & = & x \\ 4a & - & 4b & - & 6c & = & y \\ 3a & - & 6b & - & 3c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2a & + & 4b & - & 4c & = & x & \\ & - & 12b & + & 2c & = & -2x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & - & 12b & + & 3c & = & -\frac{3}{2}x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2a & + & 4b & - & 4c & = & x & \\ & - & 12b & + & 2c & = & -2x + y & \\ & & & & c & = & \frac{1}{2}x - y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & x - \frac{3}{2}\,y + \frac{5}{3}\,z \\ b & = & \frac{1}{4}\,x - \frac{1}{4}\,y + \frac{1}{6}\,z \\ c & = & \frac{1}{2}\,x - y + z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(-4,\ -6,\ -3) \\ &= \left(\frac{1}{2}\,x - y + z\right)(-4,\ -6,\ -3) \\ &= \left(-2\,x + 4\,y - 4\,z,\ -3\,x + 6\,y - 6\,z,\ -\frac{3}{2}\,x + 3\,y - 3\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -\frac{3}{2} & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 26. ← page 3

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-1,\ 1,\ -5), (-5,\ 1,\ -1))$ et pour G la famille $((3,\ -2,\ 3))$: démontrons que la famille $((-1,\ 1,\ -5), (-5,\ 1,\ -1), (3,\ -2,\ 3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 24 & -12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 24 & -12 \end{vmatrix} = -\left(-4\cdot(-12) - 24\cdot(1)\right) = -24 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-1,\ 1,\ -5), (-5,\ 1,\ -1), (3,\ -2,\ 3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-1,\ 1,\ -5), (-5,\ 1,\ -1))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-1,\ 1,\ -5) + b\,(-5,\ 1,\ -1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((3,\ -2,\ 3))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(3,\ -2,\ 3)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-1,\ 1,\ -5) + b\,(-5,\ 1,\ -1) + c\,(3,\ -2,\ 3).$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} (x,y,z) = a\,(-1,\ 1,\ -5) + b\,(-5,\ 1,\ -1) + c\,(3,\ -2,\ 3) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & - & 5\,b & + & 3\,c & = & x \\ a & + & b & - & 2\,c & = & y \\ -5\,a & - & b & + & 3\,c & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -a & - & 5\,b & + & 3\,c & = & x & \\ & - & 4\,b & + & c & = & x + y & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & & 24\,b & - & 12\,c & = & -5\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -a & - & 5\,b & + & 3\,c & = & x & \\ & - & 4\,b & + & c & = & x + y & \\ & & & - & 6\,c & = & x + 6\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{1}{24}\,x - \frac{1}{2}\,y - \frac{7}{24}\,z \\ b & = & -\frac{7}{24}\,x - \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{24}\,z \\ c & = & -\frac{1}{6}\,x - y - \frac{1}{6}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(-1,\,1,\,-5) + b\,(-5,\,1,\,-1) - c\,(3,\,-2,\,3) \\ &= \left(-\frac{1}{24}\,x - \frac{1}{2}\,y - \frac{7}{24}\,z\right)(-1,\,1,\,-5) + \left(-\frac{7}{24}\,x - \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{24}\,z\right)(-5,\,1,\,-1) - \left(-\frac{1}{6}\,x - y - \frac{1}{6}\,z\right)(3,\,-2,\,3) \\ &= \left(2\,x + 6\,y + z,\, -\frac{2}{3}\,x - 3\,y - \frac{2}{3}\,z,\, x + 6\,y + 2\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -\frac{2}{3} & -3 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 27. ← page 3

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((5,\,0,\,-3)\,,(0,\,1,\,0))$ et pour G la famille $((-3,\,-3,\,0))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $3\,x + 5\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((5,\,0,\,-3)\,,(0,\,1,\,0)\,,(-3,\,-3,\,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\,|\ -3\ | = -9 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((5,\,0,\,-3)\,,(0,\,1,\,0)\,,(-3,\,-3,\,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((5,\,0,\,-3)\,,(0,\,1,\,0))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((5,\,0,\,-3)\,,(0,\,1,\,0))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(-3,\,-3,\,0)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $3\,x + 5\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-9\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (-3,\,-3,\,0) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((5,\,0,\,-3)\,,(0,\,1,\,0))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(5,\,0,\,-3) + b\,(0,\,1,\,0)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-3,\,-3,\,0))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-3,\,-3,\,0)$. Ainsi :
$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(5,\,0,\,-3) + b\,(0,\,1,\,0) + c\,(-3,\,-3,\,0)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned} (x, y, z) = a\,(5,\,0,\,-3) + b\,(0,\,1,\,0) + c\,(-3,\,-3,\,0) &\iff \begin{cases} 5\,a - 3\,c = x \\ b - 3\,c = y \\ -3\,a = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5\,a - 3\,c = x \\ b - 3\,c = y \\ -\frac{9}{5}\,c = \frac{3}{5}\,x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5} L_1) \end{cases} \end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{1}{3}\,z \\ b & = & -x+y-\frac{5}{3}\,z \\ c & = & -\frac{1}{3}\,x-\frac{5}{9}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(-3,\ -3,\ 0) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\,x-\frac{5}{9}\,z\right)(-3,\ -3,\ 0) \\ &= \left(x+\frac{5}{3}\,z,\ x+\frac{5}{3}\,z,\ 0\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-3,\ -3,\ 0)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $3\,a + 5\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 28. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on ← page 4 en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\ 34\,x &+& 102\,y &+& 136\,z &=& 0 \\ -\ 8\,x &+& 24\,y &+& 32\,z &=& 0 \\ -\ 2\,x &+& 6\,y &+& 8\,z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\ 2\,x &+& 6\,y &+& 8\,z &=& 0 \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -\ 8\,x &+& 24\,y &+& 32\,z &=& 0 \\ -\ 34\,x &+& 102\,y &+& 136\,z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\ 2\,x &+& 6\,y &+& 8\,z &=& 0 \\ && && 0 &=& 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ && && 0 &=& 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 17L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3y+4z \\ y &=& a \\ z &=& b \end{array}\right. \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3a+4b \\ y &=& a \\ z &=& b \end{array}\right. \end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \left\{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\ 1,\ 0), (4,\ 0,\ 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((17,\, 4,\, 1)\right).$$

Corrigé 29. ← page 4

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((0,\, 1,\, 0)\,,(5,\, 3,\, 2))$ et pour G la famille $((-6,\, 1,\, -5))$: démontrons que la famille $((0,\, 1,\, 0)\,,(5,\, 3,\, 2)\,,(-6,\, 1,\, -5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -\left(5\cdot(-5) - 2\cdot(-6)\right) = 13 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((0,\, 1,\, 0)\,,(5,\, 3,\, 2)\,,(-6,\, 1,\, -5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\, 1,\, 0)\,,(5,\, 3,\, 2)\right)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(0,\, 1,\, 0) + b\,(5,\, 3,\, 2)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-6,\, 1,\, -5)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-6,\, 1,\, -5)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(0,\, 1,\, 0) + b\,(5,\, 3,\, 2) + c\,(-6,\, 1,\, -5)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) = a\,(0,\, 1,\, 0) + b\,(5,\, 3,\, 2) + c\,(-6,\, 1,\, -5) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} & & 5\,b & - & 6\,c & = & x \\ a & + & 3\,b & + & c & = & y \\ & & 2\,b & - & 5\,c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} a & + & 3\,b & + & c & = & y & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & & 5\,b & - & 6\,c & = & x & \\ & & 2\,b & - & 5\,c & = & z & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} a & + & 3\,b & + & c & = & y & \\ & & 5\,b & - & 6\,c & = & x & \\ & & & - & \frac{13}{5}\,c & = & -\frac{2}{5}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5}L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{ccl} a & = & -\frac{17}{13}\,x + y + \frac{23}{13}\,z \\ b & = & \frac{5}{13}\,x - \frac{6}{13}\,z \\ c & = & \frac{2}{13}\,x - \frac{5}{13}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned}
p(x, y, z) &= \vec{x}_G \\
&= c\,(-6,\, 1,\, -5) \\
&= \left(\frac{2}{13}\,x - \frac{5}{13}\,z\right)(-6,\, 1,\, -5) \\
&= \left(-\frac{12}{13}\,x + \frac{30}{13}\,z,\; \frac{2}{13}\,x - \frac{5}{13}\,z,\; -\frac{10}{13}\,x + \frac{25}{13}\,z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & 0 & \frac{30}{13} \\ \frac{2}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \\ -\frac{10}{13} & 0 & \frac{25}{13} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 30. ← page 4

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-2,\,0,\,-4)\,,(0,\,5,\,-5))$ et pour G la famille $((1,\,6,\,-5))$: démontrons que la famille $((-2,\,0,\,-4)\,,(0,\,5,\,-5)\,,(1,\,6,\,-5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -2\,(5\cdot(-7)+5\cdot(6)) = 10 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((-2,\,0,\,-4)\,,(0,\,5,\,-5)\,,(1,\,6,\,-5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_G - \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-2,\,0,\,-4)\,,(0,\,5,\,-5))$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-2,\,0,\,-4) + b\,(0,\,5,\,-5)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((1,\,6,\,-5))$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(1,\,6,\,-5)$. Ainsi :
$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-2,\,0,\,-4) + b\,(0,\,5,\,-5) + c\,(1,\,6,\,-5)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(-2,\,0,\,-4) + b\,(0,\,5,\,-5) + c\,(1,\,6,\,-5) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,a & & & + & c & = & x \\ & & 5\,b & + & 6\,c & = & y \\ -4\,a & - & 5\,b & - & 5\,c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -2\,a & & & + & c & = & x & \\ & & 5\,b & + & 6\,c & = & y & \\ & - & 5\,b & - & 7\,c & = & -2\,x+z & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -2\,a & & & + & c & = & x & \\ & & 5\,b & + & 6\,c & = & y & \\ & & & - & c & = & -2\,x+y+z & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z \\ b & = & -\frac{12}{5}\,x + \frac{7}{5}\,y + \frac{6}{5}\,z \\ c & = & 2\,x - y - z \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à G parallèlement à F est :
$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_G - \vec{x}_F \\
&= -a\,(-2,\,0,\,-4) - b\,(0,\,5,\,-5) + c\,(1,\,6,\,-5) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z\right)(-2,\,0,\,-4) - \left(-\frac{12}{5}\,x + \frac{7}{5}\,y + \frac{6}{5}\,z\right)(0,\,5,\,-5) + (2\,x - y - z)\,(1,\,6,\,-5) \\
&= (3\,x - 2\,y - 2\,z,\; 24\,x - 13\,y - 12\,z,\; -20\,x + 10\,y + 9\,z)\,.
\end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 24 & -13 & -12 \\ -20 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 31. ← page 4

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((4,\,2,\,-2)\,,(-3,\,-2,\,1))$ et pour G la famille $((-3,\,0,\,-2))$: démontrons que la famille $((4,\,2,\,-2)\,,(-3,\,-2,\,1)\,,(-3,\,0,\,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{vmatrix} = 4\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 10 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((4,\,2,\,-2)\,,(-3,\,-2,\,1)\,,(-3,\,0,\,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\,2,\,-2)\,,(-3,\,-2,\,1)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(4,\,2,\,-2) + b\,(-3,\,-2,\,1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,0,\,-2)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-3,\,0,\,-2)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(4,\,2,\,-2) + b\,(-3,\,-2,\,1) + c\,(-3,\,0,\,-2)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(4,\,2,\,-2) + b\,(-3,\,-2,\,1) + c\,(-3,\,0,\,-2) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
4\,a & - & 3\,b & - & 3\,c & = & x \\
2\,a & - & 2\,b & & & = & y \\
-\,2\,a & + & b & - & 2\,c & = & z
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
4\,a & - & 3\,b & - & 3\,c & = & x & \\
 & - & \frac{1}{2}\,b & + & \frac{3}{2}\,c & = & -\frac{1}{2}\,x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1) \\
 & - & \frac{1}{2}\,b & - & \frac{7}{2}\,c & = & \frac{1}{2}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1)
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
4\,a & - & 3\,b & - & 3\,c & = & x & \\
 & - & \frac{1}{2}\,b & + & \frac{3}{2}\,c & = & -\frac{1}{2}\,x + y & \\
 & & & - & 5\,c & = & x - y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a & = & \frac{2}{5}\,x - \frac{9}{10}\,y - \frac{3}{5}\,z \\
b & = & \frac{2}{5}\,x - \frac{7}{5}\,y - \frac{3}{5}\,z \\
c & = & -\frac{1}{5}\,x + \frac{1}{5}\,y - \frac{1}{5}\,z
\end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\
&= a\,(4,\,2,\,-2) + b\,(-3,\,-2,\,1) - c\,(-3,\,0,\,-2) \\
&= \left(\frac{2}{5}\,x - \frac{9}{10}\,y - \frac{3}{5}\,z\right)(4,\,2,\,-2) + \left(\frac{2}{5}\,x - \frac{7}{5}\,y - \frac{3}{5}\,z\right)(-3,\,-2,\,1) - \left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{1}{5}\,y - \frac{1}{5}\,z\right)(-3,\,0,\,-2) \\
&= \left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{6}{5}\,y - \frac{6}{5}\,z,\ y,\ -\frac{4}{5}\,x + \frac{4}{5}\,y + \frac{1}{5}\,z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 32. ← page 4

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,0))$ et pour G la famille $((6,\,0,\,4))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $x - z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,0)\,,(6,\,0,\,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot (4) - 1 \cdot (6)) = -2 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,0)\,,(6,\,0,\,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,0))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est

libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,0)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Comme $(x,y,z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z) = a\,(6,\,0,\,4)$. Comme $(x,y,z) \in F$, on a de plus : $x - z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $2\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x,y,z) = 0 \times (6,\,0,\,4) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,0)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,1,\,0)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((6,\,0,\,4)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(6,\,0,\,4)$. Ainsi :
$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,1,\,0) + c\,(6,\,0,\,4)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z) = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,1,\,0) + c\,(6,\,0,\,4) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & + & 6\,c & = & x \\ & & b & & & = & y \\ a & & & + & 4\,c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} a & & & + & 6\,c & = & x & \\ & & b & & & = & y & \\ & & & - & 2\,c & = & -x+z & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{ccl} a & = & -2\,x + 3\,z \\ b & = & y \\ c & = & \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,z \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,1,\,0) \\ &= (-2\,x + 3\,z)\,(1,\,0,\,1) + (y)\,(0,\,1,\,0) \\ &= (-2\,x + 3\,z,\ y,\ -2\,x + 3\,z)\,. \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(6,\,0,\,4)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $a - c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 33. ← page 4

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $\left((2,\,0,\,-3)\,,(0,\,8,\,17)\right)$ et pour G la famille $\left((-1,\,0,\,1)\right)$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $12\,x - 17\,y + 8\,z = 0$, et linéairement

indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((2,\,0,\,-3)\,,(0,\,8,\,17)\,,(-1,\,0,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -3 & 17 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 8\,(2\cdot(1)+3\cdot(-1)) = -8 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((2,\,0,\,-3)\,,(0,\,8,\,17)\,,(-1,\,0,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((2,\,0,\,-3)\,,(0,\,8,\,17))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((2,\,0,\,-3)\,,(0,\,8,\,17))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z) = a\,(-1,\,0,\,1)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $12\,x - 17\,y + 8\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-4\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x,y,z) = 0\times(-1,\,0,\,1) = \vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((2,\,0,\,-3)\,,(0,\,8,\,17))$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(2,\,0,\,-3) + b\,(0,\,8,\,17)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-1,\,0,\,1))$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-1,\,0,\,1)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(2,\,0,\,-3) + b\,(0,\,8,\,17) + c\,(-1,\,0,\,1)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(2,\,0,\,-3) + b\,(0,\,8,\,17) + c\,(-1,\,0,\,1) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,a & & & - & c & = & x \\ & & 8\,b & & & = & y \\ -\,3\,a & + & 17\,b & + & c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,a & & - & c & = x \\ & 8\,b & & & = y \\ & 17\,b & - & \frac{1}{2}\,c & = \frac{3}{2}\,x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,a & & - & c & = x \\ & 8\,b & & & = y \\ & & - & \frac{1}{2}\,c & = \frac{3}{2}\,x - \frac{17}{8}\,y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{17}{8}L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -x + \frac{17}{8}\,y - z \\ b & = & \frac{1}{8}\,y \\ c & = & -3\,x + \frac{17}{4}\,y - 2\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\
&= a\,(2,\,0,\,-3) + b\,(0,\,8,\,17) - c\,(-1,\,0,\,1) \\
&= \left(-x + \frac{17}{8}\,y - z\right)(2,\,0,\,-3) + \left(\frac{1}{8}\,y\right)(0,\,8,\,17) - \left(-3\,x + \frac{17}{4}\,y - 2\,z\right)(-1,\,0,\,1) \\
&= \left(-5\,x + \frac{17}{2}\,y - 4\,z,\; y,\; 6\,x - \frac{17}{2}\,y + 5\,z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -5 & \frac{17}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -\frac{17}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-1,\,0,\,1)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $12\,a - 17\,b + 8\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 34. ← page 4

