Suites récurrentes d'ordre 3 et polynômes d'endomorphismes

On montre comment l'interprétation d'une relation de récurrence en termes de noyau de polynômes d'endomorphismes permet d'expliciter des suites récurrentes linéaires d'ordre 3, en se ramenant à l'explicitation de suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou 2 (où la structure est bien connue).

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 22

$$f^3 - 7\,f^2 - 10\,f = -70\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{10}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 7u_{n+2} - 10u_{n+1} = -70u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 23

$$f^3 - 3\,f^2 - f = -3\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} - u_{n+1} = -3u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 23

$$f^3 - f^2 + 8\,f - 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + 8u_{n+1} - 8u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 27

$$f^3 + f^2 - 3\,f = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2} - 1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2} - 1\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} - 3u_{n+1} = -u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 28

$$f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 31

$$f^3 + f^2 + 2\,f = -2\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + 2u_{n+1} = -2u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 35

$$f^3 + 2\,f^2 - 8\,f = 16\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+2} - 8u_{n+1} = 16u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 36

$$f^3 + 5\,f^2 + 5\,f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{3} - 2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 5u_{n+2} + 5u_{n+1} + u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 37

$$f^3 + 2\,f^2 - 9\,f = 10\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+2} - 9u_{n+1} = 10u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 38

$$f^3 - 817\,f^2 - f + 817\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 817\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 817u_{n+2} - u_{n+1} + 817u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 11. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 39

$$f^3 + 17\,f^2 + 17\,f = -16\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 17u_{n+2} + 17u_{n+1} = -16u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 12. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 42

$$f^3 - 4\,f^2 - f = -4\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 4u_{n+2} - u_{n+1} = -4u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 43

$$f^3 + 6\,f^2 + 9\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{3} - 2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 6u_{n+2} + 9u_{n+1} + 2u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 45

$$f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 48

$$f^3 - 5\,f^2 - 12\,f + 36\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 5u_{n+2} - 12u_{n+1} + 36u_n = 0. \tag{†}$$

Exercice 16. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 49

$$f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} = -u_n. \tag{†}$$

Exercice 17. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 52

$$f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + 5u_{n+1} - 5u_n = 0. \tag{†}$$

Exercice 18. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 56

$$f^3 - 4\,f^2 - 8\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 4u_{n+2} - 8u_{n+1} - 3u_n = 0. \tag{†}$$

Exercice 19. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 57

$$f^3 + 6\,f^2 - 43\,f - 258\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{43}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 6u_{n+2} - 43u_{n+1} - 258u_n = 0. \tag{†}$$

Exercice 20. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 58

$$f^3 + f^2 - 6\,f = 8\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} - 6u_{n+1} = 8u_n. \tag{†}$$

Exercice 21. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 59

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0. \tag{†}$$

Exercice 22. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 62

$$f^3 - 4\,f^2 + f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 4u_{n+2} + u_{n+1} - 4u_n = 0. \tag{†}$$

Exercice 23. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 66

$$f^3 - 5\,f^2 - 9\,f + 13\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 5u_{n+2} - 9u_{n+1} + 13u_n = 0. \tag{†}$$

Exercice 24. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 67

$$f^3 + 5\,f^2 + 2\,f = 8\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 5u_{n+2} + 2u_{n+1} = 8u_n. \tag{†}$$

Exercice 25. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 68

$$f^3 - 14\,f^2 - 13\,f = 30\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 14u_{n+2} - 13u_{n+1} = 30u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 26. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 71

$$f^3 + 94\, f^2 + 186\, f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2114} - 46\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2114} - 46\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 94u_{n+2} + 186u_{n+1} + 4u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 27. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 72

$$f^3 - 3\, f^2 + f = 3\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_{n+1} = 3u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 28. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 76

$$f^3 - 15\, f^2 + 15\, f = 14\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 15u_{n+2} + 15u_{n+1} = 14u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 29. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 79

$$f^3 - 10\, f - 9\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 10u_{n+1} - 9u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 30. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 81

$$f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 31. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 84

$$f^3 - f^2 + 27\,f = 27\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + 27u_{n+1} = 27u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 32. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 87

$$f^3 + 5\,f^2 - 9\,f - 45\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 5u_{n+2} - 9u_{n+1} - 45u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 33. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 88

$$f^3 + 6\,f^2 - 8\,f = -\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 6u_{n+2} - 8u_{n+1} = -u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 34. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 89

$$f^3 + 7\,f^2 + 9\,f + 18\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 7u_{n+2} + 9u_{n+1} + 18u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 35. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 93

$$f^3 + 6\,f^2 - 14\,f = 4\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 6u_{n+2} - 14u_{n+1} = 4u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 36. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 94

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 37. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 97

$$f^3 + f^2 + 2\,f = -2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + 2u_{n+1} = -2u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 38. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 101

$$f^3 - 2\,f^2 - 21\,f + 22\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - 21u_{n+1} + 22u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 39. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 102

$$f^3 - 8\,f^2 - 19\,f = -2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(2\sqrt{6} + 5\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-2\sqrt{6} + 5\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 8u_{n+2} - 19u_{n+1} = -2u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 40. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 103

$$f^3 - f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 41. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 104

$$f^3 + f^2 - 3\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} - 3u_{n+1} - 3u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 42. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 105

$$f^3 - 7\,f^2 - f + 7\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 7u_{n+2} - u_{n+1} + 7u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 43. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 106

$$f^3 - f^2 + 30\,f = 30\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + 30u_{n+1} = 30u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 44. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 109

$$f^3 + 6\,f^2 + 7\,f + 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 6u_{n+2} + 7u_{n+1} + 10u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 45. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 113

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 46. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 116

$$f^3 + f^2 + 6\,f = -6\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + 6u_{n+1} = -6u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 47. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 120

$$f^3 + 4\,f^2 + 5\,f = -6\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 4u_{n+2} + 5u_{n+1} = -6u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 48. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 123

$$f^3 + 2\,f = -3\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+1} = -3u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 49. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 127

$$f^3 - 3\,f^2 - 4\,f = -12\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} - 4u_{n+1} = -12u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 50. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 128

$$f^3 - 2f^2 - 2f = -4\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1} = -4u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 51. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 129

$$f^3 - f^2 - 59f + 59\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{59}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} - 59u_{n+1} + 59u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 52. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 130

$$f^3 + 2f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+1} + 3u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 53. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 133

$$f^3 - 3f^2 + 27f = 81\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} + 27u_{n+1} = 81u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 54. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 137

$$f^3 + 4f^2 - 8f = 32\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 4u_{n+2} - 8u_{n+1} = 32u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 55. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 138

$$f^3 + 30\, f^2 - f - 30\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 30\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 30u_{n+2} - u_{n+1} - 30u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 56. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 139

$$f^3 + 3\, f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 3u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 57. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 140

$$f^3 + 27\, f^2 + f = -27\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 27u_{n+2} + u_{n+1} = -27u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 58. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 143

$$f^3 - 3\, f^2 - 2\, f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5} + 1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5} + 1\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} - 2u_{n+1} + 4u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 59. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 144

$$f^3 - 3\, f = 2\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\, f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} = 2u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 60. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 148

