Calculs de limites

Divers exercices où l'on cherche à calculer une limite après avoir levé une forme indéterminée grâce aux développements limités.

Remarque sur la programmation des corrigés. L'ordre des développements limités et asymptotiques est parfois un cran plus loin que nécessaire, à cause de défauts de programmation.

Exercice 1. Calculer : $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(6\,x) - \sin(x)}{\cos(5\,x) - 1}$. → page 10

Exercice 2. Calculer : $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{20\,x} + \frac{1}{e^{(-4\,\arctan(5\,x))} - 1} \right)$. → page 10

Exercice 3. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 10

$$u_n = \left(2\,\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \right)^{-2\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 11

$$u_n = \left(\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \right)^{-\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 5. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 11

$$f(x) = \frac{\ln(\sin(3\,x))}{\ln(\ln(2\,x + 1))} \times \frac{\ln(\ln(2\,x + 1) + 1)}{\ln(\cosh(3\,x))}.$$

Exercice 6. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 12

$$f(x) = \frac{\ln(\cosh(4\,x) - 1)}{\ln(-\cos(2\,x) + 1)} \times \frac{\ln(\sin(x) + 1)}{\ln(\cosh(x))}.$$

Exercice 7. Calculer : $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{3}{2}\,\cosh(2\,x) - \frac{3}{2}\right)} - \frac{1}{3\,x^2} \right)$. → page 12

Exercice 8. Calculer : $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{5}{2\,x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{3}{5}\,\sinh\left(\frac{2}{3}\,x\right)\right)} - 1} \right)$. → page 12

Exercice 9. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 13

$$u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 9\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{-n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 10. Calculer : $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{5}{12\,x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{4}{5}\,\sinh(3\,x)\right)} - 1} \right)$. → page 13

Exercice 11. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 14

$$f(x) = \frac{\ln(\sin(3\,x))}{\ln(\arctan(3\,x))} \times \frac{\ln(\ln(2\,x+1)+1)}{\ln(\cosh(x))}.$$

Exercice 12. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 14

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)^{-3\,n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 13. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(5\,x+1) - \ln(4\,x+1)}{\arctan(5\,x)}$. → page 15

Exercice 14. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(2\,x) - \tan(8\,x)}{\sin(3\,x)}$. → page 15

Exercice 15. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(4\,x)} - e^{(2\,x)}}{\cos(9\,x) - 1}$. → page 15

Exercice 16. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 15

$$\sqrt{n^4 - n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^6 + 2\,n^3 + 5}.$$

Exercice 17. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 16

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 8\,n - 1}.$$

Exercice 18. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 16

$$\sqrt{n^3 - n^2 - 9\,n - 1} - \sqrt{n^3 - 28\,n^2 - 2\,n - 2}.$$

Exercice 19. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 16

$$f(x) = \frac{\ln(\sinh(4\,x))}{\ln(\cosh(2\,x) - 1)} \times \frac{\ln(\sinh(x) + 1)}{\ln(\cos(3\,x))}.$$

Exercice 20. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 17

$$\sqrt[3]{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^2 + 67}.$$

Exercice 21. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 17

$$u_n = \left(\frac{2\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1\right)^{4\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 22. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 18

$$\sqrt[3]{n - 6} - \sqrt[3]{n + 6}.$$

Exercice 23. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 18

$$\sqrt{n^2 - 6\,n} - \sqrt{n^2 - n + 1}.$$

Exercice 24. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 18

$$\sqrt{n^3 + n^2 - n - 1} - \sqrt{n^3 + n^2 + 2\,n - 6}.$$

Exercice 25. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 19

$$f(x) = \frac{\ln(\sin(2\,x))}{\ln(-\cos(4\,x) + 1)} \times \frac{\ln(\sinh(2\,x) + 1)}{\ln(\cos(2\,x))}.$$

Exercice 26. Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{4}\,\sinh(x)\right) - 1} + \frac{32}{x^2} \right)$. → page 19

Exercice 27. Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(4\,x) - \arctan(x)}{\cosh(4\,x) - 1}$. → page 20

Exercice 28. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 20

$$u_n = \left(n \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 7\,\sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{-3\,n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 29. Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(9\,x) - \arctan(5\,x)}{\cosh(8\,x) - 1}$. → page 20

Exercice 30. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 21

$$u_n = \left(n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + 2\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 31. Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{10}{x} + \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{4}\,\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)} \right)$. → page 21

Exercice 32. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 22

$$u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) \right)^{-2\,n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 33. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 22

$$\sqrt{n^6 + 2\,n^4 + 2\,n^2 - 2} - \sqrt[3]{n^9 - 8\,n^6 + n^3 - 3}.$$

Exercice 34. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 22

$$u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)^{-\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 35. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 23

$$f(x) = \frac{\ln(\cosh(4x) - 1)}{\ln(-\cos(4x) + 1)} \times \frac{\ln(\sin(3x) + 1)}{\ln(\arctan(2x) + 1)}.$$

Exercice 36. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 24

$$u_n = \left(-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)^{-\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 37. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan(3x) - \arctan(x)}{\cos(5x) - 1}$. → page 24

Exercice 38. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 24

$$f(x) = \frac{\ln(\arctan(2x))}{\ln(e^{(3x)} - 1)} \times \frac{\ln(\sinh(3x) + 1)}{\ln(\cos(x))}.$$

Exercice 39. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(3x + 1) - \ln(7x + 1)}{\cosh(4x) - 1}$. → page 25

Exercice 40. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{\tan\left(-\frac{4}{3}\cos(2x) + \frac{4}{3}\right)} - \dfrac{3}{8x^2}\right)$. → page 25

Exercice 41. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 25

$$f(x) = \frac{\ln(\sinh(4x))}{\ln(e^{(2x)} - 1)} \times \frac{\ln(\sinh(2x) + 1)}{\ln(\arctan(2x) + 1)}.$$

Exercice 42. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 26

$$f(x) = \frac{\ln\left(e^{(3x)} - 1\right)}{\ln(-\cos(3x) + 1)} \times \frac{\ln(\ln(3x + 1) + 1)}{\ln(\cosh(x))}.$$

Exercice 43. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 26

$$f(x) = \frac{\ln(\arctan(4x))}{\ln(-\cos(2x) + 1)} \times \frac{\ln(\sinh(3x) + 1)}{\ln(\arctan(x) + 1)}.$$

Exercice 44. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 27

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 4\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 45. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 27

$$f(x) = \frac{\ln(\sinh(3\,x))}{\ln(\ln(3\,x+1))} \times \frac{\ln(\sinh(3\,x)+1)}{\ln(\cosh(3\,x))}.$$

Exercice 46. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 28

$$u_n = \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1\right)^{-5\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 47. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\cosh(5\,\arctan(x)) - 1} - \frac{2}{25\,x^2}\right)$. → page 28

Exercice 48. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 29

$$u_n = \left(\frac{4\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)^{4\,n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 49. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\frac{2}{3\,x} + \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{2}\,\sin(3\,x)\right)} - 1}\right)$. → page 29

Exercice 50. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 29

$$\sqrt{n^6 - 24\,n^3 - 1} - \sqrt{n^6 + 7\,n^4 - n^2 - 1}.$$

Exercice 51. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 30

$$u_n = \left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1\right)^{\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 52. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan(9\,x) - \tan(7\,x)}{\cos(9\,x) - 1}$. → page 30

Exercice 53. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arctan(9\,x) - \arctan(7\,x)}{\cosh(8\,x) - 1}$. → page 31

Exercice 54. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sinh(2\,x) - \sinh(4\,x)}{\cosh(6\,x) - 1}$. → page 31

Exercice 55. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arctan(5\,x) - \arctan(2\,x)}{\cos(x) - 1}$. → page 31

Exercice 56. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e^{\left(-\frac{4}{5}\,\cos\left(\frac{3}{5}\,x\right)+\frac{4}{5}\right)} - 1} - \frac{125}{18\,x^2}\right)$. → page 31

Exercice 57. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 32

$$\sqrt[3]{n^2 - 38\,n + 3} - \sqrt[3]{n^2 - 1}.$$

Exercice 58. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 32

$$u_n = \left(\frac{2\,\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)^{-\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 59. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(-\frac{1}{4}\,\sin\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right) - 1} + \frac{200}{x^2}\right).$ → page 32

Exercice 60. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 33

$$f(x) = \frac{\ln\left(\sinh\left(4\,x\right)\right)}{\ln\left(-\cos\left(3\,x\right) + 1\right)} \times \frac{\ln\left(\sin\left(x\right) + 1\right)}{\ln\left(\sinh\left(3\,x\right) + 1\right)}.$$

Exercice 61. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 33

$$u_n = \left(e^{\frac{1}{n}} + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{5\,n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 62. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 34

$$u_n = \left(n\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-3\,n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 63. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 34

$$u_n = \left(-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)^{-5\,\sqrt{n}}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 64. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 35

$$\sqrt[3]{n^3 + 97\,n^2} - \sqrt{n^2 + n + 8}.$$

Exercice 65. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(5\,x\right) - \sin\left(9\,x\right)}{e^{(6\,x)} - 1}.$ → page 35

Exercice 66. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 36

$$u_n = \left(-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 67. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 36

$$f(x) = \frac{\ln(\ln(2\,x+1))}{\ln(\arctan(4\,x))} \times \frac{\ln(\cos(2\,x))}{\ln(\cosh(2\,x))}.$$

Exercice 68. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 37

$$\sqrt[3]{n^6 - 7\,n^4 + 50\,n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 2\,n^3 + 1}.$$

Exercice 69. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\cos(-\sin(x)) - 1} + \frac{2}{x^2}\right)$. → page 37

Exercice 70. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 37

$$f(x) = \frac{\ln(\sinh(4\,x))}{\ln(\arctan(4\,x))} \times \frac{\ln(\ln(x+1)+1)}{\ln(\cosh(x))}.$$

Exercice 71. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\frac{5}{4\,x} + \frac{1}{\tan\left(2\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)}\right)$. → page 38

Exercice 72. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 38

$$f(x) = \frac{\ln(\cosh(3\,x) - 1)}{\ln(\arctan(2\,x))} \times \frac{\ln(\sin(2\,x)+1)}{\ln(\cos(x))}.$$

Exercice 73. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 38

$$u_n = \left(-\frac{2\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)^{6\,n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 74. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan(6\,x) - \tan(5\,x)}{e^{(2\,x)} - 1}$. → page 39

Exercice 75. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 39

$$f(x) = \frac{\ln(\arctan(4\,x))}{\ln(-\cos(4\,x)+1)} \times \frac{\ln(\sin(x)+1)}{\ln(\cosh(3\,x))}.$$

Exercice 76. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 40

$$u_n = \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + 1\right)^{n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 77. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arctan(6\,x) - \arctan(2\,x)}{\cos(x) - 1}$. → page 40