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-2,\,0,\,6)\,,(-3,\,5,\,-4))$ et pour G la famille $((2,\,-3,\,1))$: démontrons que la famille $((-2,\,0,\,6)\,,(-3,\,5,\,-4)\,,(2,\,-3,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 6 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -13 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -13 & 7 \end{vmatrix} = -2\,(5\cdot(7) + 13\cdot(-3)) = 8 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((-2,\,0,\,6)\,,(-3,\,5,\,-4)\,,(2,\,-3,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-2,\,0,\,6)\,,(-3,\,5,\,-4))$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-2,\,0,\,6) + b\,(-3,\,5,\,-4)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((2,\,-3,\,1))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\,-3,\,1)$. Ainsi :
$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-2,\,0,\,6) + b\,(-3,\,5,\,-4) + c\,(2,\,-3,\,1)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}(x,y,z) = a\,(-2,\,0,\,6) + b\,(-3,\,5,\,-4) + c\,(2,\,-3,\,1) &\iff \begin{cases} -2a - 3b + 2c = x \\ 5b - 3c = y \\ 6a - 4b + c = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2a - 3b + 2c = x \\ 5b - 3c = y \\ -13b + 7c = 3x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2a - 3b + 2c = x \\ 5b - 3c = y \\ -\frac{4}{5}c = 3x + \frac{13}{5}y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{13}{5}L_2) \end{cases}\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\begin{cases} a = -\frac{7}{8}x - \frac{5}{8}y - \frac{1}{8}z \\ b = -\frac{9}{4}x - \frac{7}{4}y - \frac{3}{4}z \\ c = -\frac{15}{4}x - \frac{13}{4}y - \frac{5}{4}z \end{cases}.$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :
$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(2,\,-3,\,1) \\ &= \left(-\frac{15}{4}x - \frac{13}{4}y - \frac{5}{4}z\right)(2,\,-3,\,1) \\ &= \left(-\frac{15}{2}x - \frac{13}{2}y - \frac{5}{2}z,\ \frac{45}{4}x + \frac{39}{4}y + \frac{15}{4}z,\ -\frac{15}{4}x - \frac{13}{4}y - \frac{5}{4}z\right). \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{45}{4} & \frac{39}{4} & \frac{15}{4} \\ -\frac{15}{4} & -\frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 35. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 4

$$F = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x} \right\}, \text{ et : } G = \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x} \right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -20x & + & 40y & + & 20z & = & 0 \\ -8x & + & 16y & + & 8z & = & 0 \\ -2x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} -2x & + & 4y & + & 2z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -8x & + & 16y & + & 8z & = & 0 & \\ -20x & + & 40y & + & 20z & = & 0 & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcll} -2x + 4y + 2z & = & 0 & \\ 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1) \end{array} \right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2y + z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array} \right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2a + b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array} \right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker(A + \mathrm{I}_3) = \{ X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X \} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} ((2, 1, 0), (1, 0, 1)),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} ((10, 4, 1)).$$

Corrigé 36. ← page 4

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et pour G la famille $((2, 1, 0))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $x = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \left| \, 1 \, \right| = 2 \neq 0.$$

   Ainsi la famille $((0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
   Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} ((0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
   Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(2, 1, 0)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $x = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $2\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (2, 1, 0) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,1,\,0),(0,\,0,\,1)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(0,\,1,\,0) + b\,(0,\,0,\,1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,1,\,0)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\,1,\,0)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(0,\,1,\,0) + b\,(0,\,0,\,1) + c\,(2,\,1,\,0)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(0,\,1,\,0) + b\,(0,\,0,\,1) + c\,(2,\,1,\,0) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 2\,c & = & x \\ a & & & + & c & = & y \\ & & b & & & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & & & + & c & = & y & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ & & & & 2\,c & = & x & \\ & & b & & & = & z & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & & & + & c & = & y & \\ & & b & & & = & z & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & & & 2\,c & = & x & \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{2}\,x + y \\ b & = & z \\ c & = & \frac{1}{2}\,x \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\
&= a\,(0,\,1,\,0) + b\,(0,\,0,\,1) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\,x + y\right)(0,\,1,\,0) + (z)\,(0,\,0,\,1) \\
&= \left(0,\, -\frac{1}{2}\,x + y,\, z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(2,\,1,\,0)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $a = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 37. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on ← page 5
en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX=-X$. Par exemple :

$$X\in\ker(A-\mathrm{I}_3)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -18x&+&54y&-&72z&=&0\\ -8x&+&24y&-&32z&=&0\\ -2x&+&6y&-&8z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcll} -2x&+&6y&-&8z&=&0&(L_3\leftrightarrow L_1)\\ -8x&+&24y&-&32z&=&0\\ -18x&+&54y&-&72z&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcll} -2x&+&6y&-&8z&=&0\\ &&&&0&=&0&(L_2\leftarrow L_2-4L_1)\\ &&&&0&=&0&(L_3\leftarrow L_3-9L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&3y-4z\\ y&=&a\\ z&=&b\end{array}\right.$$

$$\iff\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&3a-4b\\ y&=&a\\ z&=&b\end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A+\mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A+\mathrm{I}_3\right)=\left\{X\in\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid AX=-X\right\}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}9\\4\\1\end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,1,\,0),(-4,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((9,\,4,\,1)\right).$$

Corrigé 38. Un calcul direct montre que : $A^2=\begin{pmatrix}-16&68&0\\-4&17&0\\-1&4&1\end{pmatrix}$. Ainsi $A^2=A$, donc on a aussi : $f^2=f$, et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 5

$$F=\mathrm{im}(f)=\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\mid f(\vec{x})=\vec{x}\right\},\ \text{ et : } G=\ker(f)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\mid f(\vec{x})=\vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-16&68&0&1&0&0\\-4&17&0&0&1&0\\-1&4&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-16&0&0&1&\frac{17}{4}&0\\-4&0&0&0&1&0\\-1&-\frac14&1&0&0&1\end{array}\right)\qquad\left(C_2\leftarrow C_2+\tfrac{17}{4}C_1\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-16&0&0&1&\frac{17}{4}&17\\-4&0&0&0&1&4\\-1&-\frac14&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad\left(C_3\leftarrow C_3+4C_2\right)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-16\\-4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac14\end{pmatrix}\right)\qquad\text{et :}\qquad\ker(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}17\\4\\1\end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-16,\,-4,\,-1),\left(0,\,0,\,-\frac14\right)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((17,\ 4,\ 1)\right).$$

Corrigé 39. ← page 5

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((6,\ -4,\ 4),(0,\ -6,\ -4))$ et pour G la famille $((0,\ 2,\ -1))$: démontrons que la famille $((6,\ -4,\ 4),(0,\ -6,\ -4),(0,\ 2,\ -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 6\left(-6\cdot(-1)+4\cdot(2)\right) = 84 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((6,\ -4,\ 4),(0,\ -6,\ -4),(0,\ 2,\ -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((6,\ -4,\ 4),(0,\ -6,\ -4))$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a(6,\ -4,\ 4)+b(0,\ -6,\ -4)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((0,\ 2,\ -1))$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c(0,\ 2,\ -1)$. Ainsi :

$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a(6,\ -4,\ 4)+b(0,\ -6,\ -4)+c(0,\ 2,\ -1).$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}(x,y,z)=a(6,\ -4,\ 4)+b(0,\ -6,\ -4)+c(0,\ 2,\ -1) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6a & & & & & = & x \\ -4a & - & 6b & + & 2c & = & y \\ 4a & - & 4b & - & c & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 6a & & & & & = & x & \\ & - & 6b & + & 2c & = & \frac{2}{3}x+y & (L_2\leftarrow L_2+\frac{2}{3}L_1) \\ & - & 4b & - & c & = & -\frac{2}{3}x+z & (L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{3}L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 6a & & & & & = & x & \\ & - & 6b & + & 2c & = & \frac{2}{3}x+y & \\ & & & - & \frac{7}{3}c & = & -\frac{10}{9}x-\frac{2}{3}y+z & (L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{3}L_2) \end{array}\right.\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{6}x \\ b & = & \frac{1}{21}x-\frac{1}{14}y-\frac{1}{7}z \\ c & = & \frac{10}{21}x+\frac{2}{7}y-\frac{3}{7}z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F-\vec{x}_G \\ &= a(6,\ -4,\ 4)+b(0,\ -6,\ -4)-c(0,\ 2,\ -1) \\ &= \left(\frac{1}{6}x\right)(6,\ -4,\ 4)+\left(\frac{1}{21}x-\frac{1}{14}y-\frac{1}{7}z\right)(0,\ -6,\ -4)-\left(\frac{10}{21}x+\frac{2}{7}y-\frac{3}{7}z\right)(0,\ 2,\ -1) \\ &= \left(x,\ -\frac{40}{21}x-\frac{1}{7}y+\frac{12}{7}z,\ \frac{20}{21}x+\frac{4}{7}y+\frac{1}{7}z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{40}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{12}{7} \\ \frac{20}{21} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 40. Un calcul direct montre que : $A^2=\begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -3 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2=A$, donc on a aussi : $f^2=f$, ← page 5

et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & 1 & \frac{12}{5} & -\frac{6}{5} \\ -3 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{12}{5} C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{6}{5} C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & 1 & \frac{12}{5} & 6 \\ -3 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-5,\, -3,\, -1), \left(0,\, -\frac{1}{5},\, -\frac{2}{5}\right)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((6,\, 3,\, 1)\right).$$

Corrigé 41. ← page 5

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\, 0,\, -1), (0,\, 1,\, -1))$ et pour G la famille $((4,\, -5,\, 2))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $x + y + z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\, 0,\, -1), (0,\, 1,\, -1), (4,\, -5,\, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (1 \cdot (6) + 1 \cdot (-5)) = 1 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((1,\, 0,\, -1), (0,\, 1,\, -1), (4,\, -5,\, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\, 0,\, -1), (0,\, 1,\, -1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,\, 0,\, -1), (0,\, 1,\, -1))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(4,\, -5,\, 2)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $x + y + z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (4,\, -5,\, 2) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 0,\, -1)\,, (0,\, 1,\, -1)\right)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(1,\, 0,\, -1) + b\,(0,\, 1,\, -1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\, -5,\, 2)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(4,\, -5,\, 2)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(1,\, 0,\, -1) + b\,(0,\, 1,\, -1) + c\,(4,\, -5,\, 2)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(1,\,0,\,-1) + b\,(0,\,1,\,-1) + c\,(4,\,-5,\,2) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & + & 4\,c & = & x \\ & & b & - & 5\,c & = & y \\ -\,a & - & b & + & 2\,c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & & & + & 4\,c & = & x & \\ & & b & - & 5\,c & = & y & \\ & - & b & + & 6\,c & = & x+z & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & & & + & 4\,c & = & x & \\ & & b & - & 5\,c & = & y & \\ & & & & c & = & x+y+z & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -3\,x - 4\,y - 4\,z \\ b & = & 5\,x + 6\,y + 5\,z \\ c & = & x + y + z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
s(x, y, z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\
&= a\,(1,\, 0,\, -1) + b\,(0,\, 1,\, -1) - c\,(4,\, -5,\, 2) \\
&= (-3\,x - 4\,y - 4\,z)\,(1,\, 0,\, -1) + (5\,x + 6\,y + 5\,z)\,(0,\, 1,\, -1) - (x + y + z)\,(4,\, -5,\, 2) \\
&= (-7\,x - 8\,y - 8\,z,\; 10\,x + 11\,y + 10\,z,\; -4\,x - 4\,y - 3\,z)\,.
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -8 \\ 10 & 11 & 10 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(4,\, -5,\, 2)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $a + b + c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 42. ← page 5

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $\left((2,\, -4,\, -5)\,, (-4,\, -6,\, 0)\right)$ et pour G la famille $\left((1,\, 5,\, 5)\right)$: démontrons que la famille $\left((2,\, -4,\, -5)\,, (-4,\, -6,\, 0)\,, (1,\, 5,\, 5)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & -6 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -14 & 7 \\ 0 & -10 & \frac{15}{2} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -14 & 7 \\ -10 & \frac{15}{2} \end{vmatrix} = 2\left(-14 \cdot \left(\frac{15}{2}\right) + 10 \cdot (7)\right) = -70 \neq 0.$$

Ainsi la famille $\left((2,\, -4,\, -5)\,, (-4,\, -6,\, 0)\,, (1,\, 5,\, 5)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,-4,\,-5),(-4,\,-6,\,0)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(2,\,-4,\,-5) + b\,(-4,\,-6,\,0)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,5,\,5)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(1,\,5,\,5)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(2,\,-4,\,-5) + b\,(-4,\,-6,\,0) + c\,(1,\,5,\,5)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z) = a\,(2,\,-4,\,-5) + b\,(-4,\,-6,\,0) + c\,(1,\,5,\,5) \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} & 2a & - & 4b & + & c & = & x \\ - & 4a & - & 6b & + & 5c & = & y \\ - & 5a & & & + & 5c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrll} 2a & - & 4b & + & c & = & x & \\ & - & 14b & + & 7c & = & 2x+y & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & - & 10b & + & \frac{15}{2}c & = & \frac{5}{2}x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{2}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrll} 2a & - & 4b & + & c & = & x & \\ & - & 14b & + & 7c & = & 2x+y & \\ & & & & \frac{5}{2}c & = & \frac{15}{14}x - \frac{5}{7}y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{7}L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{1}{5}z \\ b & = & \frac{1}{14}x - \frac{3}{14}y + \frac{1}{5}z \\ c & = & \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{2}{5}z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(1,\,5,\,5) \\ &= \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{2}{5}z\right)(1,\,5,\,5) \\ &= \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{2}{5}z,\ \frac{15}{7}x - \frac{10}{7}y + 2z,\ \frac{15}{7}x - \frac{10}{7}y + 2z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{5} \\ \frac{15}{7} & -\frac{10}{7} & 2 \\ \frac{15}{7} & -\frac{10}{7} & 2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 43. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on ← page 5
en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} - & 6x & + & 18y & + & 12z & = & 0 \\ & & & & & 0 & = & 0 \\ - & 2x & + & 6y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} - & 2x & + & 6y & + & 4z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ & & & & & 0 & = & 0 & \\ - & 6x & + & 18y & + & 12z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrll} - & 2x & + & 6y & + & 4z & = & 0 & \\ & & & & & 0 & = & 0 & \\ & & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3y + 2z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3a + 2b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker(A + \mathrm{I}_3) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\ 1,\ 0), (2,\ 0,\ 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\ 0,\ 1)\right).$$