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} = u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 61. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 151

$$f^3 - 3\,f^2 - 30\,f = -90\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{30}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} - 30u_{n+1} = -90u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 62. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 152

$$f^3 - f^2 + 5\,f = 5\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + 5u_{n+1} = 5u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 63. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 156

$$f^3 + 96\,f^2 - 95\,f = -194\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 96u_{n+2} - 95u_{n+1} = -194u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 64. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 159

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 65. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 163

$$f^3 + f^2 - 14\,f - 14\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{14}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} - 14u_{n+1} - 14u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 66. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 164

$$f^3 - 7\,f^2 + 8\,f = 2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{7} + 3\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{7} + 3\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 7u_{n+2} + 8u_{n+1} = 2u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 67. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 165

$$f^3 - f^2 - 4\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 68. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 166

$$f^3 - f^2 - 7\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} - 7u_{n+1} - 2u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 69. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 167

$$f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 70. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 168

$$f^3 - 3\,f^2 + f = 3\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_{n+1} = 3u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 71. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 171

$$f^3 - 5\,f^2 + f = 5\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 5u_{n+2} + u_{n+1} = 5u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 72. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 175

$$f^3 - 2\,f^2 - 2\,f = -3\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1} = -3u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 73. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 176

$$f^3 + 3\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 3u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 74. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 177

$$f^3 - f^2 - f = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} = -u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 75. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 180

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 76. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 184

$$f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 77. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 187

$$f^3 - 8\,f^2 - 53\,f + 60\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 8u_{n+2} - 53u_{n+1} + 60u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 78. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 188

$$f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + 13u_{n+1} - 13u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 79. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 191

$$f^3 - 5\,f = 4\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 5u_{n+1} = 4u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 80. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 193

$$f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 81. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 193

$$f^3 - 2\,f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 82. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 194

$$f^3 + 10\,f^2 + 8\,f = \mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{85} - \frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{85} - \frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 10u_{n+2} + 8u_{n+1} = u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 83. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 196

$$f^3 - 34\,f^2 - f = -34\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 34\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 34u_{n+2} - u_{n+1} = -34u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 84. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 196

$$f^3 - 2\,f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+1} + u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 85. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 198

$$f^3 + 8\,f^2 + 14\,f = 5\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 8u_{n+2} + 14u_{n+1} = 5u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 86. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 199

$$f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 7u_{n+2} + 11u_{n+1} + 5u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 87. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 202

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 88. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 206

$$f^3 - 2\,f^2 - 2\,f = -4\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1} = -4u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 89. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 207

$$f^3 - 2\,f^2 = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} = -u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 90. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 208

$$f^3 - f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 91. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 209

$$f^3 + 4\,f^2 - 3\,f = 12\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 4u_{n+2} - 3u_{n+1} = 12u_n. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 92. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 210

$$f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+2} + 3u_{n+1} + 6u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 93. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 213

$$f^3 + f^2 + 21\,f + 21\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + 21u_{n+1} + 21u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 94. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 217

$$f^3 - 2\,f^2 - 54\,f + 108\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - 54u_{n+1} + 108u_n = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 95. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 218

$$f^3 - 2\,f^2 - 11\,f - 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - 11u_{n+1} - 8u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 96. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 219

$$f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} = -u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 97. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 222

$$f^3 + 2\,f^2 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+2} - u_n = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 98. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 223

$$f^3 + 9\,f^2 + 5\,f = -45\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 9u_{n+2} + 5u_{n+1} = -45u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 99. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 227

$$f^3 - 2\,f^2 - 4\,f = -3\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2u_{n+2} - 4u_{n+1} = -3u_n. \qquad (\dagger)$$

Exercice 100. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 228

$$f^3 - 166\, f^2 - 497\, f = -30\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 166u_{n+2} - 497u_{n+1} = -30u_n. \tag{$\dagger$}$$

Corrigé 1. ← page 1

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 7\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{10}\right)\left(X-\sqrt{10}\right)(X-7)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-7\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{10}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{10}\mathrm{Id}_E\right) &= (f-7\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-10\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-7\,f^2-10\,f+70\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 7\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-7f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-10f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}-7u_{n+2}-10u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (-70u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-7\,f^2-10\,f=-70\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-7\,f^2-10\,f+70\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-7\,f^2-10\,f+70\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-7\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=7u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 7, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot 7^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{10}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot 7^n+10^{\frac{1}{2}n}b+c\left(-\sqrt{10}\right)^n.$$

Corrigé 2. ← page 1

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 3, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 3, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 3u_{n+2} - u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-3u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - f = -3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 3^n + (-1)^n\,c + b.$$

Corrigé 3. ← page 1

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+8 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $9 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+8\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-f^2+8\,f-8\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+8\,f-8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+8\,f-8\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+8 par $X-1$. On a en effet :
$$X^2+8=(X-1)\,Q+9,$$
avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :
$$f^2\,(\vec{x})+8\vec{x}=(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+9\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+8X-8=(X-1)\,(X^2+8)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3-f^2+8\,f-8\mathrm{Id}_E=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+8\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+8\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$
Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y}=\frac{1}{9}f^2\,(\vec{x})+\frac{8}{9}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{9}\,(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+8\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{9}f^2\,(\vec{x})+\frac{8}{9}\vec{x}\right)\\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{9}\,f^2+\frac{8}{9}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{9}\left(f^3-f^2+8\,f-8\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+8\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{9}\Big(f^2+8\mathrm{Id}_E\Big)\,((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{9}\Big(f^3-f^2+8\,f-8\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $9\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 8\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -8\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 8\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{9}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{9}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{9}f^3(\vec{x}) + \frac{8}{9}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 8f(\vec{x}) - 8\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 8f - 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.
Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 8\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{9}f^4(\vec{x}) - \frac{7}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 8\,f + 8\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 8\,f^2 + 8\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{9}f^4\left(\vec{x}\right) - \frac{7}{9}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{8}{9}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{9}f^4\left(\vec{x}\right) - \frac{7}{9}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{8}{9}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{9}X^4 - \frac{7}{9}X^2 + \frac{8}{9}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 8X - 8$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{9}X^4 - \frac{7}{9}X^2 + \frac{8}{9} = \left(X^3 - X^2 + 8X - 8\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}X - \frac{1}{9}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{9}\,f^4 - \frac{7}{9}\,f^2 + \frac{8}{9}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 8\,f - 8\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{9}\,f - \frac{1}{9}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(\left(u_{n+1}\right)_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = \left(u_{n+2}\right)_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left(\left(u_{n+2}\right)_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = \left(u_{n+3}\right)_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right) + 8f\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right) - 8\left(u_n\right)_{n\geqslant 0} &= \left(u_{n+3} - u_{n+2} + 8u_{n+1} - 8u_n\right)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + 8\,f - 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + 8\,f - 8\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + 8\,f - 8\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$\left(u_n\right)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right) - \left(u_n\right)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \left(u_n\right)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left(\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}\right) + 8\left(u_n\right)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 8u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 8 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = 2i\sqrt{2}$ et $r_2 = -2i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)\left(2\sqrt{2}\right)^n,\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 8\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)\left(2\sqrt{2}\right)^n.$$

Corrigé 4. ← page 1

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, 1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{2} + 1\right)\left(X - \sqrt{2} + 1\right)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2f - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + f^2 - 3f + \mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, 1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + u_{n+2} - 3u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 - 3f = -\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 - 3f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 - 3f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$).

Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\sqrt{2}-1\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\left(\sqrt{2}-1\right)^n + c\left(-\sqrt{2}-1\right)^n.$$

Corrigé 5. ← page 1

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et $X^2 - X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 1$ par $X+1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 1 = (X+1)\,Q + 3,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 + 1 = (X+1)\left(X^2 - X + 1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{3}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3} f^2 - \frac{1}{3} f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& -\ \vec{y} &&&+& f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} &-& \vec{z} &+& f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & 2\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) - \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{3}X + \frac{2}{3} = \left(X^3 + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}f^4 + \frac{2}{3}f^3 - \frac{1}{3}f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{3} i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{3}\pi n\right),\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-1)^n + b\cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{3}\pi n\right).$$

Corrigé 6. ← page 2

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+2\mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+1$. On a en effet :
$$X^2+2 = (X+1)\,Q+3,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x})+2\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+3\vec{x}. \tag{†}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+2X+2 = (X+1)\,(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2+2\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2+2\mathrm{Id}_E\big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$
Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{3}\,f^2+\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3}\big(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E\big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\big(f^2+2\mathrm{Id}_E\big)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\big(f^2+2\mathrm{Id}_E\big)\left((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3}\big(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E\big)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 2f = -2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 2\,f^2 - 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{3}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{3}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 2X + 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 + X^2 + 2X + 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\,f^4 - \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\,f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + u_{n+2} + 2u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-2u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + 2\,f = -2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = \left(a \cdot (-1)^n\right)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+2=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i\sqrt{2}$ et $r_2=-i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)2^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-1)^n+\left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 7. ← page 2

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{-2\sqrt{2},2\sqrt{2},-2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+2\sqrt{2}\right)\left(X-2\sqrt{2}\right)(X+2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)&=(f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-8\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3+2f^2-8f-16\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-2\sqrt{2},2\sqrt{2},-2\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-8f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)&=(u_{n+3}+2u_{n+2}-8u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\&=(16u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+2f^2-8f=16\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+2f^2-8f-16\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+2f^2-8f-16\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$).

Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-2)^n + b\left(2\sqrt{2}\right)^n + c\left(-2\sqrt{2}\right)^n.$$

Corrigé 8. ← page 2

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} - 2, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{3} + 2\right)\left(X - \sqrt{3} + 2\right)(X + 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{3} - 2\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 4\,f + \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 5\,f^2 + 5\,f + \mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} - 2, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{3} - 2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 5f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 5f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 5u_{n+2} + 5u_{n+1} + u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 5\,f^2 + 5\,f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 5\,f^2 + 5\,f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 5\,f^2 + 5\,f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable

par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n \geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n \geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right) + (u_n)_{n \geqslant 0} = (0)_{n \geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n \geqslant 0} = \left(a \cdot (-1)^n\right)_{n \geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n \geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\sqrt{3} - 2\right) \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-1)^n + b\left(\sqrt{3} - 2\right)^n + c\left(-\sqrt{3} - 2\right)^n.$$

Corrigé 9. ← page 2

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{41} + 1\right)\left(2X - \sqrt{41} + 1\right)(X + 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f - 10\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 2f^2 - 9f - 10\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n \geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n \geqslant 0} = (u_{n+2})_{n \geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n \geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n \geqslant 0} = (u_{n+3})_{n \geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n \geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right) + 2f^2\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right) - 9f\left((u_n)_{n \geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 2u_{n+2} - 9u_{n+1})_{n \geqslant 0} \\ &= (10u_n)_{n \geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+2\,f^2-9\,f=10\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+2\,f^2-9\,f-10\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+2\,f^2-9\,f-10\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-1)^n+b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\Big)^n+c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{41}-\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 10. ← page 2

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\{1,-1,817\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-817)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-817\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f+\mathrm{Id}_E)&=(f-817\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-817\,f^2-f+817\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1,-1,817\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-817\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-817f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+817\,(u_n)_{n\geqslant 0}&=(u_{n+3}-817u_{n+2}-u_{n+1}+817u_n)_{n\geqslant 0}\\&=(0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 817\, f^2 - f + 817\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 817\, f^2 - f + 817\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 817\, f^2 - f + 817\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 817\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 817\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 817\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 817\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 817 u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 817\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 817, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 817^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 817\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 817\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 817^n + (-1)^n c + b.$$

Corrigé 11. ← page 3

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 16$ et $X^2 + X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 16$ admet -16 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -16 donne : $241 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 16\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + 17\, f^2 + 17\, f + 16\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 17\, f^2 + 17\, f + 16\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 17\, f^2 + 17\, f + 16\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X + 16$. On a en effet :

$$X^2 + X + 1 = (X + 16)\, Q + 241,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x} = (f + 16\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 241\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 17X^2 + 17X + 16 = (X + 16)\,(X^2 + X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 17\, f^2 + 17\, f + 16\mathrm{Id}_E = (f + 16\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + 16\mathrm{Id}_E). \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{241} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241} f(\vec{x}) + \frac{1}{241}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{241}(f + 16\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 16\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 16\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{241} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241} f(\vec{x}) + \frac{1}{241}\vec{x}\right) \\
&= (f + 16\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{241} f^2 + \frac{1}{241} f + \frac{1}{241}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{241}\left(f^3 + 17 f^2 + 17 f + 16\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{241}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)((f + 16\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{241}\left(f^3 + 17 f^2 + 17 f + 16\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 16\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $241\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+16\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f+16\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f+16\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -16\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& -16\vec{y} &&&+& f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& 256\vec{y} &-& \vec{z} &-& f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & 16\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & & 240\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array} \right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 240L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{1}{241}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{241}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{1}{241}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{241}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 16\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 16\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 16\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241}f(\vec{x}) + \frac{1}{241}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{241}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{241}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{16}{241}f^2(\vec{x}) - \frac{16}{241}f(\vec{x}) - \frac{16}{241}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{241}\left(f^3(\vec{x}) + 17f^2(\vec{x}) + 17f(\vec{x}) + 16\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 17\,f^2 + 17\,f = -16\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{241}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{241}f^3(\vec{x}) + \frac{238}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{239}{241}f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -17\,f^2 - 17\,f - 16\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -17\,f^3 - 17\,f^2 - 16\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{241}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{241}f^3(\vec{x}) + \frac{238}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{239}{241}f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{241}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{241}f^3(\vec{x}) + \frac{238}{241}f^2(\vec{x}) + \frac{239}{241}f(\vec{x}) + \frac{240}{241}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{241}X^4 - \frac{2}{241}X^3 + \frac{238}{241}X^2 + \frac{239}{241}X + \frac{240}{241}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 17X^2 + 17X + 16$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{241}X^4 - \frac{2}{241}X^3 + \frac{238}{241}X^2 + \frac{239}{241}X + \frac{240}{241} = \left(X^3 + 17X^2 + 17X + 16\right) \cdot \left(-\frac{1}{241}X + \frac{15}{241}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{241}\,f^4 - \frac{2}{241}\,f^3 + \frac{238}{241}\,f^2 + \frac{239}{241}\,f + \frac{240}{241}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 17\,f^2 + 17\,f + 16\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{241}\,f + \frac{15}{241}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 17f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 17f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 17u_{n+2} + 17u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-16u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 17\,f^2 + 17\,f = -16\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 17\,f^2 + 17\,f + 16\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 17\,f^2 + 17\,f + 16\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+16\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 16\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -16u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -16, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-16)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{2}{3}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right),\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 16\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 16\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-16)^n + b\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right).$$

Corrigé 12. ← page 3

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 4, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-4)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 4\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f - 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 4\, f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 4, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 4f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 4u_{n+2} - u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-4u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 4\, f^2 - f = -4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 4\, f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 4\, f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 4\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 4, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 4^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 4^n + (-1)^n\, c + b.$$

Corrigé 13.