Exercice 78. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 40

$$f(x)=\frac{\ln\left(\arctan\left(4\,x\right)\right)}{\ln\left(\cosh\left(3\,x\right)-1\right)}\times\frac{\ln\left(\sinh\left(2\,x\right)+1\right)}{\ln\left(\cosh\left(3\,x\right)\right)}.$$

Exercice 79. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{3}{20\,x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{5}{3}\,\sin\left(4\,x\right)\right)}\right).$ → page 41

Exercice 80. Calculer la limite quand $x\to 0^+$ de : → page 41

$$f(x)=\frac{\ln\left(e^{(4\,x)}-1\right)}{\ln\left(\cosh\left(4\,x\right)-1\right)}\times\frac{\ln\left(\sin\left(3\,x\right)+1\right)}{\ln\left(\ln\left(3\,x+1\right)+1\right)}.$$

Exercice 81. Calculer la limite quand $x\to 0^+$ de : → page 42

$$f(x)=\frac{\ln\left(\arctan\left(2\,x\right)\right)}{\ln\left(-\cos\left(3\,x\right)+1\right)}\times\frac{\ln\left(\ln\left(2\,x+1\right)+1\right)}{\ln\left(\sinh\left(3\,x\right)+1\right)}.$$

Exercice 82. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(2\,x\right)-\sin\left(5\,x\right)}{\arctan\left(9\,x\right)}.$ → page 42

Exercice 83. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(8\,x\right)-\sin\left(x\right)}{\cosh\left(9\,x\right)-1}.$ → page 42

Exercice 84. Calculer la limite quand $x\to 0^+$ de : → page 42

$$f(x)=\frac{\ln\left(\sinh\left(3\,x\right)\right)}{\ln\left(\sin\left(3\,x\right)\right)}\times\frac{\ln\left(\arctan\left(x\right)+1\right)}{\ln\left(\cosh\left(2\,x\right)\right)}.$$

Exercice 85. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{4}{3\,x}+\frac{1}{\arctan\left(3\,\sinh\left(\frac{1}{4}\,x\right)\right)}\right).$ → page 43

Exercice 86. Calculer la limite quand $n\to+\infty$ de : → page 43

$$\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3+n^2-4\,n+3}.$$

Exercice 87. Calculer la limite quand $n\to+\infty$ de : → page 44

$$\sqrt{n^6+2\,n^4-n^2+1}-\sqrt[3]{n^9+4}.$$

Exercice 88. Calculer la limite quand $n\to+\infty$ de : → page 44

$$\sqrt[3]{n^6+2\,n^3}-\sqrt[3]{n^6+n^4-3\,n^2+1}.$$

Exercice 89. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sinh\left(7\,x\right)-\sinh\left(8\,x\right)}{\cosh\left(8\,x\right)-1}.$ → page 44

Exercice 90. Calculer la limite quand $n\to+\infty$ de : → page 44

$$\sqrt{n^2+3}-\sqrt[3]{n^3+21}.$$

Exercice 91. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 45

$$f(x) = \frac{\ln(\sinh(4\,x))}{\ln(\cosh(2\,x) - 1)} \times \frac{\ln(\sin(x) + 1)}{\ln(\cos(2\,x))}.$$

Exercice 92. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 45

$$\sqrt{n^3 - n^2} - \sqrt{n^3 + 1}.$$

Exercice 93. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 46

$$u_n = \left(e^{\frac{1}{n}} + 3\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2\,n^2}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 94. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(2\,x + 1) - \ln(x + 1)}{\cos(7\,x) - 1}$. → page 46

Exercice 95. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de : → page 46

$$u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) + 2\,\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)\right)^{3\,n}.$$

De plus, si cette limite est un réel ℓ, donner un équivalent asymptotique simple de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 96. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 47

$$\sqrt{n^3 + 6} - \sqrt{n^3 - n^2 + 2\,n}.$$

Exercice 97. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 47

$$f(x) = \frac{\ln(\sin(3\,x))}{\ln(-\cos(3\,x) + 1)} \times \frac{\ln(\sinh(x) + 1)}{\ln(\cos(3\,x))}.$$

Exercice 98. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(4\,x + 1) - \ln(2\,x + 1)}{e^{(6\,x)} - 1}$. → page 48

Exercice 99. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de : → page 48

$$\sqrt[3]{n^3 - 3\,n^2 + n - 6} - \sqrt{n^2 - 2\,n - 1}.$$

Exercice 100. Calculer la limite quand $x \to 0^+$ de : → page 48

$$f(x) = \frac{\ln(\cosh(2\,x) - 1)}{\ln(-\cos(4\,x) + 1)} \times \frac{\ln(\ln(x + 1) + 1)}{\ln(\cosh(2\,x))}.$$

Corrigé 1. Au voisinage de 0, on a : $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 1

$$\frac{\sin(6x) - \sin(x)}{\cos(5x) - 1} = \frac{\left(6x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{-\frac{25}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{5x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{-\frac{25}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{5x}{-\frac{25}{2}x^2} = -\frac{2}{5x}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(6x) - \sin(x)}{\cos(5x) - 1} = -\infty$.

Corrigé 2. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $5x$) avec celui de $x \mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $-4\arctan(5x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 1

$$\begin{aligned} e^{(-4\arctan(5x))} &= 1 + \left(5x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(5x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= 1 - 20x + 200x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{(-4\arctan(5x))} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -20x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{20x} + \frac{1}{e^{(-4\arctan(5x))} - 1} = \frac{20x + \left(-20x + 200x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{20x(e^{(-4\arctan(5x))} - 1)} = \frac{200x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{20x(e^{(-4\arctan(5x))} - 1)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{200x^2}{-400x^2} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{20x} + \dfrac{1}{e^{(-4\arctan(5x))} - 1}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Corrigé 3. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 1

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-2\sqrt{n}\ln\left(2\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$2\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1 = 1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned} -2\sqrt{n}\ln\left(2\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) &= -2\sqrt{n}\left[\left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\frac{6}{\sqrt{n}} + \frac{11}{n^{\frac{3}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{6}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\sqrt{n}\ln\left(2\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) = 0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - 1 = \exp\left(-\frac{6}{\sqrt{n}} + \frac{11}{n^{\frac{3}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{6}{\sqrt{n}}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 4. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 1

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-\sqrt{n}\ln\left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),$$

et :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1 = 1 - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 1 (ou 2 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}-\sqrt{n}\ln\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)+1\right) &= -\sqrt{n}\left[\left(-\frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{2\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\,n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\,n^{\frac{5}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,n^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n}\ln\left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right) = 0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - 1 = \exp\left(\frac{1}{2\,n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\,n^{\frac{5}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,n^{\frac{3}{2}}}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 5. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(2\,x+1)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(3\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\ln(2\,x+1)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(2\,x+1)$, et : $\ln(\cosh(3\,x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(3\,x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$, où l'on prend respectivement $u = 2\,x$ et $u = 3\,x$, impliquent : ← page 1

$$\frac{\ln(\ln(2\,x+1)+1)}{\ln(\cosh(3\,x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(2\,x+1)}{\cosh(3\,x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,x}{\frac{9}{2}\,x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{9\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\ln(x+1) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sin(3\,x))}{\ln(\ln(2\,x+1))} = \frac{\ln(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((3\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((2\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(2) + \ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln(x)}{\ln(x)}\times\frac{4}{9\,x}=\frac{4}{9\,x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Corrigé 6. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(x)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ et $\cosh(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to 1}{\sim}u-1$, on a : $\ln(\sin(x)+1)\underset{x\to 0}{\sim}\sin(x)$, et : $\ln(\cosh(x))\underset{x\to 0}{\sim}\cosh(x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u)\underset{u\to 0}{\sim}u$ et $\cosh(u)-1\underset{u\to 0}{\sim}\frac{1}{2}\,u^2$, impliquent : ← page 1

$$\frac{\ln(\sin(x)+1)}{\ln(\cosh(x))}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\sin(x)}{\cosh(x)-1}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{\frac{1}{2}\,x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$, et : $\cos(x)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\cosh(4\,x)-1)}{\ln(-\cos(2\,x)+1)}=\frac{\ln(8\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))}{\ln(2\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))}=\frac{\ln((8\,x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((2\,x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}=\frac{\ln(8)+2\,\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(2)+2\,\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\,\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(8)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ln(8)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\,\ln(x)}{2\,\ln(x)}\times\frac{2}{x}=\frac{2}{x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Corrigé 7. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{24}\,x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-2\,x$) avec celui de $x\mapsto\tan(x)$, ce qui est licite puisque $\frac{3}{2}\cosh(2\,x)-\frac{3}{2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, et on obtient : ← page 1

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{3}{2}\cosh(2\,x)-\frac{3}{2}\right)&=+\left(2\,x^2+\frac{2}{3}\,x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\\&=3\,x^2+x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\tan\left(\frac{3}{2}\cosh(2\,x)-\frac{3}{2}\right)\underset{x\to 0^+}{\sim}3\,x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{3}{2}\cosh(2\,x)-\frac{3}{2}\right)}-\frac{1}{3\,x^2}=\frac{3\,x^2-\left(3\,x^2+x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)}{3\,x^2\tan\left(\frac{3}{2}\cosh(2\,x)-\frac{3}{2}\right)}=\frac{-x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)}{3\,x^2\tan\left(\frac{3}{2}\cosh(2\,x)-\frac{3}{2}\right)}\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{-x^4}{9\,x^4}=-\frac{1}{9}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\tan\left(\frac{3}{2}\cosh(2\,x)-\frac{3}{2}\right)}-\dfrac{1}{3\,x^2}\right)=-\dfrac{1}{9}$.

Corrigé 8. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x)=x+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. ← page 1

On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-\frac{2}{3}\,x$) avec celui de $x \mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $-\frac{3}{5}\,\sinh\left(\frac{2}{3}\,x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\left(-\frac{3}{5}\,\sinh\left(\frac{2}{3}\,x\right)\right)} &= 1 + \left(-\frac{2}{3}\,x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\,x + \underset{x\to 0}{o}\left(x\right)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 - \frac{2}{5}\,x + \frac{2}{25}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{\left(-\frac{3}{5}\,\sinh\left(\frac{2}{3}\,x\right)\right)} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{2}{5}\,x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{5}{2\,x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{3}{5}\,\sinh\left(\frac{2}{3}\,x\right)\right)} - 1} = \frac{2\,x + 5\left(-\frac{2}{5}\,x + \frac{2}{25}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)}{2\,x\left(e^{\left(-\frac{3}{5}\,\sinh\left(\frac{2}{3}\,x\right)\right)} - 1\right)} = \frac{\frac{2}{5}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{2\,x\left(e^{\left(-\frac{3}{5}\,\sinh\left(\frac{2}{3}\,x\right)\right)} - 1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{2}{25}\,x^2}{-\frac{4}{5}\,x^2} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{5}{2\,x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{3}{5}\,\sinh\left(\frac{2}{3}\,x\right)\right)} - 1}\right) = -\frac{1}{2}$.