Corrigé 44. ← page 5

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((16,\ 0,\ 19), (0,\ 16,\ 9))$ et pour G la famille $((2,\ 3,\ 4))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $19\,x + 9\,y - 16\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((16,\ 0,\ 19), (0,\ 16,\ 9), (2,\ 3,\ 4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 16 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 3 \\ 19 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 3 \\ 0 & 9 & \frac{13}{8} \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 9 & \frac{13}{8} \end{vmatrix} = 16\left(16 \cdot \left(\frac{13}{8}\right) - 9 \cdot (3)\right) = -16 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((16,\ 0,\ 19), (0,\ 16,\ 9), (2,\ 3,\ 4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((16,\ 0,\ 19), (0,\ 16,\ 9))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((16,\ 0,\ 19), (0,\ 16,\ 9))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(2,\ 3,\ 4)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $19\,x + 9\,y - 16\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (2,\ 3,\ 4) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((16,\ 0,\ 19), (0,\ 16,\ 9))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(16,\ 0,\ 19) + b\,(0,\ 16,\ 9)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((2,\ 3,\ 4))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\ 3,\ 4)$. Ainsi :
$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(16,\ 0,\ 19) + b\,(0,\ 16,\ 9) + c\,(2,\ 3,\ 4).$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x, y, z) = a\,(16,\ 0,\ 19) + b\,(0,\ 16,\ 9) + c\,(2,\ 3,\ 4) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16\,a & & & + & 2\,c & = & x \\ & & 16\,b & + & 3\,c & = & y \\ 19\,a & + & 9\,b & + & 4\,c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16\,a & & & + & 2\,c & = & x \\ & & 16\,b & + & 3\,c & = & y \\ & & 9\,b & + & \frac{13}{8}\,c & = & -\frac{19}{16}\,x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{19}{16}L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16\,a & & & + & 2\,c & = & x \\ & & 16\,b & + & 3\,c & = & y \\ & & & - & \frac{1}{16}\,c & = & -\frac{19}{16}\,x - \frac{9}{16}\,y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{9}{16}L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\begin{cases} a = -\frac{37}{16}\,x - \frac{9}{8}\,y + 2\,z \\ b = -\frac{57}{16}\,x - \frac{13}{8}\,y + 3\,z \\ c = 19\,x + 9\,y - 16\,z \end{cases}.$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(16,\,0,\,19) + b\,(0,\,16,\,9) \\ &= \left(-\frac{37}{16}\,x - \frac{9}{8}\,y + 2\,z\right)(16,\,0,\,19) + \left(-\frac{57}{16}\,x - \frac{13}{8}\,y + 3\,z\right)(0,\,16,\,9) \\ &= (-37\,x - 18\,y + 32\,z,\; -57\,x - 26\,y + 48\,z,\; -76\,x - 36\,y + 65\,z)\,. \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -37 & -18 & 32 \\ -57 & -26 & 48 \\ -76 & -36 & 65 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(2,\,3,\,4)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $19\,a + 9\,b - 16\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 45. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 6

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \begin{cases} 14\,x - 28\,y + 28\,z = 0 \\ 6\,x - 12\,y + 12\,z = 0 \\ -2\,x + 4\,y - 4\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,x + 4\,y - 4\,z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 6\,x - 12\,y + 12\,z = 0 \\ 14\,x - 28\,y + 28\,z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2\,x + 4\,y - 4\,z = 0 \\ 0 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 7L_1) \end{cases} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 2y - 2z \\ y = a \\ z = b \end{cases} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 2a - 2b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,1,\,0),(-2,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-7,\ -3,\ 1)\right).$$

Corrigé 46. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, et on en ← page 6 déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\ 1,\ 3), (0,\ 0,\ -1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 0,\ 1)\right).$$

Corrigé 47. ← page 6

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((15,\ 0,\ 8), (0,\ 15,\ -14))$ et pour G la famille $((-2,\ -4,\ 6))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $8\,x - 14\,y - 15\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((15,\ 0,\ 8), (0,\ 15,\ -14), (-2,\ -4,\ 6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & -2 \\ 0 & 15 & -4 \\ 8 & -14 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 0 & -2 \\ 0 & 15 & -4 \\ 0 & -14 & \frac{106}{15} \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 15 & -4 \\ -14 & \frac{106}{15} \end{vmatrix} = 15\left(15 \cdot \left(\frac{106}{15}\right) + 14 \cdot (-4)\right) = 750 \neq 0.$$

   Ainsi la famille $((15,\ 0,\ 8), (0,\ 15,\ -14), (-2,\ -4,\ 6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

   Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((15,\ 0,\ 8), (0,\ 15,\ -14))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((15,\ 0,\ 8), (0,\ 15,\ -14)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.

   Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(-2,\,-4,\,6)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $8\,x - 14\,y - 15\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-50\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (-2,\,-4,\,6) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((15,\,0,\,8)\,,(0,\,15,\,-14)\right)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(15,\,0,\,8) + b\,(0,\,15,\,-14)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,-4,\,6)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-2,\,-4,\,6)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(15,\,0,\,8) + b\,(0,\,15,\,-14) + c\,(-2,\,-4,\,6)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) = a\,(15,\,0,\,8) + b\,(0,\,15,\,-14) + c\,(-2,\,-4,\,6) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 15\,a & & & - & 2\,c & = & x \\ & & 15\,b & - & 4\,c & = & y \\ 8\,a & - & 14\,b & + & 6\,c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 15\,a & & & - & 2\,c & = & x \\ & & 15\,b & - & 4\,c & = & y \\ & - & 14\,b & + & \frac{106}{15}\,c & = & -\frac{8}{15}\,x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{15} L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 15\,a & & - & 2\,c & = & x \\ & 15\,b & - & 4\,c & = & y \\ & & & \frac{10}{3}\,c & = & -\frac{8}{15}\,x + \frac{14}{15}\,y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{14}{15} L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{17}{375}\,x + \frac{14}{375}\,y + \frac{1}{25}\,z \\ b & = & -\frac{16}{375}\,x + \frac{53}{375}\,y + \frac{2}{25}\,z \\ c & = & -\frac{4}{25}\,x + \frac{7}{25}\,y + \frac{3}{10}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned}
p(x, y, z) &= \vec{x}_G \\
&= c\,(-2,\,-4,\,6) \\
&= \left(-\frac{4}{25}\,x + \frac{7}{25}\,y + \frac{3}{10}\,z\right)(-2,\,-4,\,6) \\
&= \left(\frac{8}{25}\,x - \frac{14}{25}\,y - \frac{3}{5}\,z,\ \frac{16}{25}\,x - \frac{28}{25}\,y - \frac{6}{5}\,z,\ -\frac{24}{25}\,x + \frac{42}{25}\,y + \frac{9}{5}\,z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} & -\frac{14}{25} & -\frac{3}{5} \\ \frac{16}{25} & -\frac{28}{25} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{24}{25} & \frac{42}{25} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-2,\,-4,\,6)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $8\,a - 14\,b - 15\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 48. ← page 6

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $\left((17,\,0,\,5)\,,(0,\,17,\,23)\right)$ et pour G la famille $\left((-2,\,2,\,1)\right)$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $5\,x + 23\,y - 17\,z = 0$, et linéairement

indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((17,\,0,\,5)\,,(0,\,17,\,23)\,,(-2,\,2,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 17 & 0 & -2 \\ 0 & 17 & 2 \\ 5 & 23 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 & -2 \\ 0 & 17 & 2 \\ 0 & 23 & \frac{27}{17} \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 17 & 2 \\ 23 & \frac{27}{17} \end{vmatrix} = 17\left(17 \cdot \left(\frac{27}{17}\right) - 23 \cdot (2)\right) = -323 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((17,\,0,\,5)\,,(0,\,17,\,23)\,,(-2,\,2,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((17,\,0,\,5)\,,(0,\,17,\,23))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((17,\,0,\,5)\,,(0,\,17,\,23)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(-2,\,2,\,1)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $5\,x + 23\,y - 17\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $19\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (-2,\,2,\,1) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((17,\,0,\,5)\,,(0,\,17,\,23)\right)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(17,\,0,\,5) + b\,(0,\,17,\,23)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,2,\,1)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-2,\,2,\,1)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(17,\,0,\,5) + b\,(0,\,17,\,23) + c\,(-2,\,2,\,1)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x, y, z) = a\,(17,\,0,\,5) + b\,(0,\,17,\,23) + c\,(-2,\,2,\,1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 17\,a & & & - & 2\,c & = & x \\ & & 17\,b & + & 2\,c & = & y \\ 5\,a & + & 23\,b & + & c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 17\,a & & & - & 2\,c & = & x \\ & & 17\,b & + & 2\,c & = & y \\ & & 23\,b & + & \frac{27}{17}\,c & = & -\frac{5}{17}\,x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{17} L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 17\,a & & & - & 2\,c & = & x \\ & & 17\,b & + & 2\,c & = & y \\ & & & - & \frac{19}{17}\,c & = & -\frac{5}{17}\,x - \frac{23}{17}\,y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{23}{17} L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{29}{323}\,x + \frac{46}{323}\,y - \frac{2}{19}\,z \\ b & = & -\frac{10}{323}\,x - \frac{27}{323}\,y + \frac{2}{19}\,z \\ c & = & \frac{5}{19}\,x + \frac{23}{19}\,y - \frac{17}{19}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(17,\,0,\,5) + b\,(0,\,17,\,23) - c\,(-2,\,2,\,1) \\ &= \left(\frac{29}{323}\,x + \frac{46}{323}\,y - \frac{2}{19}\,z\right)(17,\,0,\,5) + \left(-\frac{10}{323}\,x - \frac{27}{323}\,y + \frac{2}{19}\,z\right)(0,\,17,\,23) - \left(\frac{5}{19}\,x + \frac{23}{19}\,y - \frac{17}{19}\,z\right)(-2,\,2,\,1) \\ &= \left(\frac{39}{19}\,x + \frac{92}{19}\,y - \frac{68}{19}\,z,\; -\frac{20}{19}\,x - \frac{73}{19}\,y + \frac{68}{19}\,z,\; -\frac{10}{19}\,x - \frac{46}{19}\,y + \frac{53}{19}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} \frac{39}{19} & \frac{92}{19} & -\frac{68}{19} \\ -\frac{20}{19} & -\frac{73}{19} & \frac{68}{19} \\ -\frac{10}{19} & -\frac{46}{19} & \frac{53}{19} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-2,\ 2,\ 1)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $5\,a + 23\,b - 17\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 49. ← page 6

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((15,\ 0,\ 28)\,,(0,\ 5,\ -1))$ et pour G la famille $((0,\ 4,\ -4))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $28\,x - 3\,y - 15\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((15,\ 0,\ 28)\,,(0,\ 5,\ -1)\,,(0,\ 4,\ -4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 28 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 15\,(5 \cdot (-4) + 1 \cdot (4)) = -240 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((15,\ 0,\ 28)\,,(0,\ 5,\ -1)\,,(0,\ 4,\ -4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((15,\ 0,\ 28)\,,(0,\ 5,\ -1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((15,\ 0,\ 28)\,,(0,\ 5,\ -1))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(0,\ 4,\ -4)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $28\,x - 3\,y - 15\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $48\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (0,\ 4,\ -4) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((15,\ 0,\ 28)\,,(0,\ 5,\ -1))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(15,\ 0,\ 28) + b\,(0,\ 5,\ -1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((0,\ 4,\ -4))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(0,\ 4,\ -4)$. Ainsi :
$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(15,\ 0,\ 28) + b\,(0,\ 5,\ -1) + c\,(0,\ 4,\ -4)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x, y, z) = a\,(15,\ 0,\ 28) + b\,(0,\ 5,\ -1) + c\,(0,\ 4,\ -4) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 15\,a & & & & & = & x \\ & & 5\,b & + & 4\,c & = & y \\ 28\,a & - & b & - & 4\,c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 15\,a & & & & & = & x & \\ & & 5\,b & + & 4\,c & = & y & \\ & - & b & - & 4\,c & = & -\frac{28}{15}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{28}{15} L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 15\,a & & & & & = & x & \\ & & 5\,b & + & 4\,c & = & y & \\ & & & - & \frac{16}{5}\,c & = & -\frac{28}{15}\,x + \frac{1}{5}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5} L_2) \end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{15}\,x \\ b & = & -\frac{7}{15}\,x + \frac{1}{4}\,y + \frac{1}{4}\,z \\ c & = & \frac{7}{12}\,x - \frac{1}{16}\,y - \frac{5}{16}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(15,\,0,\,28) + b\,(0,\,5,\,-1) - c\,(0,\,4,\,-4) \\ &= \left(\frac{1}{15}\,x\right)(15,\,0,\,28) + \left(-\frac{7}{15}\,x + \frac{1}{4}\,y + \frac{1}{4}\,z\right)(0,\,5,\,-1) - \left(\frac{7}{12}\,x - \frac{1}{16}\,y - \frac{5}{16}\,z\right)(0,\,4,\,-4) \\ &= \left(x,\, -\frac{14}{3}\,x + \frac{3}{2}\,y + \frac{5}{2}\,z,\, \frac{14}{3}\,x - \frac{1}{2}\,y - \frac{3}{2}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{14}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{14}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(0,\,4,\,-4)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $28\,a - 3\,b - 15\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 50. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on ← page 6 en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \begin{cases} -16\,x - 42\,y + 14\,z = 0 \\ 6\,x + 16\,y - 6\,z = 0 \\ 2\,x + 6\,y - 4\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x + 6\,y - 4\,z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 6\,x + 16\,y - 6\,z = 0 \\ -16\,x - 42\,y + 14\,z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\,x + 6\,y - 4\,z = 0 \\ -2\,y + 6\,z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ 6\,y - 18\,z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\,x + 6\,y - 4\,z = 0 \\ -2\,y + 6\,z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \end{cases} \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -3y + 2z \\ y = 3z \\ z = a \end{cases} \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -7a \\ y = 3a \\ z = a \end{cases} \end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-7,\,3,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,1,\,0)\,,(1,\,0,\,1)\right).$$

Corrigé 51. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on ← page 6
en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \begin{cases} -4x - 16y - 12z = 0 \\ 2x + 8y + 6z = 0 \\ -2x - 8y - 6z = 0 \end{cases}
\iff \begin{cases} 2x + 8y + 6z = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -4x - 16y - 12z = 0 \\ -2x - 8y - 6z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + 8y + 6z = 0 \\ 0 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \\
&\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = -4y - 3z \\ y = a \\ z = b \end{cases} \\
&\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = -4a - 3b \\ y = a \\ z = b \end{cases}
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\,1,\,0)\,,(-3,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,-1,\,1)\right).$$

Corrigé 52. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 3 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, ← page 6
et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A.

C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -8 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{5}{4} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{5}{4}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} & -2 & 1 & \frac{5}{4} & -2 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -3 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + \tfrac{4}{3}C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\ -3,\ 2), \left(0,\ -\frac{3}{4},\ \frac{3}{2}\right)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{4}{3},\ 1,\ -\frac{1}{3}\right)\right).$$

Corrigé 53. ← page 7

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((5,\ 0,\ 2), (0,\ 5,\ 3))$ et pour G la famille $((6,\ -1,\ 6))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $2\,x + 3\,y - 5\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((5,\ 0,\ 2), (0,\ 5,\ 3), (6,\ -1,\ 6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & \frac{18}{5} \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & \frac{18}{5} \end{vmatrix} = 5\left(5 \cdot \left(\frac{18}{5}\right) - 3 \cdot (-1)\right) = 105 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((5,\ 0,\ 2), (0,\ 5,\ 3), (6,\ -1,\ 6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((5,\ 0,\ 2), (0,\ 5,\ 3))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((5,\ 0,\ 2), (0,\ 5,\ 3))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(6,\ -1,\ 6)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $2\,x + 3\,y - 5\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-21\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (6,\ -1,\ 6) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.

Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((5,\ 0,\ 2), (0,\ 5,\ 3))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(5,\ 0,\ 2) + b\,(0,\ 5,\ 3)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((6,\ -1,\ 6))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(6,\ -1,\ 6)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(5,\ 0,\ 2) + b\,(0,\ 5,\ 3) + c\,(6,\ -1,\ 6)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x, y, z) = a\,(5,\ 0,\ 2) + b\,(0,\ 5,\ 3) + c\,(6,\ -1,\ 6) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\,a & & & + & 6\,c & = & x \\ & & 5\,b & - & c & = & y \\ 2\,a & + & 3\,b & + & 6\,c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\,a & & & + & 6\,c & = & x \\ & & 5\,b & - & c & = & y \\ & & 3\,b & + & \frac{18}{5}\,c & = & -\frac{2}{5}\,x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5}L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\,a & & & + & 6\,c & = & x \\ & & 5\,b & - & c & = & y \\ & & & & \frac{21}{5}\,c & = & -\frac{2}{5}\,x - \frac{3}{5}\,y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{5}L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{11}{35}\,x + \frac{6}{35}\,y - \frac{2}{7}\,z \\ b & = & -\frac{2}{105}\,x + \frac{6}{35}\,y + \frac{1}{21}\,z \\ c & = & -\frac{2}{21}\,x - \frac{1}{7}\,y + \frac{5}{21}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(5,\ 0,\ 2) + b\,(0,\ 5,\ 3) \\ &= \left(\frac{11}{35}\,x + \frac{6}{35}\,y - \frac{2}{7}\,z\right)(5,\ 0,\ 2) + \left(-\frac{2}{105}\,x + \frac{6}{35}\,y + \frac{1}{21}\,z\right)(0,\ 5,\ 3) \\ &= \left(\frac{11}{7}\,x + \frac{6}{7}\,y - \frac{10}{7}\,z,\ -\frac{2}{21}\,x + \frac{6}{7}\,y + \frac{5}{21}\,z,\ \frac{4}{7}\,x + \frac{6}{7}\,y - \frac{3}{7}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{10}{7} \\ -\frac{2}{21} & \frac{6}{7} & \frac{5}{21} \\ \frac{4}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(6,\ -1,\ 6)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $2\,a + 3\,b - 5\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 54. ← page 7

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 1))$ et pour G la famille $((2,\ 3,\ 6))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $x + y - z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 1), (2,\ 3,\ 6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot (4) - 1 \cdot (3)) = 1 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,1)\,,(2,\,3,\,6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,1)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Comme $(x,y,z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z) = a\,(2,\,3,\,6)$. Comme $(x,y,z) \in F$, on a de plus : $x+y-z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z) = 0 \times (2,\,3,\,6) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,1)\,,(0,\,1,\,1)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,1,\,1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,3,\,6)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\,3,\,6)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,1,\,1) + c\,(2,\,3,\,6)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,1,\,1) + c\,(2,\,3,\,6) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & + & 2\,c & = & x \\ & & b & + & 3\,c & = & y \\ a & + & b & + & 6\,c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccl} a & & + & 2\,c & = & x \\ & b & + & 3\,c & = & y \\ & b & + & 4\,c & = & -x+z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccl} a & & + & 2\,c & = & x \\ & b & + & 3\,c & = & y \\ & & & c & = & -x-y+z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{ccl} a & = & 3\,x + 2\,y - 2\,z \\ b & = & 3\,x + 4\,y - 3\,z \\ c & = & -x - y + z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\
&= a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,1,\,1) \\
&= (3\,x + 2\,y - 2\,z)\,(1,\,0,\,1) + (3\,x + 4\,y - 3\,z)\,(0,\,1,\,1) \\
&= (3\,x + 2\,y - 2\,z,\, 3\,x + 4\,y - 3\,z,\, 6\,x + 6\,y - 5\,z)\,.
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 6 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(2,\,3,\,6)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $a+b-c=0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 55. ← page 7

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-3,\,-4,\,3)\,,(3,\,6,\,-1))$ et pour G la famille $((-1,\,-6,\,1))$: démontrons que la famille $((-3,\,-4,\,3)\,,(3,\,6,\,-1)\,,(-1,\,-6,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{14}{3} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & -\frac{14}{3} \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -3\left(2\cdot(0) - 2\cdot\left(-\frac{14}{3}\right)\right) = -28 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-3,\,-4,\,3)\,,(3,\,6,\,-1)\,,(-1,\,-6,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_G - \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,-4,\,3)\,,(3,\,6,\,-1)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-3,\,-4,\,3) + b\,(3,\,6,\,-1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-6,\,1)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-1,\,-6,\,1)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-3,\,-4,\,3) + b\,(3,\,6,\,-1) + c\,(-1,\,-6,\,1)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(-3,\,-4,\,3) + b\,(3,\,6,\,-1) + c\,(-1,\,-6,\,1) &\iff \begin{cases} -3a + 3b - c = x \\ -4a + 6b - 6c = y \\ 3a - b + c = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3a + 3b - c = x \\ 2b - \frac{14}{3}c = -\frac{4}{3}x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{3}L_1) \\ 2b = x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3a + 3b - c = x \\ 2b - \frac{14}{3}c = -\frac{4}{3}x + y \\ \frac{14}{3}c = \frac{7}{3}x - y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases}
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{14}y + \frac{3}{7}z \\ b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ c = \frac{1}{2}x - \frac{3}{14}y + \frac{3}{14}z \end{cases}.$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_G - \vec{x}_F \\
&= -a\,(-3,\,-4,\,3) - b\,(3,\,6,\,-1) + c\,(-1,\,-6,\,1) \\
&= -\left(\frac{1}{14}y + \frac{3}{7}z\right)(-3,\,-4,\,3) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z\right)(3,\,6,\,-1) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{14}y + \frac{3}{14}z\right)(-1,\,-6,\,1) \\
&= \left(-2\,x + \frac{3}{7}y - \frac{3}{7}z,\; -6\,x + \frac{11}{7}y - \frac{18}{7}z,\; x - \frac{3}{7}y - \frac{4}{7}z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ -6 & \frac{11}{7} & -\frac{18}{7} \\ 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 56. ← page 7

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\,2,\,-6)\,,(-4,\,-2,\,4))$ et pour G la famille $((2,\,0,\,5))$: démontrons que la famille

$((1,\,2,\,-6)\,,(-4,\,-2,\,4)\,,(2,\,0,\,5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & -20 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -20 & 17 \end{vmatrix} = (6\cdot(17) + 20\cdot(-4)) = 22 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((1,\,2,\,-6)\,,(-4,\,-2,\,4)\,,(2,\,0,\,5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,2,\,-6)\,,(-4,\,-2,\,4)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(1,\,2,\,-6) + b\,(-4,\,-2,\,4)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,0,\,5)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\,0,\,5)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(1,\,2,\,-6) + b\,(-4,\,-2,\,4) + c\,(2,\,0,\,5)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(1,\,2,\,-6) + b\,(-4,\,-2,\,4) + c\,(2,\,0,\,5) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & - & 4\,b & + & 2\,c & = & x \\ 2\,a & - & 2\,b & & & = & y \\ -\,6\,a & + & 4\,b & + & 5\,c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & - & 4\,b & + & 2\,c & = & x & \\ & & 6\,b & - & 4\,c & = & -2\,x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & - & 20\,b & + & 17\,c & = & 6\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & - & 4\,b & + & 2\,c & = & x & \\ & & 6\,b & - & 4\,c & = & -2\,x + y & \\ & & & & \frac{11}{3}\,c & = & -\frac{2}{3}\,x + \frac{10}{3}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{10}{3}L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{5}{11}\,x + \frac{14}{11}\,y + \frac{2}{11}\,z \\ b & = & -\frac{5}{11}\,x + \frac{17}{22}\,y + \frac{2}{11}\,z \\ c & = & -\frac{2}{11}\,x + \frac{10}{11}\,y + \frac{3}{11}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\
&= a\,(1,\,2,\,-6) + b\,(-4,\,-2,\,4) - c\,(2,\,0,\,5) \\
&= \left(-\frac{5}{11}\,x + \frac{14}{11}\,y + \frac{2}{11}\,z\right)(1,\,2,\,-6) + \left(-\frac{5}{11}\,x + \frac{17}{22}\,y + \frac{2}{11}\,z\right)(-4,\,-2,\,4) - \left(-\frac{2}{11}\,x + \frac{10}{11}\,y + \frac{3}{11}\,z\right)(2,\,0,\,5) \\
&= \left(\frac{19}{11}\,x - \frac{40}{11}\,y - \frac{12}{11}\,z,\; y,\; \frac{20}{11}\,x - \frac{100}{11}\,y - \frac{19}{11}\,z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} \frac{19}{11} & -\frac{40}{11} & -\frac{12}{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{20}{11} & -\frac{100}{11} & -\frac{19}{11} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 57. ← page 7

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-6,\,2,\,-6)\,,(6,\,-1,\,-6))$ et pour G la famille $((2,\,-2,\,-2))$: démontrons que la famille $((-6,\,2,\,-6)\,,(6,\,-1,\,-6)\,,(2,\,-2,\,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -6 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -6 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ -12 & -4 \end{vmatrix} = -6\left(1\cdot(-4) + 12\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = 120 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-6,\,2,\,-6)\,,(6,\,-1,\,-6)\,,(2,\,-2,\,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-6,\ 2,\ -6), (6,\ -1,\ -6)\right)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-6,\ 2,\ -6) + b\,(6,\ -1,\ -6)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\ -2,\ -2)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\ -2,\ -2)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-6,\ 2,\ -6) + b\,(6,\ -1,\ -6) + c\,(2,\ -2,\ -2)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x, y, z) = a\,(-6,\ 2,\ -6) + b\,(6,\ -1,\ -6) + c\,(2,\ -2,\ -2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6a & + & 6b & + & 2c & = & x \\ 2a & - & b & - & 2c & = & y \\ -6a & - & 6b & - & 2c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -6a & + & 6b & + & 2c & = & x & \\ & & b & - & \frac{4}{3}c & = & \frac{1}{3}x + y & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_1) \\ & - & 12b & - & 4c & = & -x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -6a & + & 6b & + & 2c & = & x & \\ & & b & - & \frac{4}{3}c & = & \frac{1}{3}x + y & \\ & & & - & 20c & = & 3x + 12y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + 12L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{12}x - \frac{1}{12}z \\ b & = & \frac{2}{15}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{15}z \\ c & = & -\frac{3}{20}x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{20}z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(-6,\ 2,\ -6) + b\,(6,\ -1,\ -6) - c\,(2,\ -2,\ -2) \\ &= \left(-\frac{1}{12}x - \frac{1}{12}z\right)(-6,\ 2,\ -6) + \left(\frac{2}{15}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{15}z\right)(6,\ -1,\ -6) - \left(-\frac{3}{20}x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{20}z\right)(2,\ -2,\ -2) \\ &= \left(\frac{8}{5}x + \frac{12}{5}y + \frac{1}{5}z,\ -\frac{3}{5}x - \frac{7}{5}y - \frac{1}{5}z,\ -\frac{3}{5}x - \frac{12}{5}y + \frac{4}{5}z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 58. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

← page 7

$$F = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 12z & = & 0 \\ -2x & - & 6z & = & 0 \\ -2x & - & 6z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -2x & - & 6z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 4x & + & 12z & = & 0 & \\ -2x & - & 6z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcll} -2x & - & 6z & = & 0 & \\ & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A-\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A+\mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A+\mathrm{I}_3\right)=\left\{X\in\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid AX=-X\right\}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,1,\,0),(-3,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,1,\,1)\right).$$

Corrigé 59. ← page 7

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((2,\,0,\,-9),(0,\,1,\,3))$ et pour G la famille $((0,\,-2,\,-5))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $9\,x-6\,y+2\,z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((2,\,0,\,-9),(0,\,1,\,3),(0,\,-2,\,-5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\-9&3&-5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-2\\3&-5\end{vmatrix}=2\left(1\cdot(-5)-3\cdot(-2)\right)=2\neq0.$$
Ainsi la famille $((2,\,0,\,-9),(0,\,1,\,3),(0,\,-2,\,-5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((2,\,0,\,-9),(0,\,1,\,3))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,0,\,-9),(0,\,1,\,3)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(0,\,-2,\,-5)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $9\,x-6\,y+2\,z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $2\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(0,\,-2,\,-5)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_G-\vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,0,\,-9),(0,\,1,\,3)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(2,\,0,\,-9)+b\,(0,\,1,\,3)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,-2,\,-5)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(0,\,-2,\,-5)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(2,\,0,\,-9)+b\,(0,\,1,\,3)+c\,(0,\,-2,\,-5).$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z)=a\,(2,\,0,\,-9)+b\,(0,\,1,\,3)+c\,(0,\,-2,\,-5)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2\,a&&&&&=&x\\&&b&-&2\,c&=&y\\-\,9\,a&+&3\,b&-&5\,c&=&z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcll}2\,a&&&&&=&x&\\&&b&-&2\,c&=&y&\\&&3\,b&-&5\,c&=&\frac{9}{2}\,x+z&(L_3\leftarrow L_3+\frac{9}{2}L_1)\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcll}2\,a&&&&&=&x&\\&&b&-&2\,c&=&y&\\&&&&c&=&\frac{9}{2}\,x-3\,y+z&(L_3\leftarrow L_3-3L_2)\end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :
$$\begin{cases} a &= \frac{1}{2}\,x \\ b &= 9\,x - 5\,y + 2\,z \\ c &= \frac{9}{2}\,x - 3\,y + z \end{cases}.$$
Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à G parallèlement à F est :
$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_G - \vec{x}_F \\ &= -a\,(2,\,0,\,-9) - b\,(0,\,1,\,3) + c\,(0,\,-2,\,-5) \\ &= -\left(\frac{1}{2}\,x\right)(2,\,0,\,-9) - (9\,x - 5\,y + 2\,z)\,(0,\,1,\,3) + \left(\frac{9}{2}\,x - 3\,y + z\right)(0,\,-2,\,-5) \\ &= (-x,\,-18\,x + 11\,y - 4\,z,\,-45\,x + 30\,y - 11\,z)\,. \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -18 & 11 & -4 \\ -45 & 30 & -11 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(0, -2, -5)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $9\,a - 6\,b + 2\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 60. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 7
$$F = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$
Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :
$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \begin{cases} -22\,x + 66\,y + 88\,z = 0 \\ -4\,x + 12\,y + 16\,z = 0 \\ -2\,x + 6\,y + 8\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,x + 6\,y + 8\,z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -4\,x + 12\,y + 16\,z = 0 \\ -22\,x + 66\,y + 88\,z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2\,x + 6\,y + 8\,z = 0 \\ 0 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 11L_1) \end{cases} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 3y + 4z \\ y = a \\ z = b \end{cases} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 3a + 4b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \end{aligned}$$
De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :
$$\ker(A + \mathrm{I}_3) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
En conclusion, f est la symétrie par rapport à :
$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,1,\,0),(4,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :
$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((11,\, 2,\, 1)\right).$$

Corrigé 61. ← page 7

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((4,\,0,\,5)\,,(0,\,20,\,13))$ et pour G la famille $((-3,\,2,\,-3))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $25\,x+13\,y-20\,z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((4,\,0,\,5)\,,(0,\,20,\,13)\,,(-3,\,2,\,-3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 20 & 2 \\ 5 & 13 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 20 & 2 \\ 0 & 13 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 20 & 2 \\ 13 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 4\left(20\cdot\left(\frac{3}{4}\right) - 13\cdot(2)\right) = -44 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((4,\,0,\,5)\,,(0,\,20,\,13)\,,(-3,\,2,\,-3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((4,\,0,\,5)\,,(0,\,20,\,13))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\,0,\,5)\,,(0,\,20,\,13)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(-3,\,2,\,-3)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $25\,x+13\,y-20\,z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $11\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(-3,\,2,\,-3)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $p(x,y,z)=\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\,0,\,5)\,,(0,\,20,\,13)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(4,\,0,\,5)+b\,(0,\,20,\,13)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,2,\,-3)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-3,\,2,\,-3)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(4,\,0,\,5)+b\,(0,\,20,\,13)+c\,(-3,\,2,\,-3)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z)=a\,(4,\,0,\,5)+b\,(0,\,20,\,13)+c\,(-3,\,2,\,-3)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & & & - & 3\,c & = & x \\ & & 20\,b & + & 2\,c & = & y \\ 5\,a & + & 13\,b & - & 3\,c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcl} 4\,a & & - & 3\,c & = & x \\ & 20\,b & + & 2\,c & = & y \\ & 13\,b & + & \frac{3}{4}\,c & = & -\frac{5}{4}\,x+z \quad (L_3\leftarrow L_3-\frac{5}{4}L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcl} 4\,a & & - & 3\,c & = & x \\ & 20\,b & + & 2\,c & = & y \\ & & - & \frac{11}{20}\,c & = & -\frac{5}{4}\,x-\frac{13}{20}\,y+z \quad (L_3\leftarrow L_3-\frac{13}{20}L_2) \end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{43}{22}\,x+\frac{39}{44}\,y-\frac{15}{11}\,z \\ b & = & -\frac{5}{22}\,x-\frac{3}{44}\,y+\frac{2}{11}\,z \\ c & = & \frac{25}{11}\,x+\frac{13}{11}\,y-\frac{20}{11}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(-3,\,2,\,-3) \\ &= \left(\frac{25}{11}\,x + \frac{13}{11}\,y - \frac{20}{11}\,z\right)(-3,\,2,\,-3) \\ &= \left(-\frac{75}{11}\,x - \frac{39}{11}\,y + \frac{60}{11}\,z,\ \frac{50}{11}\,x + \frac{26}{11}\,y - \frac{40}{11}\,z,\ -\frac{75}{11}\,x - \frac{39}{11}\,y + \frac{60}{11}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{75}{11} & -\frac{39}{11} & \frac{60}{11} \\ \frac{50}{11} & \frac{26}{11} & -\frac{40}{11} \\ -\frac{75}{11} & -\frac{39}{11} & \frac{60}{11} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-3,\,2,\,-3)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $25\,a + 13\,b - 20\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 62. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 28 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 8