← page 3

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-2, -2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{3}+2\right)\left(X-\sqrt{3}+2\right)(X+2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f-\left(\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f-\left(-\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2+4\,f+\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3+6\,f^2+9\,f+2\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-2, -2\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+6f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+9f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}+6u_{n+2}+9u_{n+1}+2u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+6\,f^2+9\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+6\,f^2+9\,f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+6\,f^2+9\,f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :
$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n.$$
Autrement dit : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\sqrt{3}-2\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-2)^n+b\left(\sqrt{3}-2\right)^n+c\left(-\sqrt{3}-2\right)^n.$$

Corrigé 14. ← page 3

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+2\,f^2+3\,f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+2\,f^2+3\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+2\,f^2+3\,f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+X+2 par $X+1$. On a en effet :
$$X^2+X+2 = (X+1)\,Q+2,$$
   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+2\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+2\vec{x}. \tag{†}$$
   Remarquons également que l'on a : $X^3+2X^2+3X+2 = (X+1)\,(X^2+X+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3+2\,f^2+3\,f+2\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$
   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}f(\vec{x})+\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}f(\vec{x})+\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{2}\,f^2+\frac{1}{2}\,f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3+2\,f^2+3\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
   donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big)\big((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\big)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3+2\,f^2+3\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x})+f(\vec{x}) & = & & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + 2f^2(\vec{x}) + 3f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) - f^3(\vec{x}) - \frac{3}{2}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = -2\,f^2 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\,f^3 - 3\,f^2 - 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) - f^3(\vec{x}) - \frac{3}{2}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 2u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\, 2^{\frac{1}{2}n},\ \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n + (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\, 2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 15. ← page 3

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{2, -3, 6\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+3)(X-2)(X-6)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 6\mathrm{Id}_E)\circ(f - 2\mathrm{Id}_E)\circ(f + 3\mathrm{Id}_E) &= (f - 6\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 + f - 6\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - 5\,f^2 - 12\,f + 36\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{2, -3, 6\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 5f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 12f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 36\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 5u_{n+2} - 12u_{n+1} + 36u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 5\,f^2 - 12\,f + 36\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 5\,f^2 - 12\,f + 36\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 5\,f^2 - 12\,f + 36\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 6\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 6u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 6, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot 6^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E = \ker(f-6\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = a\cdot 6^n + 2^n b + (-3)^n c.$$

Corrigé 16. ← page 4

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X+1)\,Q+2,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+X+1=(X+1)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcrcrcr}
\vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\
f(\vec{x}) &=& -\vec{y} &&&+& f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} &-& \vec{z} &&
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x})+\frac{1}{2}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x})-\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x})+f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f^2+f=-\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f^2-f-\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^3-f^2-f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur X^3+X^2+X+1, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{2}=\left(X^3+X^2+X+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f^4+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}+u_{n+2}+u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (-u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2+f=-\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E)$), or

$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-1)^n + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 17. ← page 4

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 5$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $6 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + 5f - 5\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 5f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 5f - 5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que

$\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 5$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 5 = (X - 1)\,Q + 6,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 5\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 6\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 5X - 5 = (X - 1)\,(X^2 + 5)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{6}f^2\,(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{6}\,(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{6}f^2\,(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{6}\,f^2 + \frac{5}{6}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{6}\left(f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{6}\left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{6}\left(f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $6\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, et

l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 5\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -5\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} &=& \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& \vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} & - & 5\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} f^3(\vec{x}) + \frac{5}{6} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 5f(\vec{x}) - 5\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{6} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 5\,f + 5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 5\,f^2 + 5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{6} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{6} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{6}X^4 - \frac{2}{3}X^2 + \frac{5}{6}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 5X - 5$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{6}X^4 - \frac{2}{3}X^2 + \frac{5}{6} = \left(X^3 - X^2 + 5X - 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{6}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{6}f^4-\frac{2}{3}f^2+\frac{5}{6}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-f^2+5f-5\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{6}f-\frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+5f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-5\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}-u_{n+2}+5u_{n+1}-5u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2+5f-5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-f^2+5f-5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2+5f-5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+5\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\ &\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+5u_n=0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+5=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i\sqrt{5}$ et $r_2=-i\sqrt{5}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)5^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)5^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 18. ← page 4

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X+\sqrt{37}-5\right)\left(2X-\sqrt{37}-5\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-5f-3\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-4f^2-8f-3\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 4f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 8f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}-4u_{n+2}-8u_{n+1}-3u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-4f^2-8f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-4f^2-8f-3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-4f^2-8f-3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-1)^n + b\left(\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)^n + c\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{5}{2}\right)^n.$$

Corrigé 19. ← page 4

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{43}, -6, -\sqrt{43}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{43}\right)\left(X - \sqrt{43}\right)(X+6)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 6\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{43}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{43}\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 6\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 43\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 6\,f^2 - 43\,f - 258\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{43}, -6, -\sqrt{43}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{43}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 43f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 258\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 6u_{n+2} - 43u_{n+1} - 258u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 6\,f^2 - 43\,f - 258\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 6\,f^2 - 43\,f - 258\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 6\,f^2 - 43\,f - 258\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{43}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$.

Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = -6u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+6\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -6, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-6)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f+6\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{43}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+6\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{43}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-6)^n + 43^{\frac{1}{2}n} b + c\left(-\sqrt{43}\right)^n.$$

Corrigé 20. ← page 4

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{17}-1\right)\left(2\,X-\sqrt{17}-1\right)(X+2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f-4\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+f^2-6\,f-8\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-6f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}+u_{n+2}-6u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (8u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2-6\,f = 8\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+f^2-6\,f-8\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2-6\,f-8\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et

on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-2)^n + b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\Big)^n + c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 21. ← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\circ(f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & &
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 22. ← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 4$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 4$ admet 4 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 4 donne : $17 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - 4f^2 + f - 4\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-4\,f^2+f-4\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-4\,f^2+f-4\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-4$. On a en effet :

$$X^2+1=(X-4)\,Q+17,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+\vec{x}=(f-4\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+17\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-4X^2+X-4=(X-4)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-4\,f^2+f-4\mathrm{Id}_E=(f-4\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-4\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{17}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{17}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{17}\,(f-4\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-4\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y})&=(f-4\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{17}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{17}\vec{x}\right)\\&=(f-4\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{17}\,f^2+\frac{1}{17}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(‡)}{=}\frac{1}{17}\left(f^3-4\,f^2+f-4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})&=\frac{1}{17}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)((f-4\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(‡)}{=}\frac{1}{17}\left(f^3-4\,f^2+f-4\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-4\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $17\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.