Corrigé 9. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 1

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-n\ln\left(-9\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\arctan\left(x\right) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\sin\left(x\right) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 9\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{9}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned} -n\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 9\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= -n\left[\left(-\frac{9}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \frac{122}{3\,n} + 9 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 9. \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln\left(-9\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 9$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^9$ par continuité en 9 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^9 = e^9\left(\exp\left(\frac{122}{3\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{122\,e^9}{3\,n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 10. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh\left(x\right) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. ← page 1

On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-3\,x$) avec celui de $x \mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $-\frac{4}{5}\sinh(3\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\left(-\frac{4}{5}\sinh(3\,x)\right)} &= 1 + \left(-3\,x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 - \frac{12}{5}\,x + \frac{72}{25}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{\left(-\frac{4}{5}\sinh(3\,x)\right)} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{12}{5}\,x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$\frac{5}{12\,x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{4}{5}\sinh(3\,x)\right)} - 1} = \frac{12\,x + 5\left(-\frac{12}{5}\,x + \frac{72}{25}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)}{12\,x\left(e^{\left(-\frac{4}{5}\sinh(3\,x)\right)} - 1\right)} = \frac{\frac{72}{5}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{12\,x\left(e^{\left(-\frac{4}{5}\sinh(3\,x)\right)} - 1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{72}{25}\,x^2}{-\frac{144}{5}\,x^2} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5}{12\,x} + \frac{1}{e^{\left(-\frac{4}{5}\sinh(3\,x)\right)} - 1}\right) = -\frac{1}{2}$.

Corrigé 11. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(2\,x+1)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\ln(2\,x+1)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(2\,x+1)$, et : $\ln(\cosh(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u)-1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend $u = 2\,x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 1

$$\frac{\ln(\ln(2\,x+1)+1)}{\ln(\cosh(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(2\,x+1)}{\cosh(x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,x}{\frac{1}{2}\,x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sin(3\,x))}{\ln(\arctan(3\,x))} = \frac{\ln(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((3\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((3\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \frac{4}{x} = \frac{4}{x},$$

et en outre : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 12. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 2

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-3\,n\ln\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$-3\,n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right) = -3\,n\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= \frac{9}{2\,n}-3+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-3.$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\,n\ln\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-3$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{(-3)}$ par continuité en -3 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^{(-3)} = e^{(-3)}\left(\exp\left(\frac{9}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{9\,e^{(-3)}}{2\,n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 13. Au voisinage de 0, on a : $\ln(x+1) = x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\arctan(x) = x+\underset{x\to0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 2

$$\frac{\ln(5\,x+1)-\ln(4\,x+1)}{\arctan(5\,x)} = \frac{\left(5\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(4\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{5\,x+\underset{x\to0}{o}(x)} = \frac{x+\underset{x\to0}{o}(x)}{5\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{5\,x}=\frac{1}{5}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(5\,x+1)-\ln(4\,x+1)}{\arctan(5\,x)}=\dfrac{1}{5}$.

Corrigé 14. Au voisinage de 0, on a : $\tan(x) = x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\sin(x) = x+\underset{x\to0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 2

$$\frac{\tan(2\,x)-\tan(8\,x)}{\sin(3\,x)} = \frac{\left(2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(8\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{3\,x+\underset{x\to0}{o}(x)} = \frac{-6\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}{3\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{-6\,x}{3\,x}=-2.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan(2\,x)-\tan(8\,x)}{\sin(3\,x)}=-2$.

Corrigé 15. Au voisinage de 0, on a : $e^x = 1+x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 2

$$\frac{e^{(4\,x)}-e^{(2\,x)}}{\cos(9\,x)-1} = \frac{\left(4\,x+1+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(2\,x+1+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{-\frac{81}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)} = \frac{2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}{-\frac{81}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{2\,x}{-\frac{81}{2}x^2}=-\frac{4}{81\,x}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{(4\,x)}-e^{(2\,x)}}{\cos(9\,x)-1}=-\infty$.

Corrigé 16. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sqrt{n^4-n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+2\,n^3+5} &= \sqrt{n^4\cdot\left(\frac{n^4-n^2+1}{n^4}\right)}-\sqrt[3]{n^6\cdot\left(\frac{n^6+2\,n^3+5}{n^6}\right)}\\ &= n^2\times\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-n^2\times\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}+\frac{5}{n^6}}\\ &= n^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right.\\ &\left.-\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3}+\frac{5}{n^6}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\\ &= n^2\left[-\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=-\frac{1}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^4-n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+2\,n^3+5}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Corrigé 17. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-8\,n-1} &= \sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2-8\,n-1}{n^2}\right)}\\ &= n\times\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-n\times\sqrt{1-\frac{8}{n}-\frac{1}{n^2}}\\ &= n\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.\\ &\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= n\left[\frac{9}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{9}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-8\,n-1}\right)=\dfrac{9}{2}$. Notons qu'il aurait également été possible de trouver cet équivalent avec la méthode de la multiplication par le conjugué.

Corrigé 18. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3-n^2-9\,n-1}-\sqrt{n^3-28\,n^2-2\,n-2} &= \sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3-n^2-9\,n-1}{n^3}\right)}-\sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3-28\,n^2-2\,n-2}{n^3}\right)}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{9}{n^2}-\frac{1}{n^3}}-n^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{1-\frac{28}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}-\frac{9}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.\\ &\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{28}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{27}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{27}{2}\sqrt{n}+\underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{27}{2}\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3-n^2-9\,n-1}-\sqrt{n^3-28\,n^2-2\,n-2}\right)=+\infty$. Notons qu'il aurait également été possible de trouver cet équivalent avec la méthode de la multiplication par le conjugué.

Corrigé 19. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(x)+1\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$ et $\cos(3\,x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to1}{\sim}u-1$, on a : $\ln(\sinh(x)+1)\underset{x\to0}{\sim}\sinh(x)$, et : $\ln(\cos(3\,x))\underset{x\to0}{\sim}\cos(3\,x)-1$. ← page 2

Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u = 3x$ dans le second développement limité, impliquent :

$$\frac{\ln(\sinh(x)+1)}{\ln(\cos(3x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sinh(x)}{\cos(3x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{-\frac{9}{2}x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{9x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(4x))}{\ln(\cosh(2x)-1)} = \frac{\ln(4x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((4x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((2x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(2) + 2\ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)} \times \left(-\frac{2}{9x}\right) = -\frac{1}{9x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Corrigé 20. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2+67} &= \sqrt[3]{n^2 \cdot \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)} - \sqrt[3]{n^2 \cdot \left(\frac{n^2+67}{n^2}\right)} \\
&= n^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - n^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{1 + \frac{67}{n^2}} \\
&= n^{\frac{2}{3}} \left[\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{67}{n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \\
&= n^{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{3n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{3n^{\frac{1}{3}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^{\frac{1}{3}}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2+67}\right) = 0$.

Corrigé 21. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 2

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(4\sqrt{n}\ln\left(\frac{2e^{\frac{1}{n}}}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

et :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\frac{2e^{\frac{1}{n}}}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1 = 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}4\sqrt{n}\ln\left(\frac{2\,e^{\frac{1}{n}}}{n}+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right) &= 4\sqrt{n}\left[\left(\frac{3}{n}+\frac{3}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= \frac{12}{\sqrt{n}}-\frac{12}{n^{\frac{3}{2}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{12}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\sqrt{n}\ln\left(\frac{2\,e^{\frac{1}{n}}}{n}+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right)=0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n-1=\exp\left(\frac{12}{\sqrt{n}}-\frac{12}{n^{\frac{3}{2}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{12}{\sqrt{n}}$$

(on utilise la formule : $e^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 22. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 2

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n-6}-\sqrt[3]{n+6} &= \sqrt[3]{n\cdot\left(\frac{n-6}{n}\right)}-\sqrt[3]{n\cdot\left(\frac{n+6}{n}\right)}\\ &= n^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[3]{1-\frac{6}{n}}-n^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[3]{1+\frac{6}{n}}\\ &= n^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{6}{n}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.\\ &\left.-\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{6}{n}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= n^{\frac{1}{3}}\left[-\frac{4}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{4}{n^{\frac{2}{3}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{4}{n^{\frac{2}{3}}}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n-6}-\sqrt[3]{n+6}\right)=0$.

Corrigé 23. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2-6\,n}-\sqrt{n^2-n+1} &= \sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2-6\,n}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)}\\ &= n\times\sqrt{1-\frac{6}{n}}-n\times\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\\ &= n\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{6}{n}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.\\ &\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= n\left[-\frac{5}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{5}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-6\,n}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=-\frac{5}{2}$. Notons qu'il aurait également été possible de trouver cet équivalent avec la méthode de la multiplication par le conjugué.

Corrigé 24. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3+n^2-n-1}-\sqrt{n^3+n^2+2\,n-6} &= \sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3}\right)}-\sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3+n^2+2\,n-6}{n^3}\right)}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}-n^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{6}{n^3}}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)+-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+1\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right.\\ &\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{6}{n^3}\right)+-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{6}{n^3}+1\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{3}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=-\frac{3}{2\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{3}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2-n-1}-\sqrt{n^3+n^2+2\,n-6}\right)=0$. Notons qu'il aurait également été possible de trouver cet équivalent avec la méthode de la multiplication par le conjugué.