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps.* Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 28 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftarrow C_2 - \tfrac{7}{2}C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((8,\,-2,\,-1),\left(0,\,0,\,-\frac{1}{2}\right)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-7,\,2,\,1)\right).$$

Corrigé 63. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -14 & 0 \\ 4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, ← page 8 et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et} : G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -14 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(C_2 \leftarrow C_2 + \tfrac{7}{4}C_1\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} & -7 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2\right)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} : \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((8,\, 4,\, -1), \left(0,\, 0,\, \frac{1}{4}\right)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-7,\, -4,\, 1)\right).$$

Corrigé 64. ← page 8

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-2,\, 1,\, -6), (2,\, 0,\, 3))$ et pour G la famille $((3,\, 1,\, 2))$: démontrons que la famille $((-2,\, 1,\, -6), (2,\, 0,\, 3), (3,\, 1,\, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -2\left(1 \cdot (-7) + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)\right) = -1 \neq 0.$$

   Ainsi la famille $((-2,\, 1,\, -6), (2,\, 0,\, 3), (3,\, 1,\, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
   Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-2,\, 1,\, -6), (2,\, 0,\, 3))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-2,\, 1,\, -6) + b\,(2,\, 0,\, 3)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((3,\, 1,\, 2))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(3,\, 1,\, 2)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-2,\, 1,\, -6) + b\,(2,\, 0,\, 3) + c\,(3,\, 1,\, 2).$$

   On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans

l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z) = a\,(-2,\,1,\,-6) + b\,(2,\,0,\,3) + c\,(3,\,1,\,2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\,2\,a & + & 2\,b & + & 3\,c & = & x \\ a & & & + & c & = & y \\ -\,6\,a & + & 3\,b & + & 2\,c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\,2\,a & + & 2\,b & + & 3\,c & = & x & \\ & & b & + & \frac{5}{2}\,c & = & \frac{1}{2}\,x + y & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1) \\ & - & 3\,b & - & 7\,c & = & -3\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -\,2\,a & + & 2\,b & + & 3\,c & = & x & \\ & & b & + & \frac{5}{2}\,c & = & \frac{1}{2}\,x + y & \\ & & & & \frac{1}{2}\,c & = & -\frac{3}{2}\,x + 3\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3\,x - 5\,y - 2\,z \\ b & = & 8\,x - 14\,y - 5\,z \\ c & = & -3\,x + 6\,y + 2\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(-2,\,1,\,-6) + b\,(2,\,0,\,3) - c\,(3,\,1,\,2) \\ &= (3\,x - 5\,y - 2\,z)\,(-2,\,1,\,-6) + (8\,x - 14\,y - 5\,z)\,(2,\,0,\,3) - (-3\,x + 6\,y + 2\,z)\,(3,\,1,\,2) \\ &= (19\,x - 36\,y - 12\,z,\; 6\,x - 11\,y - 4\,z,\; 12\,x - 24\,y - 7\,z)\,. \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} 19 & -36 & -12 \\ 6 & -11 & -4 \\ 12 & -24 & -7 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 65. ← page 8

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((3,\,0,\,-5)\,,(0,\,2,\,-1))$ et pour G la famille $((0,\,2,\,-2))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $10\,x + 3\,y + 6\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((3,\,0,\,-5)\,,(0,\,2,\,-1)\,,(0,\,2,\,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,(2\cdot(-2) + 1\cdot(2)) = -6 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((3,\,0,\,-5)\,,(0,\,2,\,-1)\,,(0,\,2,\,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((3,\,0,\,-5)\,,(0,\,2,\,-1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((3,\,0,\,-5)\,,(0,\,2,\,-1))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Comme $(x,y,z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z) = a\,(0,\,2,\,-2)$. Comme $(x,y,z) \in F$, on a de plus : $10\,x + 3\,y + 6\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-6\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x,y,z) = 0 \times (0,\,2,\,-2) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F =$

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,0,\,-5)\,,(0,\,2,\,-1)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(3,\,0,\,-5)+b\,(0,\,2,\,-1)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\,2,\,-2)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(0,\,2,\,-2)$. Ainsi :

$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G = a\,(3,\,0,\,-5)+b\,(0,\,2,\,-1)+c\,(0,\,2,\,-2)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z)=a\,(3,\,0,\,-5)+b\,(0,\,2,\,-1)+c\,(0,\,2,\,-2) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,a & & & & & = & x\\ & & 2\,b & + & 2\,c & = & y\\ -\;5\,a & - & b & - & 2\,c & = & z\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 3\,a & & & = & x\\ 2\,b & + & 2\,c & = & y\\ -\;b & - & 2\,c & = & \frac{5}{3}x+z \quad (L_3\leftarrow L_3+\frac{5}{3}L_1)\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 3\,a & & & = & x\\ 2\,b & + & 2\,c & = & y\\ & - & c & = & \frac{5}{3}\,x+\frac{1}{2}\,y+z \quad (L_3\leftarrow L_3+\frac{1}{2}L_2)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{3}\,x\\ b & = & \frac{5}{3}\,x+y+z\\ c & = & -\frac{5}{3}\,x-\frac{1}{2}\,y-z\end{array}\right.\,.$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_F-\vec{x}_G\\
&= a\,(3,\,0,\,-5)+b\,(0,\,2,\,-1)-c\,(0,\,2,\,-2)\\
&= \left(\frac{1}{3}\,x\right)(3,\,0,\,-5)+\left(\frac{5}{3}\,x+y+z\right)(0,\,2,\,-1)-\left(-\frac{5}{3}\,x-\frac{1}{2}\,y-z\right)(0,\,2,\,-2)\\
&= \left(x,\,\frac{20}{3}\,x+3\,y+4\,z,\,-\frac{20}{3}\,x-2\,y-3\,z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ \frac{20}{3} & 3 & 4\\ -\frac{20}{3} & -2 & -3\end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F=(a,b,c)$, où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G=d\,(0,\,2,\,-2)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $10\,a+3\,b+6\,c=0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 66. Un calcul direct montre que : $A^2=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 12\\ 4 & 1 & -12\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$. Ainsi $A^2=A$, donc on a aussi : $f^2=f$, ← page 8
et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F=\mathrm{im}(f)=\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x})=\vec{x}\right\},\ \text{et} : G=\ker(f)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x})=\vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A.

C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -12 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\, 4,\, -1), (0,\, 1,\, 0)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\, -4,\, 1)\right).$$

Corrigé 67. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on ← page 8 en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \begin{cases} 12x - 42y = 0 \\ 4x - 14y = 0 \\ 2x - 6y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 6y - 2z = 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 4x - 14y = 0 \\ 12x - 42y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 6y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ -6y + 12z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 6y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3y + z \\ y = 2z \\ z = a \end{cases}$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 7a \\ y = 2a \\ z = a \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((7,\, 2,\, 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\ 1,\ 0),(0,\ 0,\ 1)\right).$$

Corrigé 68. ← page 8

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\ 0,\ 0),(0,\ 2,\ 5))$ et pour G la famille $((-4,\ -3,\ 2))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $5\,y-2\,z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\ 0,\ 0),(0,\ 2,\ 5),(-4,\ -3,\ 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (2\cdot(2)-5\cdot(-3)) = 19 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((1,\ 0,\ 0),(0,\ 2,\ 5),(-4,\ -3,\ 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\ 0,\ 0),(0,\ 2,\ 5))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 0,\ 0),(0,\ 2,\ 5)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(-4,\ -3,\ 2)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $5\,y-2\,z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-19\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(-4,\ -3,\ 2)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\ 0,\ 0),(0,\ 2,\ 5)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(1,\ 0,\ 0)+b\,(0,\ 2,\ 5)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\ -3,\ 2)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-4,\ -3,\ 2)$. Ainsi :

$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(1,\ 0,\ 0)+b\,(0,\ 2,\ 5)+c\,(-4,\ -3,\ 2).$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}(x,y,z)=a\,(1,\ 0,\ 0)+b\,(0,\ 2,\ 5)+c\,(-4,\ -3,\ 2) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & - & 4\,c & = & x \\ & & 2\,b & - & 3\,c & = & y \\ & & 5\,b & + & 2\,c & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & - & 4\,c & = & x \\ & & 2\,b & - & 3\,c & = & y \\ & & & & \frac{19}{2}\,c & = & -\frac{5}{2}\,y+z \quad (L_3\leftarrow L_3-\frac{5}{2}L_2) \end{array}\right.\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & x-\frac{20}{19}\,y+\frac{8}{19}\,z \\ b & = & \frac{2}{19}\,y+\frac{3}{19}\,z \\ c & = & -\frac{5}{19}\,y+\frac{2}{19}\,z \end{array}\right..$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F-\vec{x}_G \\ &= a\,(1,\ 0,\ 0)+b\,(0,\ 2,\ 5)-c\,(-4,\ -3,\ 2) \\ &= \left(x-\frac{20}{19}\,y+\frac{8}{19}\,z\right)(1,\ 0,\ 0)+\left(\frac{2}{19}\,y+\frac{3}{19}\,z\right)(0,\ 2,\ 5)-\left(-\frac{5}{19}\,y+\frac{2}{19}\,z\right)(-4,\ -3,\ 2) \\ &= \left(x-\frac{40}{19}\,y+\frac{16}{19}\,z,\ -\frac{11}{19}\,y+\frac{12}{19}\,z,\ \frac{20}{19}\,y+\frac{11}{19}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{40}{19} & \frac{16}{19} \\ 0 & -\frac{11}{19} & \frac{12}{19} \\ 0 & \frac{20}{19} & \frac{11}{19} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-4,\ -3,\ 2)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $5\,b - 2\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 69. ← page 8

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((4,\ -6,\ 1)\,, (2,\ 3,\ -6))$ et pour G la famille $((-4,\ 3,\ 1))$: démontrons que la famille $((4,\ -6,\ 1)\,, (2,\ 3,\ -6)\,, (-4,\ 3,\ 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 3 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -\frac{13}{2} & 2 \end{vmatrix} = 4\left(6 \cdot (2) + \frac{13}{2} \cdot (-3)\right) = -30 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((4,\ -6,\ 1)\,, (2,\ 3,\ -6)\,, (-4,\ 3,\ 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((4,\ -6,\ 1)\,, (2,\ 3,\ -6))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(4,\ -6,\ 1) + b\,(2,\ 3,\ -6)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-4,\ 3,\ 1))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-4,\ 3,\ 1)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(4,\ -6,\ 1) + b\,(2,\ 3,\ -6) + c\,(-4,\ 3,\ 1)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) = a\,(4,\ -6,\ 1) + b\,(2,\ 3,\ -6) + c\,(-4,\ 3,\ 1) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & + & 2\,b & - & 4\,c & = & x \\ -\ 6\,a & + & 3\,b & + & 3\,c & = & y \\ a & - & 6\,b & + & c & = & z \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 4\,a & + & 2\,b & - & 4\,c & = & x & \\ & & 6\,b & - & 3\,c & = & \frac{3}{2}\,x + y & (L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2} L_1) \\ & - & \frac{13}{2}\,b & + & 2\,c & = & -\frac{1}{4}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4} L_1) \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 4\,a & + & 2\,b & - & 4\,c & = & x & \\ & & 6\,b & - & 3\,c & = & \frac{3}{2}\,x + y & \\ & & & - & \frac{5}{4}\,c & = & \frac{11}{8}\,x + \frac{13}{12}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{13}{12} L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{7}{10}\,x - \frac{11}{15}\,y - \frac{3}{5}\,z \\ b & = & -\frac{3}{10}\,x - \frac{4}{15}\,y - \frac{2}{5}\,z \\ c & = & -\frac{11}{10}\,x - \frac{13}{15}\,y - \frac{4}{5}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned}
p(x, y, z) &= \vec{x}_G \\
&= c\,(-4,\ 3,\ 1) \\
&= \left(-\frac{11}{10}\,x - \frac{13}{15}\,y - \frac{4}{5}\,z\right)(-4,\ 3,\ 1) \\
&= \left(\frac{22}{5}\,x + \frac{52}{15}\,y + \frac{16}{5}\,z,\ -\frac{33}{10}\,x - \frac{13}{5}\,y - \frac{12}{5}\,z,\ -\frac{11}{10}\,x - \frac{13}{15}\,y - \frac{4}{5}\,z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} \frac{22}{5} & \frac{52}{15} & \frac{16}{5} \\ -\frac{33}{10} & -\frac{13}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{10} & -\frac{13}{15} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 70. ← page 9

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((3,\,-3,\,-3)\,,(4,\,6,\,-5))$ et pour G la famille $((-3,\,1,\,1))$: démontrons que la famille $((3,\,-3,\,-3)\,,(4,\,6,\,-5)\,,(-3,\,1,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -3 & 6 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 10 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,(10\cdot(-2)+1\cdot(-2)) = -66 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((3,\,-3,\,-3)\,,(4,\,6,\,-5)\,,(-3,\,1,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((3,\,-3,\,-3)\,,(4,\,6,\,-5))$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(3,\,-3,\,-3)+b\,(4,\,6,\,-5)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((-3,\,1,\,1))$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-3,\,1,\,1)$. Ainsi :

$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(3,\,-3,\,-3)+b\,(4,\,6,\,-5)+c\,(-3,\,1,\,1)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z)=a\,(3,\,-3,\,-3)+b\,(4,\,6,\,-5)+c\,(-3,\,1,\,1) \iff \begin{cases} 3a+4b-3c=x \\ -3a+6b+c=y \\ -3a-5b+c=z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3a+4b-3c=x \\ 10b-2c=x+y & (L_2\leftarrow L_2+L_1) \\ -b-2c=x+z & (L_3\leftarrow L_3+L_1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3a+4b-3c=x \\ 10b-2c=x+y \\ -\frac{11}{5}\,c=\frac{11}{10}\,x+\frac{1}{10}\,y+z & (L_3\leftarrow L_3+\frac{1}{10}L_2) \end{cases}$$

De là on déduit aisément :

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{6}\,x-\frac{1}{6}\,y-\frac{1}{3}\,z \\ b = \frac{1}{11}\,y-\frac{1}{11}\,z \\ c = -\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{22}\,y-\frac{5}{11}\,z \end{cases}.$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F-\vec{x}_G \\ &= a\,(3,\,-3,\,-3)+b\,(4,\,6,\,-5)-c\,(-3,\,1,\,1) \\ &= \left(-\frac{1}{6}\,x-\frac{1}{6}\,y-\frac{1}{3}\,z\right)(3,\,-3,\,-3)+\left(\frac{1}{11}\,y-\frac{1}{11}\,z\right)(4,\,6,\,-5)-\left(-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{22}\,y-\frac{5}{11}\,z\right)(-3,\,1,\,1) \\ &= \left(-2\,x-\frac{3}{11}\,y-\frac{30}{11}\,z,\,x+\frac{12}{11}\,y+\frac{10}{11}\,z,\,x+\frac{1}{11}\,y+\frac{21}{11}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{11} & -\frac{30}{11} \\ 1 & \frac{12}{11} & \frac{10}{11} \\ 1 & \frac{1}{11} & \frac{21}{11} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 71. ← page 9