Ayant démontré : $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 4\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) + f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 16\vec{y} - \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 16L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{17}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{16}{17}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{17}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{16}{17}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 4\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 4\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 4\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{17}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{17} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{17} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{4}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{17}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{17}\left(f^3(\vec{x}) - 4f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 4\,f^2 + f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{17} f^4(\vec{x}) + \frac{15}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{16}{17}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 4\,f^2 - f + 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 4\,f^3 - f^2 + 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{17} f^4(\vec{x}) + \frac{15}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{16}{17}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{17} f^4(\vec{x}) + \frac{15}{17} f^2(\vec{x}) + \frac{16}{17}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{17}X^4 + \frac{15}{17}X^2 + \frac{16}{17}$ par le polynôme annulateur

$X^3 - 4X^2 + X - 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{17}X^4 + \frac{15}{17}X^2 + \frac{16}{17} = \left(X^3 - 4X^2 + X - 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{17}X - \frac{4}{17}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{17} f^4 + \frac{15}{17} f^2 + \frac{16}{17}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 4\, f^2 + f - 4\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{17} f - \frac{4}{17}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 4f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 4\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 4u_{n+2} + u_{n+1} - 4u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 4\, f^2 + f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 4\, f^2 + f - 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 4\, f^2 + f - 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 4\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 4, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 4^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2} i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 4^n + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 23. ← page 5

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, -\sqrt{17}+2, \sqrt{17}+2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{17}-2\right)\left(X-\sqrt{17}-2\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 4\,f - 13\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - 5\,f^2 - 9\,f + 13\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, -\sqrt{17}+2, \sqrt{17}+2\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E\right)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 5f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 9f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 13\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 5u_{n+2} - 9u_{n+1} + 13u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 5\,f^2 - 9\,f + 13\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 5\,f^2 - 9\,f + 13\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 5\,f^2 - 9\,f + 13\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E\right)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker\left(f - \left(\sqrt{17}+2\right)\mathrm{Id}_E\right)$ et dans

$\ker(f - \big(-\sqrt{17}+2\big)\,\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\big(\sqrt{17}+2\big)\,\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \big(-\sqrt{17}+2\big)\,\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \big(\sqrt{17}+2\big)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \big(-\sqrt{17}+2\big)\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \big(\sqrt{17}+2\big)\,\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \big(-\sqrt{17}+2\big)\,\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\big(\sqrt{17}+2\big)^n + c\big(-\sqrt{17}+2\big)^n.$$

Corrigé 24. ← page 5

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, -4, -2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+4)(X+2)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 4\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) &= (f + 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 5\,f^2 + 2\,f - 8\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, -4, -2\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 5f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 5u_{n+2} + 2u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (8u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 5\,f^2 + 2\,f = 8\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 5\,f^2 + 2\,f - 8\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 5\,f^2 + 2\,f - 8\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+4\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 4\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -4u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -4, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-4)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f+4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-4)^n + (-2)^n\,c + b.$$

Corrigé 25. ← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-15$ et X^2+X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-15$ admet 15 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 15 donne : $242 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-15\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f-15\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3-14\,f^2-13\,f-30\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-14\,f^2-13\,f-30\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-14\,f^2-13\,f-30\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-15\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-15\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+X+2 par $X-15$. On a en effet :

$$X^2+X+2 = (X-15)\,Q + 242,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f-15\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 242\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-14X^2-13X-30 = (X-15)(X^2+X+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-15\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-14\,f^2-13\,f-30\mathrm{Id}_E = (f-15\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-15\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-15\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{242}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{242}f(\vec{x}) + \frac{1}{121}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{242}(f-15\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 15\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 15\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{242}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{242}f(\vec{x}) + \frac{1}{121}\vec{x}\right)\\ &= (f - 15\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{242}f^2 + \frac{1}{242}f + \frac{1}{121}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{242}\left(f^3 - 14f^2 - 13f - 30\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{242}\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)((f - 15\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{242}\left(f^3 - 14f^2 - 13f - 30\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 15\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $242\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 15\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& 15\vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& 225\vec{y} &-& 2\vec{z} &-& f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& 15\vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) &=& 240\vec{y} &-& 2\vec{z} && \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3+2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3-240L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{242}f^2(\vec{x})+\frac{1}{242}f(\vec{x})+\frac{1}{121}\vec{x},\qquad \text{et :}\quad \vec{z}=-\frac{1}{242}f^2(\vec{x})-\frac{1}{242}f(\vec{x})+\frac{120}{121}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{242}f^2(\vec{x})+\frac{1}{242}f(\vec{x})+\frac{1}{121}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{242}f^2(\vec{x})-\frac{1}{242}f(\vec{x})+\frac{120}{121}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f-15\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-15\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-15\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-15\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f-15\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{242}f^2(\vec{x})+\frac{1}{242}f(\vec{x})+\frac{1}{121}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{242}f^3(\vec{x})+\frac{1}{242}f^2(\vec{x})+\frac{1}{121}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{15}{242}f^2(\vec{x})+\frac{15}{242}f(\vec{x})+\frac{15}{121}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{242}\left(f^3(\vec{x})-14f^2(\vec{x})-13f(\vec{x})-30\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-14\,f^2-13\,f=30\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f-15\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{242}f^4(\vec{x})-\frac{1}{121}f^3(\vec{x})+\frac{237}{242}f^2(\vec{x})+\frac{119}{121}f(\vec{x})+\frac{240}{121}\vec{x},$$

et comme : $f^3=14\,f^2+13\,f+30\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=14\,f^3+13\,f^2+30\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{242}f^4(\vec{x})-\frac{1}{121}f^3(\vec{x})+\frac{237}{242}f^2(\vec{x})+\frac{119}{121}f(\vec{x})+\frac{240}{121}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f-15\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-15\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{242}f^4(\vec{x})-\frac{1}{121}f^3(\vec{x})+\frac{237}{242}f^2(\vec{x})+\frac{119}{121}f(\vec{x})+\frac{240}{121}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{242}X^4-\frac{1}{121}X^3+\frac{237}{242}X^2+\frac{119}{121}X+\frac{240}{121}$ par le polynôme annulateur $X^3-14X^2-13X-30$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{242}X^4-\frac{1}{121}X^3+\frac{237}{242}X^2+\frac{119}{121}X+\frac{240}{121}=\left(X^3-14X^2-13X-30\right)\cdot\left(-\frac{1}{242}X-\frac{8}{121}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{242}\,f^4-\frac{1}{121}\,f^3+\frac{237}{242}\,f^2+\frac{119}{121}\,f+\frac{240}{121}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3-14\,f^2-13\,f-30\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{242}\,f-\frac{8}{121}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 14f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 13f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 14u_{n+2} - 13u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (30u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 14\,f^2 - 13\,f = 30\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 14\,f^2 - 13\,f - 30\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 14\,f^2 - 13\,f - 30\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 15\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 15u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 15, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 15^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\,2^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 15\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 15\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 15^n + (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\,2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 26. ← page 6