Corrigé 25. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(2\,x)+1\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$ et $\cos(2\,x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to1}{\sim}u-1$, on a : $\ln(\sinh(2\,x)+1)\underset{x\to0}{\sim}\sinh(2\,x)$, et : $\ln(\cos(2\,x))\underset{x\to0}{\sim}\cos(2\,x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u)\underset{u\to0}{\sim}u$ et $\cos(u)-1\underset{u\to0}{\sim}-\frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend $u=2\,x$, impliquent : ← page 3

$$\frac{\ln(\sinh(2\,x)+1)}{\ln(\cos(2\,x))}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\sinh(2\,x)}{\cos(2\,x)-1}\underset{x\to0}{\sim}\frac{2\,x}{-2\,x^2}\underset{x\to0}{\sim}-\frac{1}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sin(x)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\cos(x)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sin(2\,x))}{\ln(-\cos(4\,x)+1)}=\frac{\ln(2\,x+\underset{x\to0}{o}(x))}{\ln(8\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))}=\frac{\ln((2\,x)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}{\ln((8\,x^2)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}=\frac{\ln(2)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}{\ln(8)+2\,\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)}\times\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2\,x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

Corrigé 26. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to0}{o}(x^4)$. On compose ce développement limité avec celui de $x\mapsto\cos(x)$, ce qui est licite puisque $\frac{1}{4}\,\sinh(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, et on obtient : ← page 3

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{1}{4}\,\sinh(x)\right)&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\,x^3+x+\underset{x\to0}{o}(x^3)\right)^2+\frac{1}{24}\left(x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)\\&=1-\frac{1}{32}\,x^2-\frac{21}{2048}\,x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\cos\left(\frac{1}{4}\,\sinh(x)\right)-1\underset{x\to0^+}{\sim}-\frac{1}{32}\,x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{4}\,\sinh(x)\right)-1}+\frac{32}{x^2}=\frac{x^2+32\left(-\frac{1}{32}\,x^2-\frac{21}{2048}\,x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)\right)}{x^2\left(\cos\left(\frac{1}{4}\,\sinh(x)\right)-1\right)}=\frac{-\frac{21}{64}\,x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)}{x^2\left(\cos\left(\frac{1}{4}\,\sinh(x)\right)-1\right)}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{-\frac{21}{2048}\,x^4}{-\frac{1}{32}\,x^4}=\frac{21}{2}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{4}\,\sinh(x)\right)-1}+\frac{32}{x^2}\right)=\frac{21}{2}.$

Corrigé 27. Au voisinage de 0, on a : $\arctan(x)=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 3

$$\frac{\arctan(4\,x)-\arctan(x)}{\cosh(4\,x)-1}=\frac{\left(4\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{8\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}=\frac{3\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{8\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{3\,x}{8\,x^2}=\frac{3}{8\,x}.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(4\,x)-\arctan(x)}{\cosh(4\,x)-1}=+\infty.$

Corrigé 28. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 3

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n=\exp\left(-3\,n\ln\left(7\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)+n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sin(x)=x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+7\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{7}{n}+\frac{1}{6\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}-3\,n\ln\left(n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+7\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)&=-3\,n\left[\left(\frac{7}{n}+\frac{1}{6\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{7}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\frac{73}{n}-21+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-21.\end{aligned}$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}-3\,n\ln\left(7\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)+n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-21$, puis : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=e^{(-21)}$ par continuité en -21 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n-e^{(-21)}=e^{(-21)}\left(\exp\left(\frac{73}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{73\,e^{(-21)}}{n}$$

(on utilise la formule : $e^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 29. Au voisinage de 0, on a : $\arctan(x)=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 3

$$\frac{\arctan(9\,x)-\arctan(5\,x)}{\cosh(8\,x)-1}=\frac{\left(9\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(5\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{32\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}=\frac{4\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{32\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{4\,x}{32\,x^2}=\frac{1}{8\,x}.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(9\,x)-\arctan(5\,x)}{\cosh(8\,x)-1} = +\infty.$

Corrigé 30. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 3

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(2\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+2\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{2}{n}-\frac{1}{3\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\ln\left(n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+2\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \sqrt{n}\left[\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{3\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= \frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{7}{3\,n^{\frac{3}{2}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\left(2\,\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)=0$, puis : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n-1=\exp\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{7}{3\,n^{\frac{3}{2}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\sqrt{n}}$$

(on utilise la formule : $e^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 31. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x)=x+\frac{1}{6}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $\frac{2}{5}\,x$) avec celui de $x\mapsto\tan(x)$, ce qui est licite puisque $\frac{1}{4}\,\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, et on obtient : ← page 3

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{1}{4}\,\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right) &= +\left(\frac{2}{5}\,x+\frac{4}{375}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ &= \frac{1}{10}\,x+\frac{3}{1000}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\tan\left(\frac{1}{4}\,\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{10}\,x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$-\frac{10}{x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{4}\,\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)}=\frac{x-10\left(\frac{1}{10}\,x+\frac{3}{1000}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)}{x\tan\left(\frac{1}{4}\,\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)}=\frac{-\frac{3}{100}\,x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{x\tan\left(\frac{1}{4}\,\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)}\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{-\frac{3}{1000}\,x^3}{\frac{1}{10}\,x^2}=-\frac{3}{10}\,x.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{10}{x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{4}\,\sinh\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)}\right)=0.$

Corrigé 32. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 3

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-2\,n\ln\left(-\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned} -2\,n\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right) &= -2\,n\left[\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{n}+2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2. \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\,n\ln\left(-\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$ par continuité en 2 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^2 = e^2\left(\exp\left(-\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^2}{n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 33. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 3

$$\begin{aligned} \sqrt{n^6+2\,n^4+2\,n^2-2} - \sqrt[3]{n^9-8\,n^6+n^3-3} &= \sqrt{n^6\cdot\left(\frac{n^6+2\,n^4+2\,n^2-2}{n^6}\right)} - \sqrt[3]{n^9\cdot\left(\frac{n^9-8\,n^6+n^3-3}{n^9}\right)} \\ &= n^3\times\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^4}-\frac{2}{n^6}} - n^3\times\sqrt[3]{1-\frac{8}{n^3}+\frac{1}{n^6}-\frac{3}{n^9}} \\ &= n^3\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^4}-\frac{2}{n^6}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right. \\ &\left.\quad-\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{8}{n^3}+\frac{1}{n^6}-\frac{3}{n^9}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] \\ &= n^3\left[\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = n + \underset{n\to+\infty}{o}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n. \end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^6+2\,n^4+2\,n^2-2} - \sqrt[3]{n^9-8\,n^6+n^3-3}\right) = +\infty$.

Corrigé 34. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 3

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-\sqrt{n}\ln\left(-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\cosh(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

et :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}
-\sqrt{n}\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right) &= -\sqrt{n}\left[\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{3\,n^{\frac{3}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n}\ln\left(-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - 1 = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{3\,n^{\frac{3}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 35. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(3\,x) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\arctan(2\,x) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. ← page 4
Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\sin(3\,x) + 1) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(3\,x)$, et : $\ln(\arctan(2\,x) + 1) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(2\,x)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, où l'on prend respectivement $u = 3\,x$ et $u = 2\,x$, impliquent :

$$\frac{\ln(\sin(3\,x) + 1)}{\ln(\arctan(2\,x) + 1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin(3\,x)}{\arctan(2\,x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3\,x}{2\,x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3}{2}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\cosh(4\,x) - 1)}{\ln(-\cos(4\,x) + 1)} = \frac{\ln(8\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))}{\ln(8\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((8\,x^2)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((8\,x^2)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(8) + 2\,\ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(8) + 2\,\ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(8) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(8)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,\ln(x)}{2\,\ln(x)} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{3}{2}$.

Corrigé 36. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 4

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-\sqrt{n}\ln\left(-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + 1 = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{5}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 1 (ou 2 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}-\sqrt{n}\ln\left(-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) &= -\sqrt{n}\left[\left(-\frac{1}{n^2} - \frac{5}{6\,n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\ &= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{6\,n^{\frac{5}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n}\ln\left(-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) = 0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - 1 = \exp\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{6\,n^{\frac{5}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 37. Au voisinage de 0, on a : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 4

$$\frac{\arctan(3\,x) - \arctan(x)}{\cos(5\,x) - 1} = \frac{\left(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{-\frac{25}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{-\frac{25}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,x}{-\frac{25}{2}x^2} = -\frac{4}{25\,x}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(3\,x) - \arctan(x)}{\cos(5\,x) - 1} = -\infty$.

Corrigé 38. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(3\,x) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\sinh(3\,x) + 1) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(3\,x)$, et : $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u = 3\,x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 4

$$\frac{\ln(\sinh(3\,x) + 1)}{\ln(\cos(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sinh(3\,x)}{\cos(x) - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3\,x}{-\frac{1}{2}x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{6}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\arctan(2\,x))}{\ln\left(e^{(3\,x)}-1\right)} = \frac{\ln(2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{\ln(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((2\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((3\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(2) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \left(-\frac{6}{x}\right) = -\frac{6}{x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Corrigé 39. Au voisinage de 0, on a : $\ln(x+1) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 4

$$\frac{\ln(3\,x+1) - \ln(7\,x+1)}{\cosh(4\,x) - 1} = \frac{\left(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - \left(7\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{8\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{-4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{8\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-4\,x}{8\,x^2} = -\frac{1}{2\,x}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(3\,x+1) - \ln(7\,x+1)}{\cosh(4\,x) - 1} = -\infty$.

Corrigé 40. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-2\,x$) avec celui de $x \mapsto \tan(x)$, ce qui est licite puisque $-\frac{4}{3}\cos(2\,x) + \frac{4}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 4

$$\begin{aligned}\tan\left(-\frac{4}{3}\cos(2\,x) + \frac{4}{3}\right) &= +\left(-2\,x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\ &= \frac{8}{3}\,x^2 - \frac{8}{9}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\tan\left(-\frac{4}{3}\cos(2\,x) + \frac{4}{3}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{8}{3}\,x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\tan\left(-\frac{4}{3}\cos(2\,x) + \frac{4}{3}\right)} - \frac{3}{8\,x^2} = \frac{8\,x^2 - 3\left(\frac{8}{3}\,x^2 - \frac{8}{9}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)}{8\,x^2\tan\left(-\frac{4}{3}\cos(2\,x) + \frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{8}{3}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{8\,x^2\tan\left(-\frac{4}{3}\cos(2\,x) + \frac{4}{3}\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{8}{9}\,x^4}{\frac{64}{3}\,x^4} = \frac{1}{8}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\tan\left(-\frac{4}{3}\cos(2\,x) + \frac{4}{3}\right)} - \dfrac{3}{8\,x^2}\right) = \dfrac{1}{8}$.

Corrigé 41. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(2\,x) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\arctan(2\,x) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\sinh(2\,x) + 1) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(2\,x)$, et : $\ln(\arctan(2\,x) + 1) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(2\,x)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, où l'on prend $u = 2\,x$, impliquent : ← page 4

$$\frac{\ln(\sinh(2\,x) + 1)}{\ln(\arctan(2\,x) + 1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sinh(2\,x)}{\arctan(2\,x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,x}{2\,x} \underset{x\to 0}{\sim} 1.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(4\,x))}{\ln\left(e^{(2\,x)}-1\right)} = \frac{\ln(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((4\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((2\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(2) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times 1 = 1,$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Corrigé 42. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(3\,x+1)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\ln(3\,x+1)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(3\,x+1)$, et : $\ln(\cosh(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u)-1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend $u = 3\,x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 4

$$\frac{\ln(\ln(3\,x+1)+1)}{\ln(\cosh(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(3\,x+1)}{\cosh(x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3\,x}{\frac{1}{2}\,x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{6}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln\left(e^{(3\,x)}-1\right)}{\ln(-\cos(3\,x)+1)} = \frac{\ln(3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((3\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}\,x^2)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2}) + 2\,\ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)} \times \frac{6}{x} = \frac{3}{x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 43. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(3\,x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\arctan(x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\sinh(3\,x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(3\,x)$, et : $\ln(\arctan(x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, où l'on prend $u = 3\,x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 4

$$\frac{\ln(\sinh(3\,x)+1)}{\ln(\arctan(x)+1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sinh(3\,x)}{\arctan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3\,x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 3.$$

Passons à la première fraction. On a : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\arctan(4\,x))}{\ln(-\cos(2\,x)+1)} = \frac{\ln(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(2\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((4\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((2\,x^2)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(2) + 2\,\ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)} \times 3 = \frac{3}{2},$$

et en outre : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{3}{2}$.