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,0))$ et pour G la famille $((-1,\,-3,\,2))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,0)\,,(-1,\,-3,\,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,0)\,,(-1,\,-3,\,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,0))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,0)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(-1,\,-3,\,2)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $2\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(-1,\,-3,\,2)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $p(x,y,z)=\vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,0)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(1,\,0,\,0)+b\,(0,\,1,\,0)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-3,\,2)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-1,\,-3,\,2)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(1,\,0,\,0)+b\,(0,\,1,\,0)+c\,(-1,\,-3,\,2)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z)=a\,(1,\,0,\,0)+b\,(0,\,1,\,0)+c\,(-1,\,-3,\,2)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & - & c & = & x \\ & & b & - & 3\,c & = & y \\ & & & & 2\,c & = & z \end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & x+\frac{1}{2}\,z \\ b & = & y+\frac{3}{2}\,z \\ c & = & \frac{1}{2}\,z \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(1,\,0,\,0)+b\,(0,\,1,\,0) \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\,z\right)(1,\,0,\,0)+\left(y+\frac{3}{2}\,z\right)(0,\,1,\,0) \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\,z,\,y+\frac{3}{2}\,z,\,0\right). \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F=(a,b,c)$, où

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-1,\ -3,\ 2)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 72. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 9

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \quad \text{et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ -2x + 4y - 6z = 0 \\ -2x + 4y - 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 4y - 6z = 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ 0 = 0 \\ -2x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 4y - 6z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 2y - 3z \\ y = a \\ z = b \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 2a - 3b \\ y = a \\ z = b \end{cases}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\ 1,\ 0), (-3,\ 0,\ 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\ 1,\ 1)\right).$$

Corrigé 73. ← page 9

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((13,\ 0,\ 7), (0,\ 13,\ 12))$ et pour G la famille $((5,\ -5,\ -2))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $7\,x + 12\,y - 13\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((13,\ 0,\ 7), (0,\ 13,\ 12), (5,\ -5,\ -2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 13 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -5 \\ 7 & 12 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & 12 & -\frac{61}{13} \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 12 & -\frac{61}{13} \end{vmatrix} = 13\left(13 \cdot \left(-\frac{61}{13}\right) - 12 \cdot (-5)\right) = -13 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((13,\ 0,\ 7), (0,\ 13,\ 12), (5,\ -5,\ -2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((13,\ 0,\ 7), (0,\ 13,\ 12))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((13,\,0,\,7)\,,(0,\,13,\,12)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.

Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Comme $(x,y,z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z) = a\,(5,\,-5,\,-2)$. Comme $(x,y,z) \in F$, on a de plus : $7\,x + 12\,y - 13\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x,y,z) = 0 \times (5,\,-5,\,-2) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((13,\,0,\,7)\,,(0,\,13,\,12)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(13,\,0,\,7) + b\,(0,\,13,\,12)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((5,\,-5,\,-2)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(5,\,-5,\,-2)$. Ainsi :
$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(13,\,0,\,7) + b\,(0,\,13,\,12) + c\,(5,\,-5,\,-2)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z) = a\,(13,\,0,\,7) + b\,(0,\,13,\,12) + c\,(5,\,-5,\,-2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 13\,a & & & + & 5\,c & = & x \\ & & 13\,b & - & 5\,c & = & y \\ 7\,a & + & 12\,b & - & 2\,c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 13\,a & + & 5\,c & = & x \\ 13\,b & - & 5\,c & = & y \\ 12\,b & - & \frac{61}{13}\,c & = & -\frac{7}{13}\,x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{13}L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 13\,a & + & 5\,c & = & x \\ 13\,b & - & 5\,c & = & y \\ & - & \frac{1}{13}\,c & = & -\frac{7}{13}\,x - \frac{12}{13}\,y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{12}{13}L_2) \end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{34}{13}\,x - \frac{60}{13}\,y + 5\,z \\ b & = & \frac{35}{13}\,x + \frac{61}{13}\,y - 5\,z \\ c & = & 7\,x + 12\,y - 13\,z \end{array}\right.\,.$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(13,\,0,\,7) + b\,(0,\,13,\,12) - c\,(5,\,-5,\,-2) \\ &= \left(-\frac{34}{13}\,x - \frac{60}{13}\,y + 5\,z\right)(13,\,0,\,7) + \left(\frac{35}{13}\,x + \frac{61}{13}\,y - 5\,z\right)(0,\,13,\,12) - (7\,x + 12\,y - 13\,z)\,(5,\,-5,\,-2) \\ &= (-69\,x - 120\,y + 130\,z,\; 70\,x + 121\,y - 130\,z,\; 28\,x + 48\,y - 51\,z)\,. \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -69 & -120 & 130 \\ 70 & 121 & -130 \\ 28 & 48 & -51 \end{pmatrix}.$$
Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(5,\,-5,\,-2)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $7\,a + 12\,b - 13\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 74. ← page 9

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\,-1,\,-4),(-2,\,6,\,0))$ et pour G la famille $((-3,\,4,\,6))$: démontrons que la famille $((1,\,-1,\,-4),(-2,\,6,\,0),(-3,\,4,\,6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = (4\cdot(-6)+8\cdot(1)) = -16 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((1,\,-1,\,-4),(-2,\,6,\,0),(-3,\,4,\,6))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,\,-1,\,-4),(-2,\,6,\,0))$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(1,\,-1,\,-4)+b\,(-2,\,6,\,0)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-3,\,4,\,6))$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-3,\,4,\,6)$. Ainsi :
$$(x,y,z) = \vec{x}_F+\vec{x}_G = a\,(1,\,-1,\,-4)+b\,(-2,\,6,\,0)+c\,(-3,\,4,\,6)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z) = a\,(1,\,-1,\,-4)+b\,(-2,\,6,\,0)+c\,(-3,\,4,\,6) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & - & 2b & - & 3c & = & x \\ -a & + & 6b & + & 4c & = & y \\ -4a & & & + & 6c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & - & 2b & - & 3c & = & x & \\ & & 4b & + & c & = & x+y & (L_2\leftarrow L_2+L_1) \\ & - & 8b & - & 6c & = & 4x+z & (L_3\leftarrow L_3+4L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & - & 2b & - & 3c & = & x & \\ & & 4b & + & c & = & x+y & \\ & & & - & 4c & = & 6x+2y+z & (L_3\leftarrow L_3+2L_2) \end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}y-\frac{5}{8}z \\ b & = & \frac{5}{8}x+\frac{3}{8}y+\frac{1}{16}z \\ c & = & -\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :
$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(-3,\,4,\,6) \\ &= \left(-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z\right)(-3,\,4,\,6) \\ &= \left(\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}z,\,-6x-2y-z,\,-9x-3y-\frac{3}{2}z\right). \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ -6 & -2 & -1 \\ -9 & -3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 75. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on ← page 9 en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :
$$F = \ker(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\},\ \text{ et : } G = \ker(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6x & - & 18y & - & 6z & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & - & 6y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 6y & + & 2z & = & 0 & (L_2 \leftrightarrow L_1) \\ -6x & - & 18y & - & 6z & = & 0 & \\ -2x & - & 6y & - & 2z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 6y & + & 2z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y - z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3a - b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker(A + \mathrm{I}_3) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3, 1, 0), (-1, 0, 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3, -1, 1)\right).$$

Corrigé 76. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix}-13 & -52 & 26\\ 4 & 16 & -8\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, ← page 9
et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -13 & -52 & 26 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -13 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-13\\4\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-13, 4, 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4, 1, 0), (2, 0, 1)\right).$$

Corrigé 77. ← page 9

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((7,\,0,\,12)\,,(0,\,7,\,6))$ et pour G la famille $((3,\,-4,\,2))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $12\,x+6\,y-7\,z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((7,\,0,\,12)\,,(0,\,7,\,6)\,,(3,\,-4,\,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \\ 12 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 6 & -\frac{22}{7} \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -\frac{22}{7} \end{vmatrix} = 7\left(7\cdot\left(-\frac{22}{7}\right)-6\cdot(-4)\right) = 14 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((7,\,0,\,12)\,,(0,\,7,\,6)\,,(3,\,-4,\,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((7,\,0,\,12)\,,(0,\,7,\,6))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((7,\,0,\,12)\,,(0,\,7,\,6)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(3,\,-4,\,2)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $12\,x+6\,y-7\,z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-2\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(3,\,-4,\,2)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_G-\vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((7,\,0,\,12)\,,(0,\,7,\,6)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(7,\,0,\,12)+b\,(0,\,7,\,6)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-4,\,2)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(3,\,-4,\,2)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(7,\,0,\,12)+b\,(0,\,7,\,6)+c\,(3,\,-4,\,2)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z)=a\,(7,\,0,\,12)+b\,(0,\,7,\,6)+c\,(3,\,-4,\,2)\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} 7\,a & & & + & 3\,c & = & x \\ & & 7\,b & - & 4\,c & = & y \\ 12\,a & + & 6\,b & + & 2\,c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{cccccl} 7\,a & & + & 3\,c & = & x \\ & 7\,b & - & 4\,c & = & y \\ & 6\,b & - & \frac{22}{7}\,c & = & -\frac{12}{7}\,x+z \quad (L_3\leftarrow L_3-\frac{12}{7}L_1) \end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{cccccl} 7\,a & & + & 3\,c & = & x \\ & 7\,b & - & 4\,c & = & y \\ & & & \frac{2}{7}\,c & = & -\frac{12}{7}\,x-\frac{6}{7}\,y+z \quad (L_3\leftarrow L_3-\frac{6}{7}L_2) \end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{ccl} a & = & \frac{19}{7}\,x+\frac{9}{7}\,y-\frac{3}{2}\,z \\ b & = & -\frac{24}{7}\,x-\frac{11}{7}\,y+2\,z \\ c & = & -6\,x-3\,y+\frac{7}{2}\,z \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à G parallèlement à F est :
$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_G-\vec{x}_F \\ &= -a\,(7,\,0,\,12)-b\,(0,\,7,\,6)+c\,(3,\,-4,\,2) \\ &= -\left(\frac{19}{7}\,x+\frac{9}{7}\,y-\frac{3}{2}\,z\right)(7,\,0,\,12)-\left(-\frac{24}{7}\,x-\frac{11}{7}\,y+2\,z\right)(0,\,7,\,6)+\left(-6\,x-3\,y+\frac{7}{2}\,z\right)(3,\,-4,\,2) \\ &= (-37\,x-18\,y+21\,z,\,48\,x+23\,y-28\,z,\,-24\,x-12\,y+13\,z)\,. \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s)=\begin{pmatrix} -37 & -18 & 21 \\ 48 & 23 & -28 \\ -24 & -12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(3,\ -4,\ 2)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $12\,a + 6\,b - 7\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 78. ← page 10

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((10,\ 0,\ 3),(0,\ 10,\ -21))$ et pour G la famille $((2,\ -4,\ 3))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $3\,x - 21\,y - 10\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((10,\ 0,\ 3),(0,\ 10,\ -21),(2,\ -4,\ 3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 3 & -21 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & -21 & \frac{12}{5} \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -21 & \frac{12}{5} \end{vmatrix} = 10\left(10\cdot\left(\frac{12}{5}\right) + 21\cdot(-4)\right) = -600 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((10,\ 0,\ 3),(0,\ 10,\ -21),(2,\ -4,\ 3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((10,\ 0,\ 3),(0,\ 10,\ -21))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((10,\ 0,\ 3),(0,\ 10,\ -21))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.

Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Comme $(x,y,z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z) = a\,(2,\ -4,\ 3)$. Comme $(x,y,z) \in F$, on a de plus : $3\,x - 21\,y - 10\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $60\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x,y,z) = 0 \times (2,\ -4,\ 3) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((10,\ 0,\ 3),(0,\ 10,\ -21))$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(10,\ 0,\ 3) + b\,(0,\ 10,\ -21)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((2,\ -4,\ 3))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\ -4,\ 3)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(10,\ 0,\ 3) + b\,(0,\ 10,\ -21) + c\,(2,\ -4,\ 3).$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z) = a\,(10,\ 0,\ 3) + b\,(0,\ 10,\ -21) + c\,(2,\ -4,\ 3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 10\,a & & & + & 2\,c & = & x \\ & & 10\,b & - & 4\,c & = & y \\ 3\,a & - & 21\,b & + & 3\,c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 10\,a & & & + & 2\,c & = & x \\ & & 10\,b & - & 4\,c & = & y \\ & - & 21\,b & + & \frac{12}{5}\,c & = & -\frac{3}{10}\,x + z \end{array}\right. \quad \left(L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{10}L_1\right)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 10\,a & & & + & 2\,c & = & x \\ & & 10\,b & - & 4\,c & = & y \\ & & & - & 6\,c & = & -\frac{3}{10}\,x + \frac{21}{10}\,y + z \end{array}\right. \quad \left(L_3 \leftarrow L_3 + \frac{21}{10}L_2\right)$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{9}{100}\,x + \frac{7}{100}\,y + \frac{1}{30}\,z \\ b & = & \frac{1}{50}\,x - \frac{1}{25}\,y - \frac{1}{15}\,z \\ c & = & \frac{1}{20}\,x - \frac{7}{20}\,y - \frac{1}{6}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(10,\ 0,\ 3) + b\,(0,\ 10,\ -21) \\ &= \left(\frac{9}{100}\,x + \frac{7}{100}\,y + \frac{1}{30}\,z\right)(10,\ 0,\ 3) + \left(\frac{1}{50}\,x - \frac{1}{25}\,y - \frac{1}{15}\,z\right)(0,\ 10,\ -21) \\ &= \left(\frac{9}{10}\,x + \frac{7}{10}\,y + \frac{1}{3}\,z,\ \frac{1}{5}\,x - \frac{2}{5}\,y - \frac{2}{3}\,z,\ -\frac{3}{20}\,x + \frac{21}{20}\,y + \frac{3}{2}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{20} & \frac{21}{20} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(2,\ -4,\ 3)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $3\,a - 21\,b - 10\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 79. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on ← page 10
en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -10\,x &+& 16\,y &+& 24\,z &=& 0 \\ -8\,x &+& 14\,y &+& 24\,z &=& 0 \\ 2\,x &-& 4\,y &-& 8\,z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x &-& 4\,y &-& 8\,z &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -8\,x &+& 14\,y &+& 24\,z &=& 0 & \\ -10\,x &+& 16\,y &+& 24\,z &=& 0 & \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x &-& 4\,y &-& 8\,z &=& 0 & \\ &-& 2\,y &-& 8\,z &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ &-& 4\,y &-& 16\,z &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x &-& 4\,y &-& 8\,z &=& 0 & \\ &-& 2\,y &-& 8\,z &=& 0 & \\ &&&& 0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right. \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2y + 4z \\ y &=& -4z \\ z &=& a \end{array}\right. \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4a \\ y &=& -4a \\ z &=& a \end{array}\right. \end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\ -4,\ 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,1,\,0)\,,(3,\,0,\,1)\right).$$