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2114} - 46, -\sqrt{2114} - 46, -2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme

$\left(X+\sqrt{2114}+46\right)\left(X-\sqrt{2114}+46\right)(X+2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+92\,f+2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+94\,f^2+186\,f+4\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2114}-46,-\sqrt{2114}-46,-2\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+94f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+186f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+4\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}+94u_{n+2}+186u_{n+1}+4u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+94\,f^2+186\,f+4\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+94\,f^2+186\,f+4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+94\,f^2+186\,f+4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$.
Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\sqrt{2114}-46\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-2)^n+b\left(\sqrt{2114}-46\right)^n+c\left(-\sqrt{2114}-46\right)^n.$$

Corrigé 27. ← page 6

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $10 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-3$. On a en effet :
$$X^2+1=(X-3)\,Q+10,$$
avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :
$$f^2\,(\vec{x})+\vec{x}=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+10\vec{x}. \tag{†}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3-3X^2+X-3=(X-3)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-3\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$
Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y}=\frac{1}{10}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{10}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{10}\,(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{10}\vec{x}\right)\\ &= (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{10}\,f^2+\frac{1}{10}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{10}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\left((f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $10\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{10} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{10} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{10}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(f^3(\vec{x}) - 3f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 3f^2 + f = 3\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{10} f^4(\vec{x}) + \frac{4}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 3\,f^3 - f^2 + 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{10}f^4\left(\vec{x}\right) + \frac{4}{5}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{9}{10}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{10}f^4\left(\vec{x}\right) + \frac{4}{5}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{9}{10}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{10}X^4 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{9}{10}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 3X^2 + X - 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{10}X^4 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{9}{10} = \left(X^3 - 3X^2 + X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}X - \frac{3}{10}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{10}\,f^4 + \frac{4}{5}\,f^2 + \frac{9}{10}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{10}\,f - \frac{3}{10}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (3u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 + f = 3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot 3^n+b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 28. ← page 6

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-14$ et X^2-X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-14$ admet 14 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 14 donne : $183\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-14\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)&=\ker\Big((f-14\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\big)\Big)\\&=\ker(f^3-15\,f^2+15\,f-14\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-15\,f^2+15\,f-14\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-15\,f^2+15\,f-14\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-14\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-14\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+1 par $X-14$. On a en effet :

$$X^2-X+1=(X-14)\,Q+183,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+\vec{x}=(f-14\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+183\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-15X^2+15X-14=(X-14)(X^2-X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-14\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-15\,f^2+15\,f-14\mathrm{Id}_E=(f-14\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\big)=\big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\big)\circ(f-14\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-14\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{183}f^2(\vec{x})-\frac{1}{183}f(\vec{x})+\frac{1}{183}\vec{x},\qquad\text{et :}\quad \vec{z}=\frac{1}{183}(f-14\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 14\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 14\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{183}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{183}f(\vec{x}) + \frac{1}{183}\vec{x}\right)\\ &= (f - 14\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{183}f^2 - \frac{1}{183}f + \frac{1}{183}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{183}\left(f^3 - 15f^2 + 15f - 14\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{183}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)((f - 14\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{183}\left(f^3 - 15f^2 + 15f - 14\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 14\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $183\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 14\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc}\vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& 14\vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& 196\vec{y} &-& \vec{z} &+& f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}\vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& 14\vec{y} &&&+& f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) &=& 182\vec{y} &-& \vec{z} &&\end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 182L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{183} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{183} f(\vec{x}) + \frac{1}{183}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{183} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{183} f(\vec{x}) + \frac{182}{183}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{183} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{183} f(\vec{x}) + \frac{1}{183}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{183} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{183} f(\vec{x}) + \frac{182}{183}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 14\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - 14\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 14\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{183} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{183} f(\vec{x}) + \frac{1}{183}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{183} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{183} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{183} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{14}{183} f^2(\vec{x}) - \frac{14}{183} f(\vec{x}) + \frac{14}{183}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{183}\left(f^3(\vec{x}) - 15 f^2(\vec{x}) + 15 f(\vec{x}) - 14\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 15\,f^2 + 15\,f = 14\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{183} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{183} f^3(\vec{x}) + \frac{60}{61} f^2(\vec{x}) - \frac{181}{183} f(\vec{x}) + \frac{182}{183}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 15\,f^2 - 15\,f + 14\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 15\,f^3 - 15\,f^2 + 14\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{183} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{183} f^3(\vec{x}) + \frac{60}{61} f^2(\vec{x}) - \frac{181}{183} f(\vec{x}) + \frac{182}{183}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{183} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{183} f^3(\vec{x}) + \frac{60}{61} f^2(\vec{x}) - \frac{181}{183} f(\vec{x}) + \frac{182}{183}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{183}X^4 + \frac{2}{183}X^3 + \frac{60}{61}X^2 - \frac{181}{183}X + \frac{182}{183}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 15X^2 + 15X - 14$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{183}X^4 + \frac{2}{183}X^3 + \frac{60}{61}X^2 - \frac{181}{183}X + \frac{182}{183} = \left(X^3 - 15X^2 + 15X - 14\right) \cdot \left(-\frac{1}{183}X - \frac{13}{183}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{183}\,f^4 + \frac{2}{183}\,f^3 + \frac{60}{61}\,f^2 - \frac{181}{183}\,f + \frac{182}{183}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 15\,f^2 + 15\,f - 14\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{183}\,f - \frac{13}{183}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 15f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 15f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 15u_{n+2} + 15u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (14u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 15\,f^2 + 15\,f = 14\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 15\,f^2 + 15\,f - 14\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 15\,f^2 + 15\,f - 14\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 14\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 14u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 14, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 14^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{3}i\,\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{3}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{3}\,\pi n\right),\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 14^n + b\cos\left(\frac{1}{3}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{3}\,\pi n\right).$$

Corrigé 29. ← page 6

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme

$\frac{1}{4}\Big(2\,X+\sqrt{37}-1\Big)\Big(2\,X-\sqrt{37}-1\Big)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f-9\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-10\,f-9\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-10f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-9\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}-10u_{n+1}-9u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-10\,f-9\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-10\,f-9\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-10\,f-9\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-1)^n+b\left(\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)^n+c\left(-\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{2}\right)^n.$$

Corrigé 30. ← page 7

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+1$. On a en effet :
$$X^2+2 = (X+1)\,Q+3,$$
   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2\,(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \qquad (\dagger)$$
   Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+2X+2 = (X+1)\,(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$
   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2\,(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{3}\,(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2\,(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
   donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\,((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & 2\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 2\,f^2 - 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 2X + 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 + X^2 + 2X + 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\,f^4 - \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\,f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{2}$ et $r_2 = -i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)2^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 31. ← page 7