Corrigé 44. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 4

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(n \ln\left(-4 \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sinh(x) = x + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 4 \sinh\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{4}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned} n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 4 \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= n\left[\left(-\frac{4}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\frac{17}{2n} - 4 + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -4. \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(-4 \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -4$, puis : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^{(-4)}$ par continuité en -4 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^{(-4)} = e^{(-4)}\left(\exp\left(-\frac{17}{2n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{17\, e^{(-4)}}{2n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 45. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(3x) + 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(3x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u \to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\sinh(3x) + 1) \underset{x \to 0}{\sim} \sinh(3x)$, et : $\ln(\cosh(3x)) \underset{x \to 0}{\sim} \cosh(3x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u) - 1 \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{2} u^2$, où l'on prend $u = 3x$, impliquent : ← page 5

$$\frac{\ln(\sinh(3x) + 1)}{\ln(\cosh(3x))} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\sinh(3x)}{\cosh(3x) - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{3x}{\frac{9}{2} x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2}{3x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$, et : $\ln(x+1) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(3x))}{\ln(\ln(3x+1))} = \frac{\ln(3x + \underset{x \to 0}{o}(x))}{\ln(3x + \underset{x \to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((3x)(1 + \underset{x \to 0}{o}(1)))}{\ln((3x)(1 + \underset{x \to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x \to 0}{o}(1))}{\ln(3) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x \to 0}{o}(1))} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3) + \ln(1 + \underset{x \to 0}{o}(1)) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \frac{2}{3x} = \frac{2}{3x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 46. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 5

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-5\sqrt{n}\ln\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + 1 = 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}-5\sqrt{n}\ln\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right) &= -5\sqrt{n}\left[\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= -\frac{10}{\sqrt{n}} + \frac{25}{2n^{\frac{3}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{10}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n}\ln\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right) = 0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - 1 = \exp\left(-\frac{10}{\sqrt{n}} + \frac{25}{2n^{\frac{3}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{10}{\sqrt{n}}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 47. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-x$) avec celui de $x \mapsto \cosh(x)$, ce qui est licite puisque $-5\arctan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 5

$$\begin{aligned}\cosh(5\arctan(x)) &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(-x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\ &= 1 + \frac{25}{2}x^2 + \frac{425}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\cosh(5\arctan(x)) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{25}{2}x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\cosh(5\arctan(x))-1} - \frac{2}{25x^2} = \frac{25x^2 - 2\left(\frac{25}{2}x^2 + \frac{425}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)}{25x^2(\cosh(5\arctan(x))-1)} = \frac{-\frac{425}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{25x^2(\cosh(5\arctan(x))-1)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{425}{24}x^4}{\frac{625}{2}x^4} = -\frac{17}{150}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cosh(5\arctan(x))-1} - \frac{2}{25x^2}\right) = -\frac{17}{150}$.

Corrigé 48. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 5

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(4\,n\ln\left(\frac{4\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

et :

$$\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\frac{4\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1 = 1 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}4\,n\ln\left(\frac{4\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) &= 4\,n\left[\left(\frac{5}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= -\frac{34}{n} + 20 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 20.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\,n\ln\left(\frac{4\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) = 20$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{20}$ par continuité en 20 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^{20} = e^{20}\left(\exp\left(-\frac{34}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{34\,e^{20}}{n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 49. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-3\,x$) avec celui de $x \mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $\frac{1}{2}\sin(3\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 5

$$\begin{aligned}e^{\left(\frac{1}{2}\,\sin(3\,x)\right)} &= 1 + \left(-3\,x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-3\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\ &= 1 + \frac{3}{2}\,x + \frac{9}{8}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{\left(\frac{1}{2}\,\sin(3\,x)\right)} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{3}{2}\,x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$-\frac{2}{3\,x} + \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{2}\,\sin(3\,x)\right)} - 1} = \frac{3\,x - 2\left(\frac{3}{2}\,x + \frac{9}{8}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)}{3\,x\left(e^{\left(\frac{1}{2}\,\sin(3\,x)\right)} - 1\right)} = \frac{-\frac{9}{4}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{3\,x\left(e^{\left(\frac{1}{2}\,\sin(3\,x)\right)} - 1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{9}{8}\,x^2}{\frac{9}{2}\,x^2} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{2}{3\,x} + \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{2}\,\sin(3\,x)\right)} - 1}\right) = -\frac{1}{2}$.

Corrigé 50. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 5

$$\begin{aligned}\sqrt{n^6-24\,n^3-1}-\sqrt{n^6+7\,n^4-n^2-1} &= \sqrt{n^6\cdot\left(\frac{n^6-24\,n^3-1}{n^6}\right)}-\sqrt{n^6\cdot\left(\frac{n^6+7\,n^4-n^2-1}{n^6}\right)}\\ &= n^3\times\sqrt{1-\frac{24}{n^3}-\frac{1}{n^6}}-n^3\times\sqrt{1+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}}\\ &= n^3\left[\left(1+\frac12\left(-\frac{24}{n^3}-\frac{1}{n^6}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right.\\ &\left.-\left(1+\frac12\left(\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\ &= n^3\left[-\frac{7}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=-\frac72\,n+\underset{n\to+\infty}{o}(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac72\,n.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^6-24\,n^3-1}-\sqrt{n^6+7\,n^4-n^2-1}\right)=-\infty$. Notons qu'il aurait également été possible de trouver cet équivalent avec la méthode de la multiplication par le conjugué.

Corrigé 51. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 5

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n=\exp\left(\sqrt{n}\ln\left(\frac{\cos\left(\frac1n\right)}{n}+\ln\left(\frac1n+1\right)+1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\cos(x)=1+\underset{x\to0}{o}(x),$$

et :

$$\ln(x+1)=x-\frac12\,x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac1n$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac1n\to0$), et on obtient :

$$\frac{\cos\left(\frac1n\right)}{n}+\ln\left(\frac1n+1\right)+1=1+\frac2n-\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\ln\left(\frac{\cos\left(\frac1n\right)}{n}+\ln\left(\frac1n+1\right)+1\right) &= \sqrt{n}\left[\left(\frac2n-\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac12\left(\frac2n+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac1n\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= \frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{5}{2\,n^{\frac32}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac32}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\left(\frac{\cos\left(\frac1n\right)}{n}+\ln\left(\frac1n+1\right)+1\right)=0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n-1=\exp\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{5}{2\,n^{\frac32}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac32}}\right)\right)-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\sqrt{n}}$$

(on utilise la formule : $e^u-1\underset{u\to0}{\sim}u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 52. Au voisinage de 0, on a : $\tan(x)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\cos(x)=1-\frac12\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{\tan(9\,x)-\tan(7\,x)}{\cos(9\,x)-1}=\frac{\left(9\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(7\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{-\frac{81}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}=\frac{2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}{-\frac{81}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{2\,x}{-\frac{81}{2}\,x^2}=-\frac{4}{81\,x}.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(9\,x)-\tan(7\,x)}{\cos(9\,x)-1} = -\infty.$

Corrigé 53. Au voisinage de 0, on a : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{\arctan(9\,x)-\arctan(7\,x)}{\cosh(8\,x)-1} = \frac{\left(9\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(7\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{32\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{32\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,x}{32\,x^2} = \frac{1}{16\,x}.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(9\,x)-\arctan(7\,x)}{\cosh(8\,x)-1} = +\infty.$

Corrigé 54. Au voisinage de 0, on a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{\sinh(2\,x)-\sinh(4\,x)}{\cosh(6\,x)-1} = \frac{\left(2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(4\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{18\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{-2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{18\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2\,x}{18\,x^2} = -\frac{1}{9\,x}.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(2\,x)-\sinh(4\,x)}{\cosh(6\,x)-1} = -\infty.$

Corrigé 55. Au voisinage de 0, on a : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 5

$$\frac{\arctan(5\,x)-\arctan(2\,x)}{\cos(x)-1} = \frac{\left(5\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{3\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3\,x}{-\frac{1}{2}\,x^2} = -\frac{6}{x}.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(5\,x)-\arctan(2\,x)}{\cos(x)-1} = -\infty.$

Corrigé 56. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-\frac{3}{5}\,x$) avec celui de $x \mapsto e^x$, ce qui est licite puisque $-\frac{4}{5}\cos\left(\frac{3}{5}\,x\right)+\frac{4}{5} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 5

$$\begin{aligned} e^{\left(-\frac{4}{5}\cos\left(\frac{3}{5}\,x\right)+\frac{4}{5}\right)} &= 1 + \left(-\frac{9}{50}\,x^2 + \frac{27}{5000}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{50}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= 1 + \frac{18}{125}\,x^2 + \frac{189}{31250}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4). \end{aligned}$$

On en tire d'une part : $e^{\left(-\frac{4}{5}\cos\left(\frac{3}{5}\,x\right)+\frac{4}{5}\right)} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{18}{125}\,x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{e^{\left(-\frac{4}{5}\cos\left(\frac{3}{5}\,x\right)+\frac{4}{5}\right)}-1} - \frac{125}{18\,x^2} = \frac{18\,x^2 - 125\left(\frac{18}{125}\,x^2+\frac{189}{31250}\,x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)}{18\,x^2\left(e^{\left(-\frac{4}{5}\cos\left(\frac{3}{5}\,x\right)+\frac{4}{5}\right)}-1\right)} = \frac{-\frac{189}{250}\,x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)}{18\,x^2\left(e^{\left(-\frac{4}{5}\cos\left(\frac{3}{5}\,x\right)+\frac{4}{5}\right)}-1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{189}{31250}\,x^4}{\frac{324}{125}\,x^4} = -\frac{7}{24}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^{\left(-\frac{4}{5}\cos\left(\frac{3}{5}\,x\right)+\frac{4}{5}\right)}-1} - \frac{125}{18\,x^2}\right) = -\frac{7}{24}.$

Corrigé 57. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^2-38\,n+3}-\sqrt[3]{n^2-1} &= \sqrt[3]{n^2\cdot\left(\frac{n^2-38\,n+3}{n^2}\right)}-\sqrt[3]{n^2\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)}\\
&= n^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[3]{1-\frac{38}{n}+\frac{3}{n^2}}-n^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\\
&= n^{\frac{2}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{38}{n}+\frac{3}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\
&= n^{\frac{2}{3}}\left[-\frac{38}{3\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{38}{3\,n^{\frac{1}{3}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{38}{3\,n^{\frac{1}{3}}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-38\,n+3}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)=0$.