Corrigé 80. ← page 10

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,4,\,1))$ et pour G la famille $((-1,\,0,\,0))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $4\,x+y-4\,z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,4,\,1)\,,(-1,\,0,\,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,|\ 1\ | = 4 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,4,\,1)\,,(-1,\,0,\,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\,0,\,1)\,,(0,\,4,\,1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,1)\,,(0,\,4,\,1)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Comme $(x,y,z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z) = a\,(-1,\,0,\,0)$. Comme $(x,y,z) \in F$, on a de plus : $4\,x+y-4\,z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-4\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x,y,z) = 0 \times (-1,\,0,\,0) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,1)\,,(0,\,4,\,1)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,4,\,1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,0,\,0)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-1,\,0,\,0)$. Ainsi :
$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,4,\,1) + c\,(-1,\,0,\,0)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}(x,y,z) = a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,4,\,1) + c\,(-1,\,0,\,0) &\iff \begin{cases} a - c = x \\ 4\,b = y \\ a + b = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - c = x \\ 4\,b = y \\ b + c = -x+z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - c = x \\ 4\,b = y \\ c = -x - \frac{1}{4}\,y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2) \end{cases}\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\begin{cases} a = -\frac{1}{4}\,y + z \\ b = \frac{1}{4}\,y \\ c = -x - \frac{1}{4}\,y + z \end{cases}.$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(1,\,0,\,1) + b\,(0,\,4,\,1) \\ &= \left(-\frac{1}{4}\,y + z\right)(1,\,0,\,1) + \left(\frac{1}{4}\,y\right)(0,\,4,\,1) \\ &= \left(-\frac{1}{4}\,y + z,\; y,\; z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-1,\,0,\,0)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $4\,a + b - 4\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 81. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, ← page 10
et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -3 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-3,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,1,\,0), (-4,\,0,\,1)\right).$$

Corrigé 82. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, et on ← page 10
en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\operatorname{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\ 0,\ 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\ 1,\ 0), (1,\ 0,\ 1)\right).$$

Corrigé 83. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 10

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -16x & + & 42y & - & 28z & = & 0 \\ -4x & + & 10y & - & 8z & = & 0 \\ 2x & - & 6y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 6y & + & 2z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ -4x & + & 10y & - & 8z & = & 0 & \\ -16x & + & 42y & - & 28z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 6y & + & 2z & = & 0 & \\ & - & 2y & - & 4z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & - & 6y & - & 12z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 6y & + & 2z & = & 0 & \\ & - & 2y & - & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3y - z \\ y & = & -2z \\ z & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -7a \\ y & = & -2a \\ z & = & a \end{array}\right.$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \left\{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\right\} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-7,\ -2,\ 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\ 1,\ 0), (-2,\ 0,\ 1)\right).$$

Corrigé 84. ← page 10

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((4,\,-4,\,3)\,,(6,\,-6,\,4))$ et pour G la famille $((2,\,2,\,3))$: démontrons que la famille $((4,\,-4,\,3)\,,(6,\,-6,\,4)\,,(2,\,2,\,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -4 & -6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 4\left(0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4)\right) = 8 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((4,\,-4,\,3)\,,(6,\,-6,\,4)\,,(2,\,2,\,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x,y,z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((4,\,-4,\,3)\,,(6,\,-6,\,4)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(4,\,-4,\,3) + b\,(6,\,-6,\,4)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,2,\,3)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\,2,\,3)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(4,\,-4,\,3) + b\,(6,\,-6,\,4) + c\,(2,\,2,\,3)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a\,(4,\,-4,\,3) + b\,(6,\,-6,\,4) + c\,(2,\,2,\,3) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & + & 6\,b & + & 2\,c & = & x \\ -\,4\,a & - & 6\,b & + & 2\,c & = & y \\ 3\,a & + & 4\,b & + & 3\,c & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 4\,a & + & 6\,b & + & 2\,c & = & x & \\ & & & & 4\,c & = & x+y & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & - & \frac{1}{2}\,b & + & \frac{3}{2}\,c & = & -\frac{3}{4}\,x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 4\,a & + & 6\,b & + & 2\,c & = & x & \\ & - & \frac{1}{2}\,b & + & \frac{3}{2}\,c & = & -\frac{3}{4}\,x + z & (L_3 \leftrightarrow L_2) \\ & & & & 4\,c & = & x+y & \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{13}{4}\,x - \frac{5}{4}\,y + 3\,z \\ b & = & \frac{9}{4}\,x + \frac{3}{4}\,y - 2\,z \\ c & = & \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{4}\,y \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned}
s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\
&= a\,(4,\,-4,\,3) + b\,(6,\,-6,\,4) - c\,(2,\,2,\,3) \\
&= \left(-\frac{13}{4}\,x - \frac{5}{4}\,y + 3\,z\right)(4,\,-4,\,3) + \left(\frac{9}{4}\,x + \frac{3}{4}\,y - 2\,z\right)(6,\,-6,\,4) - \left(\frac{1}{4}\,x + \frac{1}{4}\,y\right)(2,\,2,\,3) \\
&= \left(-y,\,-x,\,-\frac{3}{2}\,x - \frac{3}{2}\,y + z\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 85. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, et on en ← page 10
déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,1,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\,1,\,0), (3,\,0,\,1)\right).$$

Corrigé 86. ← page 11

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((-1,\,4,\,5), (5,\,2,\,5))$ et pour G la famille $((-5,\,5,\,5))$: démontrons que la famille $((-1,\,4,\,5), (5,\,2,\,5), (-5,\,5,\,5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -5 \\ 0 & 22 & -15 \\ 0 & 30 & -20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 22 & -15 \\ 30 & -20 \end{vmatrix} = -\left(22\cdot(-20) - 30\cdot(-15)\right) = -10 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((-1,\,4,\,5), (5,\,2,\,5), (-5,\,5,\,5))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x,y,z) = \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-1,\,4,\,5), (5,\,2,\,5))$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(-1,\,4,\,5) + b\,(5,\,2,\,5)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-5,\,5,\,5))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-5,\,5,\,5)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(-1,\,4,\,5) + b\,(5,\,2,\,5) + c\,(-5,\,5,\,5).$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}(x,y,z) = a\,(-1,\,4,\,5) + b\,(5,\,2,\,5) + c\,(-5,\,5,\,5) &\iff \begin{cases} -a + 5b - 5c = x \\ 4a + 2b + 5c = y \\ 5a + 5b + 5c = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -a + 5b - 5c = x \\ 22b - 15c = 4x + y & (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1) \\ 30b - 20c = 5x + z & (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -a + 5b - 5c = x \\ 22b - 15c = 4x + y \\ \frac{5}{11}\,c = -\frac{5}{11}\,x - \frac{15}{11}\,y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{15}{11}L_2) \end{cases}\end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}\,x + 5\,y - \frac{7}{2}\,z \\ b = -\frac{1}{2}\,x - 2\,y + \frac{3}{2}\,z \\ c = -x - 3\,y + \frac{11}{5}\,z \end{cases}.$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(-5,\,5,\,5) \\ &= \left(-x-3\,y+\frac{11}{5}\,z\right)(-5,\,5,\,5) \\ &= (5\,x+15\,y-11\,z,\,-5\,x-15\,y+11\,z,\,-5\,x-15\,y+11\,z)\,. \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 5 & 15 & -11 \\ -5 & -15 & 11 \\ -5 & -15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 87. ← page 11

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((3,\,-2,\,0)\,,(1,\,5,\,0))$ et pour G la famille $((-4,\,0,\,1))$: démontrons que la famille $((3,\,-2,\,0)\,,(1,\,5,\,0)\,,(-4,\,0,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (3\cdot(5)+2\cdot(1)) = 17 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((3,\,-2,\,0)\,,(1,\,5,\,0)\,,(-4,\,0,\,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z) = \vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $p(x,y,z)=\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\,-2,\,0)\,,(1,\,5,\,0)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(3,\,-2,\,0)+b\,(1,\,5,\,0)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\,0,\,1)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(-4,\,0,\,1)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = \vec{x}_F+\vec{x}_G = a\,(3,\,-2,\,0)+b\,(1,\,5,\,0)+c\,(-4,\,0,\,1)\,.$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} (x,y,z) = a\,(3,\,-2,\,0)+b\,(1,\,5,\,0)+c\,(-4,\,0,\,1) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,a & + & b & - & 4\,c & = & x \\ -\,2\,a & + & 5\,b & & & = & y \\ & & & & c & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,a & + & b & - & 4\,c & = & x \\ & & \frac{17}{3}\,b & - & \frac{8}{3}\,c & = & \frac{2}{3}\,x+y \quad (L_2\leftarrow L_2+\frac{2}{3}L_1) \\ & & & & c & = & z \end{array}\right. \end{aligned}$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{5}{17}\,x-\frac{1}{17}\,y+\frac{20}{17}\,z \\ b & = & \frac{2}{17}\,x+\frac{3}{17}\,y+\frac{8}{17}\,z \\ c & = & z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur G parallèlement à F est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_G \\ &= c\,(-4,\,0,\,1) \\ &= (z)\,(-4,\,0,\,1) \\ &= (-4\,z,\,0,\,z)\,. \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé 88. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -21 & 21 \\ 3 & -9 & 9 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 11

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps.* Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -21 & 21 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((7,\, 3,\, 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((3,\, 1,\, 0), (-3,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 89. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 11

$$F = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & 4y & + & 8z & = & 0 \\ 4x & - & 10y & + & 16z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 4x & - & 10y & + & 16z & = & 0 & \\ & - & 4y & + & 8z & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 0 & \\ & - & 2y & + & 4z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & - & 4y & + & 8z & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 0 & \\ & - & 2y & + & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2y - 3z \\ y & = & 2z \\ z & = & a \end{array}\right. \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & 2a \\ z & = & a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker(A + \mathrm{I}_3) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 2,\, 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\, 1,\, 0)\,, (-4,\, 0,\, 1)\right).$$

Corrigé 90. ← page 11

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\, 1,\, 0)\,, (0,\, 0,\, 1))$ et pour G la famille $((0,\, -4,\, 0))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $x - y = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\, 1,\, 0)\,, (0,\, 0,\, 1)\,, (0,\, -4,\, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left| \ -4 \ \right| = 4 \neq 0.$$

   Ainsi la famille $((1,\, 1,\, 0)\,, (0,\, 0,\, 1)\,, (0,\, -4,\, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
   Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\, 1,\, 0)\,, (0,\, 0,\, 1))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 1,\, 0)\,, (0,\, 0,\, 1)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
   Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(0,\, -4,\, 0)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $x - y = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $4\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (0,\, -4,\, 0) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
   Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\, 1,\, 0)\,, (0,\, 0,\, 1)\right)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(1,\, 1,\, 0) + b\,(0,\, 0,\, 1)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0,\, -4,\, 0)\right)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(0,\, -4,\, 0)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(1,\, 1,\, 0) + b\,(0,\, 0,\, 1) + c\,(0,\, -4,\, 0)\,.$$

   On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) = a\,(1,\, 1,\, 0) + b\,(0,\, 0,\, 1) + c\,(0,\, -4,\, 0) &\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} a & & & = & x \\ a & & -\ 4\,c & = & y \\ & b & & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} a & & & = & x \\ & & -\ 4\,c & = & -x + y \\ & b & & = & z \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} a & & & = & x \\ & b & & = & z \\ & & -\ 4\,c & = & -x + y \end{array}\right. \quad (L_3 \leftrightarrow L_2)
\end{aligned}$$

   De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & x \\ b & = & z \\ c & = & \frac{1}{4}\,x - \frac{1}{4}\,y \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(1,\,1,\,0) + b\,(0,\,0,\,1) - c\,(0,\,-4,\,0) \\ &= (x)\,(1,\,1,\,0) + (z)\,(0,\,0,\,1) - \left(\frac{1}{4}\,x - \frac{1}{4}\,y\right)(0,\,-4,\,0) \\ &= (x,\,2\,x - y,\,z)\,. \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(0,\,-4,\,0)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $a - b = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 91. ← page 11

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((4,\,0,\,-15)\,,(0,\,4,\,3))$ et pour G la famille $((0,\,3,\,-4))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $15\,x - 3\,y + 4\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((4,\,0,\,-15)\,,(0,\,4,\,3)\,,(0,\,3,\,-4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -15 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 4\,(4 \cdot (-4) - 3 \cdot (3)) = -100 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((4,\,0,\,-15)\,,(0,\,4,\,3)\,,(0,\,3,\,-4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((4,\,0,\,-15)\,,(0,\,4,\,3))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((4,\,0,\,-15)\,,(0,\,4,\,3))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(0,\,3,\,-4)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $15\,x - 3\,y + 4\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-25\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (0,\,3,\,-4) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((4,\,0,\,-15)\,,(0,\,4,\,3))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(4,\,0,\,-15) + b\,(0,\,4,\,3)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((0,\,3,\,-4))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(0,\,3,\,-4)$. Ainsi :
$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(4,\,0,\,-15) + b\,(0,\,4,\,3) + c\,(0,\,3,\,-4)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans

l'égalité ci-dessus :

$$(x,y,z)=a\,(4,\,0,\,-15)+b\,(0,\,4,\,3)+c\,(0,\,3,\,-4)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & & & & & = & x\\ & & 4\,b & + & 3\,c & = & y\\ -\ 15\,a & + & 3\,b & - & 4\,c & = & z\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & & & & & = & x\\ & & 4\,b & + & 3\,c & = & y\\ & & 3\,b & - & 4\,c & = & \frac{15}{4}\,x+z \quad (L_3\leftarrow L_3+\frac{15}{4}L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,a & & & & & = & x\\ & & 4\,b & + & 3\,c & = & y\\ & & & - & \frac{25}{4}\,c & = & \frac{15}{4}\,x-\frac{3}{4}\,y+z \quad (L_3\leftarrow L_3-\frac{3}{4}L_2)\end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{4}\,x\\ b & = & \frac{9}{20}\,x+\frac{4}{25}\,y+\frac{3}{25}\,z\\ c & = & -\frac{3}{5}\,x+\frac{3}{25}\,y-\frac{4}{25}\,z\end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F\\ &= a\,(4,\,0,\,-15)+b\,(0,\,4,\,3)\\ &= \left(\frac{1}{4}\,x\right)(4,\,0,\,-15)+\left(\frac{9}{20}\,x+\frac{4}{25}\,y+\frac{3}{25}\,z\right)(0,\,4,\,3)\\ &= \left(x,\,\frac{9}{5}\,x+\frac{16}{25}\,y+\frac{12}{25}\,z,\,-\frac{12}{5}\,x+\frac{12}{25}\,y+\frac{9}{25}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ \frac{9}{5} & \frac{16}{25} & \frac{12}{25}\\ -\frac{12}{5} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25}\end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F=(a,b,c)$, où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G=d\,(0,\,3,\,-4)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $15\,a-3\,b+4\,c=0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 92. Un calcul direct montre que : $A^2=\begin{pmatrix} 6 & 12 & 6\\ -3 & -6 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Ainsi $A^2=A$, donc on a aussi : $f^2=f$, ← page 11
et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F=\mathrm{im}(f)=\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\mid f(\vec{x})=\vec{x}\right\},\ \text{et} : G=\ker(f)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\mid f(\vec{x})=\vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 12 & 6 & 1 & 0 & 0\\ -3 & -6 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1\\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\qquad \begin{array}{l}(C_2\leftarrow C_2-2C_1)\\ (C_3\leftarrow C_3-C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((6,\ -3,\ 1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-2,\ 1,\ 0), (-1,\ 0,\ 1)\right).$$

Corrigé 93. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 18 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, ← page 11
et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et} : G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & -6 & 18 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & \frac{18}{5} \\ 2 & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - \frac{6}{5}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{18}{5}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & 6 \\ 2 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-5,\ 2,\ -1), \left(0,\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((6,\ -2,\ 1)\right).$$

Corrigé 94. ← page 12

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\ 0,\ -3), (0,\ 1,\ -5))$ et pour G la famille $((-6,\ -2,\ 4))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $3\,x+5\,y+z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\ 0,\ -3), (0,\ 1,\ -5), (-6,\ -2,\ 4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -14 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-14) + 5 \cdot (-2)) = -24 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((1,\ 0,\ -3),(0,\ 1,\ -5),(-6,\ -2,\ 4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.

Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\ 0,\ -3),(0,\ 1,\ -5))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,\ 0,\ -3),(0,\ 1,\ -5))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.

Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(-6,\ -2,\ 4)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $3\,x+5\,y+z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-24\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(-6,\ -2,\ 4)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,\ 0,\ -3),(0,\ 1,\ -5))$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(1,\ 0,\ -3)+b\,(0,\ 1,\ -5)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-6,\ -2,\ 4))$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-6,\ -2,\ 4)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(1,\ 0,\ -3)+b\,(0,\ 1,\ -5)+c\,(-6,\ -2,\ 4)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z)=a\,(1,\ 0,\ -3)+b\,(0,\ 1,\ -5)+c\,(-6,\ -2,\ 4)\iff\left\{\begin{array}{rcl} a-6c&=&x\\ b-2c&=&y\\ -3a-5b+4c&=&z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcll} a-6c&=&x&\\ b-2c&=&y&\\ -5b-14c&=&3x+z&(L_3\leftarrow L_3+3L_1)\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcll} a-6c&=&x&\\ b-2c&=&y&\\ -24c&=&3x+5y+z&(L_3\leftarrow L_3+5L_2)\end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a&=&\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y-\frac{1}{4}z\\ b&=&-\frac{1}{4}x+\frac{7}{12}y-\frac{1}{12}z\\ c&=&-\frac{1}{8}x-\frac{5}{24}y-\frac{1}{24}z\end{array}\right.\,.$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned}s(x,y,z)&=\vec{x}_F-\vec{x}_G\\&=a\,(1,\ 0,\ -3)+b\,(0,\ 1,\ -5)-c\,(-6,\ -2,\ 4)\\&=\left(\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y-\frac{1}{4}z\right)(1,\ 0,\ -3)+\left(-\frac{1}{4}x+\frac{7}{12}y-\frac{1}{12}z\right)(0,\ 1,\ -5)-\left(-\frac{1}{8}x-\frac{5}{24}y-\frac{1}{24}z\right)(-6,\ -2,\ 4)\\&=\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}y-\frac{1}{2}z,\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}y-\frac{1}{6}z,\ x+\frac{5}{3}y+\frac{4}{3}z\right).\end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\1&\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F=(a,b,c)$, où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G=d\,(-6,\ -2,\ 4)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $3\,a+5\,b+c=0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 95. ← page 12

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,-4))$ et pour G la famille $((-4,\,-1,\,2))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $4\,y+z=0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,-4)\,,(-4,\,-1,\,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (1\cdot(2)+4\cdot(-1)) = -2 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,-4)\,,(-4,\,-1,\,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,-4))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,-4)\right)$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(x,y,z)=a\,(-4,\,-1,\,2)$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a de plus : $4\,y+z=0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $-2\,a=0$, donc : $a=0$, et : $(x,y,z)=0\times(-4,\,-1,\,2)=\vec{0}$. Ainsi $F\cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x,y,z)$, il s'agit d'écrire (x,y,z) sous la forme : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$. On a alors : $s(x,y,z)=\vec{x}_F-\vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F\in F$ et $\vec{x}_G\in G$ tels que : $(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F\in F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,-4)\right)$, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F=a\,(1,\,0,\,0)+b\,(0,\,1,\,-4)$. De même, comme $\vec{x}_G\in G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-4,\,-1,\,2)\right)$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G=c\,(-4,\,-1,\,2)$. Ainsi :
$$(x,y,z)=\vec{x}_F+\vec{x}_G=a\,(1,\,0,\,0)+b\,(0,\,1,\,-4)+c\,(-4,\,-1,\,2)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$(x,y,z)=a\,(1,\,0,\,0)+b\,(0,\,1,\,-4)+c\,(-4,\,-1,\,2)\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & - & 4\,c & = & x \\ & & b & - & c & = & y \\ & - & 4\,b & + & 2\,c & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{cccccl} a & & - & 4\,c & = & x \\ & b & - & c & = & y \\ & & - & 2\,c & = & 4\,y+z \quad (L_3\leftarrow L_3+4L_2) \end{array}\right.$$
De là on déduit aisément :
$$\left\{\begin{array}{ccl} a & = & x-8\,y-2\,z \\ b & = & -y-\frac{1}{2}\,z \\ c & = & -2\,y-\frac{1}{2}\,z \end{array}\right. .$$
Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :
$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F-\vec{x}_G \\ &= a\,(1,\,0,\,0)+b\,(0,\,1,\,-4)-c\,(-4,\,-1,\,2) \\ &= (x-8\,y-2\,z)\,(1,\,0,\,0)+\left(-y-\frac{1}{2}\,z\right)(0,\,1,\,-4)-\left(-2\,y-\frac{1}{2}\,z\right)(-4,\,-1,\,2) \\ &= (x-16\,y-4\,z,\,-3\,y-z,\,8\,y+3\,z)\,. \end{aligned}$$
De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s)=\begin{pmatrix} 1 & -16 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a, b, c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(-4,\ -1,\ 2)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $4\,b + c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 96. ← page 12

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((2,\ 0,\ 7)\,, (0,\ 1,\ -2))$ et pour G la famille $((2,\ 2,\ 0))$ (cette famille de F n'est pas prise au hasard : on a trouvé à tâtons deux vecteurs vérifiant l'équation $7\,x - 4\,y - 2\,z = 0$, et linéairement indépendants sinon il n'y a aucune chance qu'elle puisse produire une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur ; d'autres choix auraient bien sûr été possibles) : démontrons que la famille $((2,\ 0,\ 7)\,, (0,\ 1,\ -2)\,, (2,\ 2,\ 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 2\,(1 \cdot (-7) + 2 \cdot (2)) = -6 \neq 0.$$
Ainsi la famille $((2,\ 0,\ 7)\,, (0,\ 1,\ -2)\,, (2,\ 2,\ 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque. Le fait que la concaténation des deux familles ci-dessus donne une base de $\mathbb{R}^3$ démontre en passant que $((2,\ 0,\ 7)\,, (0,\ 1,\ -2))$ est une base de F (sauriez-vous le démontrer ? d'abord justifier qu'elle est libre, puis trouver un argument dimensionnel). En particulier : $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((2,\ 0,\ 7)\,, (0,\ 1,\ -2))$. Nous nous en servirons dans la question suivante.
Remarque. En vérité, nous aurions pu montrer que F et G sont supplémentaires sans expliciter une famille de F (je l'ai fait ainsi surtout pour uniformiser les corrigés des deux questions de l'exercice, selon les nombreux cas de figure que vous pouviez rencontrer). Pour ce faire : on montre d'abord que l'intersection de F et G est triviale. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y, z) = a\,(2,\ 2,\ 0)$. Comme $(x, y, z) \in F$, on a de plus : $7\,x - 4\,y - 2\,z = 0$. En combinant ces deux égalités, on trouve : $6\,a = 0$, donc : $a = 0$, et : $(x, y, z) = 0 \times (2,\ 2,\ 0) = \vec{0}$. Ainsi $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul, ce qui démontre que F et G sont en somme directe. On conclut en notant que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (pour la dimension de F, il faut reconnaître l'équation d'un plan).
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $s(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $s(x, y, z) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((2,\ 0,\ 7)\,, (0,\ 1,\ -2))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(2,\ 0,\ 7) + b\,(0,\ 1,\ -2)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,((2,\ 2,\ 0))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(2,\ 2,\ 0)$. Ainsi :
$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(2,\ 0,\ 7) + b\,(0,\ 1,\ -2) + c\,(2,\ 2,\ 0)\,.$$
On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :
$$\begin{aligned}(x, y, z) = a\,(2,\ 0,\ 7) + b\,(0,\ 1,\ -2) + c\,(2,\ 2,\ 0) &\iff \begin{cases} 2\,a + 2\,c = x \\ b + 2\,c = y \\ 7\,a - 2\,b = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\,a + 2\,c = x \\ b + 2\,c = y \\ -2\,b - 7\,c = -\frac{7}{2}\,x + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{2} L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\,a + 2\,c = x \\ b + 2\,c = y \\ -3\,c = -\frac{7}{2}\,x + 2\,y + z \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 2 L_2) \end{cases}\end{aligned}$$
De là on déduit aisément :
$$\begin{cases} a = -\frac{2}{3}\,x + \frac{2}{3}\,y + \frac{1}{3}\,z \\ b = -\frac{7}{3}\,x + \frac{7}{3}\,y + \frac{2}{3}\,z \\ c = \frac{7}{6}\,x - \frac{2}{3}\,y - \frac{1}{3}\,z \end{cases}.$$

Par conséquent, l'image de (x,y,z) par la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \vec{x}_F - \vec{x}_G \\ &= a\,(2,\,0,\,7) + b\,(0,\,1,\,-2) - c\,(2,\,2,\,0) \\ &= \left(-\frac{2}{3}\,x + \frac{2}{3}\,y + \frac{1}{3}\,z\right)(2,\,0,\,7) + \left(-\frac{7}{3}\,x + \frac{7}{3}\,y + \frac{2}{3}\,z\right)(0,\,1,\,-2) - \left(\frac{7}{6}\,x - \frac{2}{3}\,y - \frac{1}{3}\,z\right)(2,\,2,\,0) \\ &= \left(-\frac{11}{3}\,x + \frac{8}{3}\,y + \frac{4}{3}\,z,\; -\frac{14}{3}\,x + \frac{11}{3}\,y + \frac{4}{3}\,z,\; z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} & \frac{11}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous voulez traiter cette question sans avoir à expliciter une base de F, démarrez comme précédemment en écrivant : $(x,y,z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Ensuite, vous vous contentez de poser : $\vec{x}_F = (a,b,c)$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet d'inconnues à déterminer, et vous identifiez coordonnée par coordonnée (et vous écrivez $\vec{x}_G = d\,(2,\,2,\,0)$ comme ci-dessus, au nom près de l'inconnue). Cela vous fait quatre inconnues (a, b, c et d) pour trois équations : c'est insuffisant pour résoudre le système. Pour bien avoir autant d'équations que d'inconnues, on utilise le fait que $\vec{x}_F$ soit dans F : on en déduit que les coordonnées de $\vec{x}_F$ vérifient l'équation du plan F, c'est-à-dire : $7\,a - 4\,b - 2\,c = 0$. Cela fait une quatrième équation, pour autant d'inconnues : vous savez résoudre classiquement avec la méthode du pivot.

Corrigé 97. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 12

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et} : G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 2\,y & + & 6\,z & = & 0 \\ 2\,x & + & 2\,y & + & 6\,z & = & 0 \\ -\;2\,x & - & 2\,y & - & 6\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x & + & 2\,y & + & 6\,z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array}\right. \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y - 3z \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right. \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a - 3b \\ y & = & a \\ z & = & b \end{array}\right. \end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \left\{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,1,\,0), (-3,\,0,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((-1,\,-1,\,1)\right).$$

Corrigé 98. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -24 & -36 \\ 4 & -8 & -12 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = A$, donc on a aussi : $f^2 = f$, ← page 12

et on en déduit que f est un projecteur. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a :

$$F = \mathrm{im}(f) = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer F et G, on veut donc déterminer $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$. Or vous savez que si l'on échelonne A en opérant *sur les colonnes uniquement*, alors les colonnes non nulles donnent une base de l'image de A, tandis que la trace des opérations effectuées permet d'en déduire une base du noyau de A. C'est particulièrement efficace pour en déduire $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ *en même temps*. Faisons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & -24 & -36 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & -12 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est le projecteur sur :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((12,\ 4,\ 1)),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((2,\ 1,\ 0), (3,\ 0,\ 1)).$$

Corrigé 99. ← page 12

1. Pour montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, le plus direct est simplement de montrer que la concaténation de deux familles de F et G (respectivement) est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenons pour F la famille $((2,\ -2,\ 2), (6,\ -4,\ 4))$ et pour G la famille $((6,\ -3,\ -4))$: démontrons que la famille $((2,\ -2,\ 2), (6,\ -4,\ 4), (6,\ -3,\ -4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -2 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 2\,(2 \cdot (-10) + 2 \cdot (3)) = -28 \neq 0.$$

Ainsi la famille $((2,\ -2,\ 2), (6,\ -4,\ 4), (6,\ -3,\ -4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour déterminer $p(x, y, z)$, il s'agit d'écrire (x, y, z) sous la forme : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$. On a alors : $p(x, y, z) = \vec{x}_F$. Explicitons $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.
Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe bien $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$ tels que : $(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. Comme $\vec{x}_F \in F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((2,\ -2,\ 2), (6,\ -4,\ 4))$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_F = a\,(2,\ -2,\ 2) + b\,(6,\ -4,\ 4)$. De même, comme $\vec{x}_G \in G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((6,\ -3,\ -4))$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{x}_G = c\,(6,\ -3,\ -4)$. Ainsi :

$$(x, y, z) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = a\,(2,\ -2,\ 2) + b\,(6,\ -4,\ 4) + c\,(6,\ -3,\ -4).$$

On détermine a, b et c en résolvant le système linéaire obtenu en identifiant coefficient par coefficient dans l'égalité ci-dessus :

$$(x, y, z) = a\,(2,\ -2,\ 2) + b\,(6,\ -4,\ 4) + c\,(6,\ -3,\ -4) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & 6b & + & 6c & = & x \\ -2a & - & 4b & - & 3c & = & y \\ 2a & + & 4b & - & 4c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2a & + & 6b & + & 6c & = & x & \\ & & 2b & + & 3c & = & x + y & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & - & 2b & - & 10c & = & -x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2a & + & 6b & + & 6c & = & x & \\ & & 2b & + & 3c & = & x + y & \\ & & & - & 7c & = & y + z & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

De là on déduit aisément :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& -x - \frac{12}{7}\,y - \frac{3}{14}\,z \\ b &=& \frac{1}{2}\,x + \frac{5}{7}\,y + \frac{3}{14}\,z \\ c &=& -\frac{1}{7}\,y - \frac{1}{7}\,z \end{array}\right. .$$

Par conséquent, l'image de (x, y, z) par le projecteur sur F parallèlement à G est :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \vec{x}_F \\ &= a\,(2,\,-2,\,2) + b\,(6,\,-4,\,4) \\ &= \left(-x - \frac{12}{7}\,y - \frac{3}{14}\,z\right)(2,\,-2,\,2) + \left(\frac{1}{2}\,x + \frac{5}{7}\,y + \frac{3}{14}\,z\right)(6,\,-4,\,4) \\ &= \left(x + \frac{6}{7}\,y + \frac{6}{7}\,z,\ \frac{4}{7}\,y - \frac{3}{7}\,z,\ -\frac{4}{7}\,y + \frac{3}{7}\,z\right). \end{aligned}$$

De cela on déduit aisément la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, ce qui conclut l'exercice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(p) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Corrigé 100. Un calcul direct montre que : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc on a aussi : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et on en déduit que f est une symétrie. Notons F et G ses caractéristiques géométriques, de sorte que f soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On sait que dans ce cas, on a : ← page 12

$$F = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\right\}, \text{ et : } G = \ker\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\right\}.$$

Pour les déterminer, il est préférable de passer par la matrice A (afin de l'échelonner, etc.), et de convertir le résultat obtenu en vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On détermine F en résolvant $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de même, on détermine G en résolvant $AX = -X$. Par exemple :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 20\,x &-& 44\,y &-& 44\,z &=& 0 \\ 8\,x &-& 18\,y &-& 16\,z &=& 0 \\ 2\,x &-& 4\,y &-& 6\,z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x &-& 4\,y &-& 6\,z &=& 0 & (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ 8\,x &-& 18\,y &-& 16\,z &=& 0 & \\ 20\,x &-& 44\,y &-& 44\,z &=& 0 & \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x &-& 4\,y &-& 6\,z &=& 0 & \\ &-& 2\,y &+& 8\,z &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1) \\ &-& 4\,y &+& 16\,z &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1) \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,x &-& 4\,y &-& 6\,z &=& 0 & \\ &-& 2\,y &+& 8\,z &=& 0 & \\ &&&& 0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2y + 3z \\ y &=& 4z \\ z &=& a \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 11a \\ y &=& 4a \\ z &=& a \end{array}\right. \end{aligned}$$

De là, on déduit : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On détermine de la même manière $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On trouve :

$$\ker\left(A + \mathrm{I}_3\right) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En conclusion, f est la symétrie par rapport à :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((11,\,4,\,1)\right),$$

et parallèlement à :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2,\,1,\,0), (2,\,0,\,1)\right).$$