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 27$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $28 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 + 27\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - f^2 + 27f - 27\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 27f - 27\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 27f - 27\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 27$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 27 = (X - 1)\,Q + 28,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 27\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 28\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 27X - 27 = (X - 1)(X^2 + 27)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 27f - 27\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 + 27\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 27\mathrm{Id}_E\right)\circ(f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{28}f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{28}(f - \mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{28} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x}\right) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{28} f^2 + \frac{27}{28}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{28}\left(f^3 - f^2 + 27 f - 27\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 27\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{28}\left(f^2 + 27\mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{28}\left(f^3 - f^2 + 27 f - 27\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $28\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 27\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -27\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 27\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 27L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{28} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{28} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{28}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{28} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{28} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{28}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{28} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{28} f^3(\vec{x}) + \frac{27}{28} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{28} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{28}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 27 f(\vec{x}) - 27\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 27\, f = 27\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 27\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{28} f^4(\vec{x}) - \frac{13}{14} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 27\, f + 27\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 27\, f^2 + 27\, f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{28} f^4(\vec{x}) - \frac{13}{14} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{28} f^4(\vec{x}) - \frac{13}{14} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{28}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{28}X^4 - \frac{13}{14}X^2 + \frac{27}{28}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 27X - 27$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{28}X^4 - \frac{13}{14}X^2 + \frac{27}{28} = \left(X^3 - X^2 + 27X - 27\right) \cdot \left(-\frac{1}{28}X - \frac{1}{28}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{28} f^4 - \frac{13}{14} f^2 + \frac{27}{28}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 27\, f - 27\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{28} f - \frac{1}{28}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}
f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 27 f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - u_{n+2} + 27u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\
&= (27u_n)_{n\geqslant 0}
\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + 27\,f = 27\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + 27\,f - 27\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + 27\,f - 27\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 27\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 27u_n = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 27 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = 3i\sqrt{3}$ et $r_2 = -3i\sqrt{3}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = 3\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)\left(3\sqrt{3}\right)^n,\ \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)\left(3\sqrt{3}\right)^n.$$

Corrigé 32. ← page 7

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{3, -3, -5\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X + 5)(X + 3)(X - 3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 5\mathrm{Id}_E) \circ (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ (f + 3\mathrm{Id}_E) &= (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 9\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 5\,f^2 - 9\,f - 45\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{3, -3, -5\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 5f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 9f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 45\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 5u_{n+2} - 9u_{n+1} - 45u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 5\,f^2 - 9\,f - 45\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 5\,f^2 - 9\,f - 45\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+5\,f^2-9\,f-45\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 5\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -5u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -5, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-5)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-5)^n + 3^n b + (-3)^n c.$$

Corrigé 33. ← page 7

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X + \sqrt{53} + 7\right)\left(2\,X - \sqrt{53} + 7\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned} (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 + 7\,f - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 6\,f^2 - 8\,f + \mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 8f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 6u_{n+2} - 8u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 6\,f^2 - 8\,f = -\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 6\,f^2 - 8\,f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 6\,f^2 - 8\,f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\left(\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)^n + c\left(-\frac{1}{2}\sqrt{53} - \frac{7}{2}\right)^n.$$

Corrigé 34. ← page 7

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+6$ et X^2+X+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+6$ admet -6 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -6 donne : $33 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 6\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + 7\,f^2 + 9\,f + 18\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+7\,f^2+9\,f+18\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+7\,f^2+9\,f+18\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+6\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+X+3 par $X+6$. On a en effet :

$$X^2+X+3 = (X+6)\,Q + 33,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + f\left(\vec{x}\right) + 3\vec{x} = (f+6\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 33\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+7X^2+9X+18 = (X+6)\left(X^2+X+3\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+7\,f^2+9\,f+18\mathrm{Id}_E = (f+6\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+f+3\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+f+3\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+6\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{33}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{33}f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{11}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{33}\left(f+6\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f+6\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f+6\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{33}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{33}f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{11}\vec{x}\right)\\
&= (f+6\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{33}\,f^2 + \frac{1}{33}\,f + \frac{1}{11}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{33}\Big(f^3+7\,f^2+9\,f+18\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{x}\right)\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\Big(f^2+f+3\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{33}\Big(f^2+f+3\mathrm{Id}_E\Big)\left(\left(f+6\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{33}\Big(f^3+7\,f^2+9\,f+18\mathrm{Id}_E\Big)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+6\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+6\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$, et : $(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $33\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f+6\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -6\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 6\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 36\vec{y} & - & 3\vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 6\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 30\vec{y} & - & 3\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 30L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{33}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{33}f(\vec{x}) + \frac{1}{11}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{33}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{33}f(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{33}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{33}f(\vec{x}) + \frac{1}{11}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{33}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{33}f(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 6\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{33}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{33}f(\vec{x}) + \frac{1}{11}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{33}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{33}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{11}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{2}{11}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{11}f(\vec{x}) - \frac{6}{11}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{33}\left(f^3(\vec{x}) + 7f^2(\vec{x}) + 9f(\vec{x}) + 18\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 7\,f^2 + 9\,f + 18\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{33}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{33}f^3(\vec{x}) + \frac{26}{33}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{11}f(\vec{x}) + \frac{30}{11}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -7\,f^2 - 9\,f - 18\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -7\,f^3 - 9\,f^2 - 18\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{33}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{33}f^3(\vec{x}) + \frac{26}{33}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{11}f(\vec{x}) + \frac{30}{11}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{33}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{33}f^3(\vec{x}) + \frac{26}{33}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{11}f(\vec{x}) + \frac{30}{11}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{33}X^4 - \frac{2}{33}X^3 + \frac{26}{33}X^2 + \frac{9}{11}X + \frac{30}{11}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 7X^2 + 9X + 18$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{33}X^4 - \frac{2}{33}X^3 + \frac{26}{33}X^2 + \frac{9}{11}X + \frac{30}{11} = \left(X^3 + 7X^2 + 9X + 18\right) \cdot \left(-\frac{1}{33}X + \frac{5}{33}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{33}\,f^4 - \frac{2}{33}\,f^3 + \frac{26}{33}\,f^2 + \frac{9}{11}\,f + \frac{30}{11}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 7\,f^2 + 9\,f + 18\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{33}\,f + \frac{5}{33}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 7f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 9f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 18\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 7u_{n+2} + 9u_{n+1} + 18u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 7\,f^2 + 9\,f + 18\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 7\,f^2 + 9\,f + 18\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 7\,f^2 + 9\,f + 18\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -6u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -6, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-6)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + 3u_n = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -11$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{3}e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\, 3^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 6\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-6)^n + (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\, 3^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 35. ← page 8

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{2, -\sqrt{14} - 4, \sqrt{14} - 4\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{14} + 4\right)\left(X - \sqrt{14} + 4\right)(X - 2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 8\,f + 2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 6\,f^2 - 14\,f - 4\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{2, -\sqrt{14} - 4, \sqrt{14} - 4\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 14f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 6u_{n+2} - 14u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (4u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 6\,f^2 - 14\,f = 4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 6\,f^2 - 14\,f - 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 6\,f^2 - 14\,f - 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 2^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\sqrt{14} - 4\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 2^n + b\left(\sqrt{14} - 4\right)^n + c\left(-\sqrt{14} - 4\right)^n.$$