Corrigé 58. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 6

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n=\exp\left(-\sqrt{n}\ln\left(\frac{2\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sin\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\cosh(x)=1+\underset{x\to0}{o}(x),$$

et :

$$\sin(x)=x+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to0$), et on obtient :

$$\frac{2\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sin\left(\frac{1}{n}\right)+1=1+\frac{3}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}
-\sqrt{n}\ln\left(\frac{2\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sin\left(\frac{1}{n}\right)+1\right) &= -\sqrt{n}\left[\left(\frac{3}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&= -\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{9}{2\,n^{\frac{3}{2}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{3}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}-\sqrt{n}\ln\left(\frac{2\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sin\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)=0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n-1=\exp\left(-\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{9}{2\,n^{\frac{3}{2}}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)-1\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{3}{\sqrt{n}}$$

(on utilise la formule : $e^u-1\underset{u\to0}{\sim}u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 59. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec ← page 6

un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-\frac{2}{5}\,x$) avec celui de $x \mapsto \cos(x)$, ce qui est licite puisque $-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{5}\,x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient :

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{375}\,x^3 - \frac{2}{5}\,x + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(-\frac{2}{5}\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{200}\,x^2 + \frac{13}{48000}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\cos\left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{200}\,x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\cos\left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)-1} + \frac{200}{x^2} = \frac{x^2 + 200\left(-\frac{1}{200}\,x^2 + \frac{13}{48000}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)}{x^2\left(\cos\left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)-1\right)} = \frac{\frac{13}{240}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}{x^2\left(\cos\left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)-1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{13}{48000}\,x^4}{-\frac{1}{200}\,x^4} = -\frac{65}{6}.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{5}\,x\right)\right)-1} + \frac{200}{x^2}\right) = -\frac{65}{6}$.

Corrigé 60. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\sinh(3\,x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\sin(x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x)$, et : $\ln(\sinh(3\,x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(3\,x)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\sinh(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, où l'on prend $u = 3\,x$ dans le second développement limité, impliquent : ← page 6

$$\frac{\ln(\sin(x)+1)}{\ln(\sinh(3\,x)+1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin(x)}{\sinh(3\,x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{3\,x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(4\,x))}{\ln(-\cos(3\,x)+1)} = \frac{\ln(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((4\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}\,x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2}) + 2\,\ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

et en outre : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{6}$.

Corrigé 61. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 6

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(5\,n\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) + e^{\frac{1}{n}}\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$e^{\frac{1}{n}} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned} 5\,n\ln\left(e^{\frac{1}{n}} + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= 5\,n\left[\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\frac{15}{2\,n} + 10 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 10. \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\,n\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) + e^{\frac{1}{n}}\right) = 10$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{10}$ par continuité en 10 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^{10} = e^{10}\left(\exp\left(-\frac{15}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{15\,e^{10}}{2\,n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 62. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 6

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-3\,n\ln\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned} -3\,n\ln\left(n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= -3\,n\left[\left(\frac{1}{2\,n} + \frac{1}{3\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\frac{5}{8\,n} - \frac{3}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\,n\ln\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right) = -\frac{3}{2}$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{\left(-\frac{3}{2}\right)}$ par continuité en $-\frac{3}{2}$ de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^{\left(-\frac{3}{2}\right)} = e^{\left(-\frac{3}{2}\right)}\left(\exp\left(-\frac{5}{8\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{5\,e^{\left(-\frac{3}{2}\right)}}{8\,n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 63. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 6

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-5\sqrt{n}\ln\left(-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right),$$

et :

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + 1 = 1 - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{30n^5} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 1 (ou 2 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}-5\sqrt{n}\ln\left(-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+1\right) &= -5\sqrt{n}\left[\left(-\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{30n^5}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right]\\ &= \frac{5}{3n^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{6n^{\frac{9}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{3n^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n}\ln\left(-\frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\sinh\left(\frac{1}{n}\right)+1\right) = 0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par continuité en 0 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - 1 = \exp\left(\frac{5}{3n^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{6n^{\frac{9}{2}}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{3n^{\frac{5}{2}}}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 64. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 6

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^3+97n^2} - \sqrt{n^2+n+8} &= \sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3+97n^2}{n^3}\right)} - \sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2+n+8}{n^2}\right)}\\ &= n\times\sqrt[3]{1+\frac{97}{n}} - n\times\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}}\\ &= n\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{97}{n}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.\\ &\quad\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= n\left[\frac{191}{6n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{191}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{191}{6}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+97n^2} - \sqrt{n^2+n+8}\right) = \frac{191}{6}$.

Corrigé 65. Au voisinage de 0, on a : $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 6

$$\frac{\sin(5x)-\sin(9x)}{e^{(6x)}-1} = \frac{\left(5x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(9x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{6x+\underset{x\to 0}{o}(x)} = \frac{-4x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{6x+\underset{x\to 0}{o}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-4x}{6x} = -\frac{2}{3}.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(5\,x)-\sin(9\,x)}{e^{(6\,x)}-1} = -\frac{2}{3}$.

Corrigé 66. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 6

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-n\ln\left(-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

et :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \cosh\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}
-n\ln\left(-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= -n\left[\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n} + 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.
\end{aligned}$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -n\ln\left(-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}+\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1$, puis : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e$ par continuité en 1 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e = e\left(\exp\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 67. Commençons par la deuxième fraction. On a $\cos(2\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(2\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\cos(2\,x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(2\,x)-1$, et : $\ln(\cosh(2\,x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(2\,x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\cos(u)-1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}u^2$ et $\cosh(u)-1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u = 2\,x$, impliquent : ← page 7

$$\frac{\ln(\cos(2\,x))}{\ln(\cosh(2\,x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\cos(2\,x)-1}{\cosh(2\,x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2\,x^2}{2\,x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -1.$$

Passons à la première fraction. On a : $\ln(x+1) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\ln(2\,x+1))}{\ln(\arctan(4\,x))} = \frac{\ln(2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(4\,x+\underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((2\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((4\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(2)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(4)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times (-1) = -1,$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$.

Corrigé 68. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 7

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^6 - 7\,n^4 + 50\,n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 2\,n^3 + 1} &= \sqrt[3]{n^6 \cdot \left(\frac{n^6 - 7\,n^4 + 50\,n^2}{n^6}\right)} - \sqrt[3]{n^6 \cdot \left(\frac{n^6 + 2\,n^3 + 1}{n^6}\right)} \\
&= n^2 \times \sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^2} + \frac{50}{n^4}} - n^2 \times \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^6}} \\
&= n^2 \Bigg[\left(1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{7}{n^2} + \frac{50}{n^4}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\quad - \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^6}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \Bigg] \\
&= n^2 \left[-\frac{7}{3\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = -\frac{7}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^6 - 7\,n^4 + 50\,n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 2\,n^3 + 1}\right) = -\dfrac{7}{3}$.

Corrigé 69. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-x$) avec celui de $x \mapsto \cos(x)$, ce qui est licite puisque $-\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 7

$$\begin{aligned}
\cos(-\sin(x)) &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\,x^3 - x + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(-x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{24}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).
\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\cos(-\sin(x)) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{2}\,x^2$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$\frac{1}{\cos(-\sin(x)) - 1} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{24}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)}{x^2(\cos(-\sin(x)) - 1)} = \frac{\frac{5}{12}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}{x^2(\cos(-\sin(x)) - 1)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{5}{24}\,x^4}{-\frac{1}{2}\,x^4} = -\frac{5}{6}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\cos(-\sin(x)) - 1} + \dfrac{2}{x^2}\right) = -\dfrac{5}{6}$.

Corrigé 70. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(x+1) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\ln(x+1) + 1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x+1)$, et : $\ln(\cosh(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\,u^2$, impliquent : ← page 7

$$\frac{\ln(\ln(x+1) + 1)}{\ln(\cosh(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x+1)}{\cosh(x) - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{1}{2}\,x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(4\,x))}{\ln(\arctan(4\,x))} = \frac{\ln(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((4\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((4\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \frac{2}{x} = \frac{2}{x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 71. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x) = x + \frac{1}{6} x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $\frac{2}{5} x$) avec celui de $x \mapsto \tan(x)$, ce qui est licite puisque $2 \sinh\left(\frac{2}{5} x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 7

$$\begin{aligned}\tan\left(2 \sinh\left(\frac{2}{5} x\right)\right) &= +\left(\frac{2}{5} x + \frac{4}{375} x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\\ &= \frac{4}{5} x + \frac{24}{125} x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\tan\left(2 \sinh\left(\frac{2}{5} x\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{4}{5} x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$-\frac{5}{4x} + \frac{1}{\tan\left(2\sinh\left(\frac{2}{5}x\right)\right)} = \frac{4x - 5\left(\frac{4}{5}x + \frac{24}{125}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)}{4x\tan\left(2\sinh\left(\frac{2}{5}x\right)\right)} = \frac{-\frac{24}{25}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{4x\tan\left(2\sinh\left(\frac{2}{5}x\right)\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{24}{125}x^3}{\frac{16}{5}x^2} = -\frac{3}{10}x.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{5}{4x} + \frac{1}{\tan\left(2\sinh\left(\frac{2}{5}x\right)\right)}\right) = 0$.

Corrigé 72. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(2x) + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$, on a : $\ln(\sin(2x) + 1) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(2x)$, et : $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u = 2x$ dans le premier développement limité, impliquent : ← page 7

$$\frac{\ln(\sin(2x) + 1)}{\ln(\cos(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin(2x)}{\cos(x) - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{-\frac{1}{2}x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4}{x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, et : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\cosh(3x) - 1)}{\ln(\arctan(2x))} = \frac{\ln(\frac{9}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))}{\ln(2x + \underset{x\to 0}{o}(x))} = \frac{\ln((\frac{9}{2}x^2)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((2x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(\frac{9}{2}) + 2\ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(2) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(\frac{9}{2}) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(\frac{9}{2})$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\ln(x)}{\ln(x)} \times \left(-\frac{4}{x}\right) = -\frac{8}{x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Corrigé 73. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 7

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(6n\ln\left(-\frac{2e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x),$$

et :

$$\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$-\frac{2\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1 = 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned} 6\,n\ln\left(-\frac{2\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) &= 6\,n\left[\left(-\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\frac{15}{n} - 6 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -6. \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 6\,n\ln\left(-\frac{2\,e^{\frac{1}{n}}}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) = -6$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{(-6)}$ par continuité en -6 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^{(-6)} = e^{(-6)}\left(\exp\left(-\frac{15}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{15\,e^{(-6)}}{n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 74. Au voisinage de 0, on a : $\tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 7

$$\frac{\tan(6\,x) - \tan(5\,x)}{e^{(2\,x)} - 1} = \frac{\left(6\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - \left(5\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)} = \frac{x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2\,x} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan(6\,x) - \tan(5\,x)}{e^{(2\,x)} - 1} = \frac{1}{2}$.

Corrigé 75. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(3\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\sin(x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x)$, et : $\ln(\cosh(3\,x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cosh(3\,x) - 1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend $u = 3\,x$ dans le second développement limité, impliquent : ← page 7

$$\frac{\ln(\sin(x)+1)}{\ln(\cosh(3\,x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin(x)}{\cosh(3\,x) - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{9}{2}\,x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{9\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\arctan(4\,x))}{\ln(-\cos(4\,x)+1)} = \frac{\ln(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(8\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((4\,x)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((8\,x^2)(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(8) + 2\,\ln(x) + \ln(1 + \underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\ln(x)} \times \frac{2}{9\,x} = \frac{1}{9\,x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 76. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 7

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(n\ln\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n-\ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n\to+\infty$, on a bien $\frac{1}{n}\to 0$), et on obtient :

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1 = 1+\frac{2}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned} n\ln\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+1\right) &= n\left[\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\frac{5}{2\,n}+2+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2. \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\arctan\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)=2$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$ par continuité en 2 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^2 = e^2\left(\exp\left(-\frac{5}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{5\,e^2}{2\,n}$$

(on utilise la formule : $e^u-1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 77. Au voisinage de 0, on a : $\arctan(x) = x+\underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 7

$$\frac{\arctan(6\,x)-\arctan(2\,x)}{\cos(x)-1} = \frac{\left(6\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{4\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4\,x}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{8}{x}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(6\,x)-\arctan(2\,x)}{\cos(x)-1} = -\infty.$

Corrigé 78. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(2\,x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\cosh(3\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\sinh(2\,x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(2\,x)$, et : $\ln(\cosh(3\,x)) \underset{x\to 0}{\sim}$ ← page 7

$\cosh(3\,x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cosh(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend respectivement $u = 2\,x$ et $u = 3\,x$, impliquent :

$$\frac{\ln(\sinh(2\,x)+1)}{\ln(\cosh(3\,x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sinh(2\,x)}{\cosh(3\,x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\,x}{\frac{9}{2}\,x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{9\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\arctan(4\,x))}{\ln(\cosh(3\,x)-1)} = \frac{\ln(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((4\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}\,x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2}) + 2\,\ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)} \times \frac{4}{9\,x} = \frac{2}{9\,x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 79. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $4\,x$) avec celui de $x \mapsto \tan(x)$, ce qui est licite puisque $\frac{5}{3}\,\sin(4\,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 8

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{5}{3}\,\sin(4\,x)\right) &= +\left(4\,x - \frac{32}{3}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) + \frac{1}{3}\left(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= \frac{20}{3}\,x + \frac{6560}{81}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\tan\left(\frac{5}{3}\,\sin(4\,x)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{20}{3}\,x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !), et d'autre part :

$$-\frac{3}{20\,x} + \frac{1}{\tan\left(\frac{5}{3}\,\sin(4\,x)\right)} = \frac{20\,x - 3\left(\frac{20}{3}\,x + \frac{6560}{81}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)}{20\,x\tan\left(\frac{5}{3}\,\sin(4\,x)\right)} = \frac{-\frac{6560}{27}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{20\,x\tan\left(\frac{5}{3}\,\sin(4\,x)\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{6560}{81}\,x^3}{\frac{400}{3}\,x^2} = -\frac{82}{45}\,x.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{3}{20\,x} + \frac{1}{\tan\left(\frac{5}{3}\,\sin(4\,x)\right)}\right) = 0.$

Corrigé 80. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(3\,x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\ln(3\,x+1)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\sin(3\,x)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(3\,x)$, et : $\ln(\ln(3\,x+1)+1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(3\,x+1)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\ln(u+1) \underset{u\to 0}{\sim} u$, où l'on prend $u = 3\,x$, impliquent : ← page 8

$$\frac{\ln(\sin(3\,x)+1)}{\ln(\ln(3\,x+1)+1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin(3\,x)}{\ln(3\,x+1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3\,x}{3\,x} \underset{x\to 0}{\sim} 1.$$

Passons à la première fraction. On a : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln\left(e^{(4\,x)}-1\right)}{\ln(\cosh(4\,x)-1)} = \frac{\ln(4\,x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(8\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((4\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((8\,x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))} = \frac{\ln(4) + \ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(8) + 2\,\ln(x) + \ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)}\times 1=\frac{1}{2},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{2}$.

Corrigé 81. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(2\,x+1)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ et $\sinh(3\,x)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to 1}{\sim}u-1$, on a : $\ln(\ln(2\,x+1)+1)\underset{x\to 0}{\sim}\ln(2\,x+1)$, et : $\ln(\sinh(3\,x)+1)\underset{x\to 0}{\sim}\sinh(3\,x)$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1)\underset{u\to 0}{\sim}u$ et $\sinh(u)\underset{u\to 0}{\sim}u$, où l'on prend respectivement $u=2\,x$ et $u=3\,x$, impliquent : ← page 8

$$\frac{\ln(\ln(2\,x+1)+1)}{\ln(\sinh(3\,x)+1)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln(2\,x+1)}{\sinh(3\,x)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\,x}{3\,x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2}{3}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\arctan(x)=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\arctan(2\,x))}{\ln(-\cos(3\,x)+1)}=\frac{\ln(2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))}=\frac{\ln((2\,x)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}\,x^2)(1+\underset{x\to 0}{o}(1)))}=\frac{\ln(2)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2})+2\,\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2)+\ln(1+\underset{x\to 0}{o}(1))\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{3}$.

Corrigé 82. Au voisinage de 0, on a : $\sin(x)=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\arctan(x)=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 8

$$\frac{\sin(2\,x)-\sin(5\,x)}{\arctan(9\,x)}=\frac{\left(2\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(5\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{9\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}=\frac{-3\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{9\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-3\,x}{9\,x}=-\frac{1}{3}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(2\,x)-\sin(5\,x)}{\arctan(9\,x)}=-\dfrac{1}{3}$.

Corrigé 83. Au voisinage de 0, on a : $\sin(x)=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 8

$$\frac{\sin(8\,x)-\sin(x)}{\cosh(9\,x)-1}=\frac{\left(8\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)-\left(x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{\frac{81}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}=\frac{7\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{\frac{81}{2}\,x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{7\,x}{\frac{81}{2}\,x^2}=\frac{14}{81\,x}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(8\,x)-\sin(x)}{\cosh(9\,x)-1}=+\infty$.

Corrigé 84. Commençons par la deuxième fraction. On a $\arctan(x)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ et $\cosh(2\,x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$. Donc, en ← page 8

vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\arctan(x)+1) \underset{x\to0}{\sim} \arctan(x)$, et : $\ln(\cosh(2x)) \underset{x\to0}{\sim} \cosh(2x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\arctan(u) \underset{u\to0}{\sim} u$ et $\cosh(u)-1 \underset{u\to0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$, où l'on prend $u=2x$ dans le second développement limité, impliquent :

$$\frac{\ln(\arctan(x)+1)}{\ln(\cosh(2x))} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\arctan(x)}{\cosh(2x)-1} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{2x^2} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x) = x + \underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\sin(x) = x + \underset{x\to0}{o}(x)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(3x))}{\ln(\sin(3x))} = \frac{\ln(3x+\underset{x\to0}{o}(x))}{\ln(3x+\underset{x\to0}{o}(x))} = \frac{\ln((3x)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}{\ln((3x)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))} = \frac{\ln(3)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}{\ln(3)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1)) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} \times \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé 85. Remarquons que nous avons une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination avec un développement limité. Deux termes sont nécessaires (pourquoi ?). Tout d'abord : $\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)$. On compose ce développement limité (où l'on remplace x par $-\frac{1}{4}x$) avec celui de $x \mapsto \arctan(x)$, ce qui est licite puisque $3\sinh\left(\frac{1}{4}x\right) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, et on obtient : ← page 8

$$\begin{aligned}\arctan\left(3\sinh\left(\frac{1}{4}x\right)\right) &= +\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{384}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}x + \underset{x\to0}{o}(x)\right)^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)\\ &= \frac{3}{4}x - \frac{17}{128}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3).\end{aligned}$$

On en tire d'une part : $\arctan\left(3\sinh\left(\frac{1}{4}x\right)\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{3}{4}x$ (utile pour la suite, mais insuffisant pour conclure puisqu'on ne somme pas les équivalents !), et d'autre part :

$$-\frac{4}{3x} + \frac{1}{\arctan\left(3\sinh\left(\frac{1}{4}x\right)\right)} = \frac{3x - 4\left(\frac{3}{4}x - \frac{17}{128}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)\right)}{3x\arctan\left(3\sinh\left(\frac{1}{4}x\right)\right)} = \frac{\frac{17}{32}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)}{3x\arctan\left(3\sinh\left(\frac{1}{4}x\right)\right)} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\frac{17}{128}x^3}{\frac{9}{4}x^2} = \frac{17}{72}x.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{4}{3x} + \frac{1}{\arctan\left(3\sinh\left(\frac{1}{4}x\right)\right)}\right) = 0.$

Corrigé 86. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3+n^2-4n+3} &= \sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)} - \sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3+n^2-4n+3}{n^3}\right)}\\ &= n^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{1+\frac{1}{n^3}} - n^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^3}}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right.\\ &\quad \left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3+n^2-4\,n+3}\right)=-\infty$. Notons qu'il aurait également été possible de trouver cet équivalent avec la méthode de la multiplication par le conjugué.

Corrigé 87. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\begin{aligned}\sqrt{n^6+2\,n^4-n^2+1}-\sqrt[3]{n^9+4} &= \sqrt{n^6\cdot\left(\frac{n^6+2\,n^4-n^2+1}{n^6}\right)}-\sqrt[3]{n^9\cdot\left(\frac{n^9+4}{n^9}\right)}\\ &= n^3\times\sqrt{1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}-n^3\times\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^9}}\\ &= n^3\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right.\\ &\qquad\left.-\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{n^9}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^9}\right)\right)\right]\\ &= n^3\left[\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=n+\underset{n\to+\infty}{o}(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^6+2\,n^4-n^2+1}-\sqrt[3]{n^9+4}\right)=+\infty$.

Corrigé 88. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^6+2\,n^3}-\sqrt[3]{n^6+n^4-3\,n^2+1} &= \sqrt[3]{n^6\cdot\left(\frac{n^6+2\,n^3}{n^6}\right)}-\sqrt[3]{n^6\cdot\left(\frac{n^6+n^4-3\,n^2+1}{n^6}\right)}\\ &= n^2\times\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}-n^2\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\\ &= n^2\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right.\\ &\qquad\left.-\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^6}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\ &= n^2\left[-\frac{1}{3\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=-\frac{1}{3}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^6+2\,n^3}-\sqrt[3]{n^6+n^4-3\,n^2+1}\right)=-\frac{1}{3}$.

Corrigé 89. Au voisinage de 0, on a : $\sinh(x)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 8

$$\frac{\sinh(7\,x)-\sinh(8\,x)}{\cosh(8\,x)-1}=\frac{\left(7\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(8\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{32\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}=\frac{-x+\underset{x\to0}{o}(x)}{32\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{-x}{32\,x^2}=-\frac{1}{32\,x}.$$

Par conséquent : $\lim_{x\to0^+}\frac{\sinh(7\,x)-\sinh(8\,x)}{\cosh(8\,x)-1}=-\infty$.

Corrigé 90. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 8

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+3}-\sqrt[3]{n^3+21} &= \sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)}-\sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3+21}{n^3}\right)}\\ &= n\times\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-n\times\sqrt[3]{1+\frac{21}{n^3}}\\ &= n\Bigg[\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n^2}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\quad-\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{21}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\Bigg]\\ &= n\left[\frac{3}{2\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{3}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{3}{2\,n}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt[3]{n^3+21}\right)=0$.

Corrigé 91. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sin(x)+1\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$ et $\cos(2\,x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to1}{\sim}u-1$, on a : $\ln(\sin(x)+1)\underset{x\to0}{\sim}\sin(x)$, et : $\ln(\cos(2\,x))\underset{x\to0}{\sim}\cos(2\,x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sin(u)\underset{u\to0}{\sim}u$ et $\cos(u)-1\underset{u\to0}{\sim}-\frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend $u=2\,x$ dans le second développement limité, impliquent : ← page 9

$$\frac{\ln(\sin(x)+1)}{\ln(\cos(2\,x))}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\sin(x)}{\cos(2\,x)-1}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{-2\,x^2}\underset{x\to0}{\sim}-\frac{1}{2\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sinh(x)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sinh(4\,x))}{\ln(\cosh(2\,x)-1)}=\frac{\ln(4\,x+\underset{x\to0}{o}(x))}{\ln(2\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))}=\frac{\ln((4\,x)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}{\ln((2\,x^2)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}=\frac{\ln(4)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}{\ln(2)+2\,\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(4)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ln(4)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)}\times\left(-\frac{1}{2\,x}\right)=-\frac{1}{4\,x},$$

et en outre : $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

Corrigé 92. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 9

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3-n^2}-\sqrt{n^3+1} &= \sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3-n^2}{n^3}\right)}-\sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{1-\frac{1}{n}}-n^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\Bigg[\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\quad-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3}\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\Bigg]\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{1}{2\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}\sqrt{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2}\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3-n^2}-\sqrt{n^3+1}\right)=-\infty$. Notons qu'il aurait également été possible de trouver cet équivalent avec la méthode de la multiplication par le conjugué.

Corrigé 93. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 9

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(-2\,n^2 \ln\left(3\,\sin\left(\frac{1}{n}\right) + e^{\frac{1}{n}}\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$e^{\frac{1}{n}} + 3\,\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}
-2\,n^2 \ln\left(e^{\frac{1}{n}} + 3\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= -2\,n^2\left[\left(\frac{4}{n} + \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= -8\,n + 15 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -8\,n.
\end{aligned}$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -2\,n^2 \ln\left(3\,\sin\left(\frac{1}{n}\right) + e^{\frac{1}{n}}\right) = -\infty$, puis : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ par composition de limites.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n = \exp\left(-8\,n + 15 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{(-8\,n+15)}.$$

Corrigé 94. Au voisinage de 0, on a : $\ln(x+1) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : ← page 9

$$\frac{\ln(2\,x+1) - \ln(x+1)}{\cos(7\,x) - 1} = \frac{\left(2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{-\frac{49}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{-\frac{49}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{-\frac{49}{2}\,x^2} = -\frac{2}{49\,x}.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2\,x+1) - \ln(x+1)}{\cos(7\,x) - 1} = -\infty$.

Corrigé 95. Lorsqu'on élève un nombre dépendant de n à une puissance dépendant de n, il est recommandé de tout mettre sous forme exponentielle pour éviter les généralisations hâtives. ← page 9

Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \exp\left(3\,n \ln\left(2\,\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Faisons le développement asymptotique de l'argument de l'exponentielle (à au moins deux termes, pour récupérer l'éventuel équivalent asymptotique de $u_n - \ell$ ensuite ; c'est inutilement précis si seule la limite nous intéresse). on a :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

et :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

On compose ces développements limités avec $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$, on a bien $\frac{1}{n} \to 0$), et on obtient :

$$\cosh\left(\frac{1}{n}\right) + 2\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) = 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En composant ceci avec le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 (ou 3 : vérifiez bien ce que fait la machine, je me suis emmêlé les pinceaux dans la programmation) :

$$\begin{aligned}3\,n\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) + 2\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right) &= 3\,n\left[\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= -\frac{15}{2\,n} + 6 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 6.\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\,n\ln\left(2\,\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + \cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 6$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^6$ par continuité en 6 de l'exponentielle.

De plus, reprenant les calculs ci-dessus :

$$u_n - e^6 = e^6\left(\exp\left(-\frac{15}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{15\,e^6}{2\,n}$$

(on utilise la formule : $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$, en ne retenant que le terme prépondérant).

Corrigé 96. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 9

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3+6} - \sqrt{n^3-n^2+2\,n} &= \sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3+6}{n^3}\right)} - \sqrt{n^3\cdot\left(\frac{n^3-n^2+2\,n}{n^3}\right)}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{1+\frac{6}{n^3}} - n^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{6}{n^3}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right.\\ &\quad\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\sqrt{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+6} - \sqrt{n^3-n^2+2\,n}\right) = +\infty$. Notons qu'il aurait également été possible de trouver cet équivalent avec la méthode de la multiplication par le conjugué.

Corrigé 97. Commençons par la deuxième fraction. On a $\sinh(x)+1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ et $\cos(3\,x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u) \underset{u\to1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(\sinh(x)+1) \underset{x\to0}{\sim} \sinh(x)$, et : $\ln(\cos(3\,x)) \underset{x\to0}{\sim} \cos(3\,x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\sinh(u) \underset{u\to0}{\sim} u$ et $\cos(u)-1 \underset{u\to0}{\sim} -\frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend $u = 3\,x$ dans le second développement limité, impliquent : ← page 9

$$\frac{\ln(\sinh(x)+1)}{\ln(\cos(3\,x))} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\sinh(x)}{\cos(3\,x)-1} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{-\frac{9}{2}\,x^2} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{2}{9\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\sin(x) = x + \underset{x\to0}{o}(x)$, et : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\sin(3\,x))}{\ln(-\cos(3\,x)+1)} = \frac{\ln(3\,x + \underset{x\to0}{o}(x))}{\ln(\frac{9}{2}\,x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2))} = \frac{\ln((3\,x)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}{\ln((\frac{9}{2}\,x^2)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))} = \frac{\ln(3)+\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}{\ln(\frac{9}{2})+2\,\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(3)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ln(3)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)}\times\left(-\frac{2}{9\,x}\right)=-\frac{1}{9\,x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

Corrigé 98. Au voisinage de 0, on a : $\ln(x+1)=x+\underset{x\to0}{o}(x)$, et : $e^x=1+x+\underset{x\to0}{o}(x)$. On en déduit : ← page 9

$$\frac{\ln(4\,x+1)-\ln(2\,x+1)}{e^{(6\,x)}-1}=\frac{\left(4\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)-\left(2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)}{6\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}=\frac{2\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}{6\,x+\underset{x\to0}{o}(x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{2\,x}{6\,x}=\frac{1}{3}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(4\,x+1)-\ln(2\,x+1)}{e^{(6\,x)}-1}=\dfrac{1}{3}$.

Corrigé 99. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : ← page 9

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^3-3\,n^2+n-6}-\sqrt{n^2-2\,n-1}&=\sqrt[3]{n^3\cdot\left(\frac{n^3-3\,n^2+n-6}{n^3}\right)}-\sqrt{n^2\cdot\left(\frac{n^2-2\,n-1}{n^2}\right)}\\
&=n\times\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{6}{n^3}}-n\times\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\\
&=n\left[\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{6}{n^3}\right)+-\frac{1}{9}\left(-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{6}{n^3}+1\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+-\frac{1}{8}\left(-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+1\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\
&=n\left[\frac{5}{6\,n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{5}{6\,n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{5}{6\,n}.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-3\,n^2+n-6}-\sqrt{n^2-2\,n-1}\right)=0$.

Corrigé 100. Commençons par la deuxième fraction. On a $\ln(x+1)+1\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$ et $\cosh(2\,x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$. Donc, en vertu de l'équivalent classique $\ln(u)\underset{u\to1}{\sim}u-1$, on a : $\ln(\ln(x+1)+1)\underset{x\to0}{\sim}\ln(x+1)$, et : $\ln(\cosh(2\,x))\underset{x\to0}{\sim}\cosh(2\,x)-1$. Alors, nos équivalents de fonctions usuelles (qu'on retrouve au besoin avec un développement limité en 0 jusqu'au premier terme non nul), $\ln(u+1)\underset{u\to0}{\sim}u$ et $\cosh(u)-1\underset{u\to0}{\sim}\frac{1}{2}\,u^2$, où l'on prend $u=2\,x$ dans le second développement limité, impliquent : ← page 9

$$\frac{\ln(\ln(x+1)+1)}{\ln(\cosh(2\,x))}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\ln(x+1)}{\cosh(2\,x)-1}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{2\,x^2}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{2\,x}.$$

Passons à la première fraction. On a : $\cosh(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$, et : $\cos(x)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$. Par conséquent :

$$\frac{\ln(\cosh(2\,x)-1)}{\ln(-\cos(4\,x)+1)}=\frac{\ln(2\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))}{\ln(8\,x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))}=\frac{\ln((2\,x^2)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}{\ln((8\,x^2)(1+\underset{x\to0}{o}(1)))}=\frac{\ln(2)+2\,\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}{\ln(8)+2\,\ln(x)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))}\underset{x\to0}{\sim}\frac{2\,\ln(x)}{2\,\ln(x)},$$

le dernier équivalent venant du fait que $\ln(2)+\ln(1+\underset{x\to0}{o}(1))\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ln(2)$, donc a une limite finie et est négligeable devant $\ln(x)$ (qui a une limite infinie en 0) ; de même au dénominateur. On conclut :

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{2\,\ln(x)}{2\,\ln(x)}\times\frac{1}{2\,x}=\frac{1}{2\,x},$$

et en outre : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.