Corrigé 36. ← page 8

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} &+\vec{z} \\ f(\vec{x}) &= f(\vec{y}) &+f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= f^2(\vec{y}) &+f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &= \vec{y} & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= \vec{y} - \vec{z} & \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 37. ← page 8

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+1$. On a en effet :
$$X^2+2=(X+1)\,Q+3,$$
avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :
$$f^2\,(\vec{x})+2\vec{x}=(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+3\vec{x}. \tag{†}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+2X+2=(X+1)\,(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$
Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y}=\frac{1}{3}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{3}\,(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{3}\,f^2+\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\,((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 2f = -2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 2\,f^2 - 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 2X + 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \Big(X^3 + X^2 + 2X + 2\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\Big)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\,f^4 - \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ \Big(-\frac{1}{3}\,f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\Big) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) = f\Big((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\Big) = \Big(u_{(n+1)+1}\Big)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) = f\Big(f^2\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)\Big) = f\Big((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\Big) = \Big(u_{(n+2)+1}\Big)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\Big(f\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)\Big)^2$ et $\Big(f\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)\Big)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) + f^2\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) + 2f\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) &= (u_{n+3} + u_{n+2} + 2u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-2u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + 2\,f = -2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow f^2\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{2}$ et $r_2 = -i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)2^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 38. ← page 8

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{89} - 1\right)\left(2X - \sqrt{89} - 1\right)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)\circ\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - \mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 - f - 22\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - 2f^2 - 21f + 22\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{89} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 21f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 22\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 2u_{n+2} - 21u_{n+1} + 22u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 - 21f + 22\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 -$

$21\,f+22\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-2\,f^2-21\,f+22\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a+b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\Big)^n+c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{89}+\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 39. ← page 8

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{-2\sqrt{6}+5,2\sqrt{6}+5,-2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+2\sqrt{6}-5\right)\left(X-2\sqrt{6}-5\right)(X+2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E\right)&=(f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-10\,f+\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-8\,f^2-19\,f+2\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-2\sqrt{6}+5,2\sqrt{6}+5,-2\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-8f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-19f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)&=(u_{n+3}-8u_{n+2}-19u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\&=(-2u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-8\,f^2-19\,f=-2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-8\,f^2-19\,f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-8\,f^2-19\,f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-2\sqrt{6}+5\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-2)^n+b\left(2\sqrt{6}+5\right)^n+c\left(-2\sqrt{6}+5\right)^n.$$

Corrigé 40. ← page 9

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2},1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)&=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2},1\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2\,(u_n)_{n\geqslant 0}&=(u_{n+3}-u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_n)_{n\geqslant 0}\\&=(0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + 2^{\frac{1}{2}\,n} b + c\left(-\sqrt{2}\right)^n.$$

Corrigé 41. ← page 9

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{3}\right)\left(X - \sqrt{3}\right)(X + 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 3\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + f^2 - 3\,f - 3\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + u_{n+2} - 3u_{n+1} - 3u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2-3\,f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+f^2-3\,f-3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2-3\,f-3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n + 3^{\frac{1}{2}n}b + c\left(-\sqrt{3}\right)^n.$$

Corrigé 42. ← page 9

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1,-1,7\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-7)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-7\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f+\mathrm{Id}_E) &= (f-7\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - 7\,f^2 - f + 7\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1,-1,7\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 7f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 7\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 7u_{n+2} - u_{n+1} + 7u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-7\,f^2-f+7\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-7\,f^2-f+7\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-7\,f^2-f+7\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-7\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=7u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 7, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot 7^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot 7^n+(-1)^n\,c+b.$$

Corrigé 43. ← page 9

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+30 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $31\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+30\mathrm{Id}_E)&=\ker\left((f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+30\mathrm{Id}_E\right)\right)\\&=\ker(f^3-f^2+30\,f-30\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+30\,f-30\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+30\,f-30\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+30\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+30\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+30 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+30=(X-1)\,Q+31,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+30\vec{x}=(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+31\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+30X-30=(X-1)(X^2+30)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+30\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+30\,f-30\mathrm{Id}_E=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+30\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2+30\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{31}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x}\right) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{31} f^2 + \frac{30}{31}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{31}\left(f^3 - f^2 + 30 f - 30\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 30\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{31}\left(f^2 + 30\mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{31}\left(f^3 - f^2 + 30 f - 30\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $31\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 30\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -30\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 30\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 30L_1$, ou

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{31}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{31}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{31} f^3(\vec{x}) + \frac{30}{31} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{31}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 30 f(\vec{x}) - 30\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 30\,f = 30\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 30\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{31} f^4(\vec{x}) - \frac{29}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 30\,f + 30\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 30\,f^2 + 30\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{31} f^4(\vec{x}) - \frac{29}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{31} f^4(\vec{x}) - \frac{29}{31} f^2(\vec{x}) + \frac{30}{31}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{31}X^4 - \frac{29}{31}X^2 + \frac{30}{31}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 30X - 30$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{31}X^4 - \frac{29}{31}X^2 + \frac{30}{31} = \left(X^3 - X^2 + 30X - 30\right) \cdot \left(-\frac{1}{31}X - \frac{1}{31}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{31}\,f^4 - \frac{29}{31}\,f^2 + \frac{30}{31}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 30\,f - 30\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{31}\,f - \frac{1}{31}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 30f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - u_{n+2} + 30u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (30u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + 30\,f = 30\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + 30\,f - 30\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + 30\,f - 30\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 30\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 30u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 30 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{30}$ et $r_2 = -i\sqrt{30}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{30}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)30^{\frac{1}{2}n},\ \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 30\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)30^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 44. ← page 9

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 5$ et $X^2 + X + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 5$ admet -5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -5 donne : $22 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + 6\,f^2 + 7\,f + 10\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+6\,f^2+7\,f+10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+6\,f^2+7\,f+10\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+X+2 par $X+5$. On a en effet :

$$X^2+X+2 = (X+5)\,Q+22,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{x}\right)+2\vec{x} = (f+5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+22\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+6X^2+7X+10 = (X+5)\left(X^2+X+2\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+6\,f^2+7\,f+10\mathrm{Id}_E = (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+5\mathrm{Id}_E)\,. \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{22}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{22}f\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{11}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{22}\left(f+5\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+5\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f+5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{22}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{22}f\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{11}\vec{x}\right)\\ &= (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{22}\,f^2+\frac{1}{22}\,f+\frac{1}{11}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{22}\Big(f^3+6\,f^2+7\,f+10\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{22}\Big(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\Big)\left(\left(f+5\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{22}\Big(f^3+6\,f^2+7\,f+10\mathrm{Id}_E\Big)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+5\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$, et : $(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $22\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -5\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 25\vec{y} & - & 2\vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -5\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 20\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 20L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{22} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{22} f(\vec{x}) + \frac{1}{11}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{22} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{22} f(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{22} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{22} f(\vec{x}) + \frac{1}{11}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{22} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{22} f(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{22} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{22} f(\vec{x}) + \frac{1}{11}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{22} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{22} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{11} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{5}{22} f^2(\vec{x}) - \frac{5}{22} f(\vec{x}) - \frac{5}{11}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{22}\left(f^3(\vec{x}) + 6f^2(\vec{x}) + 7f(\vec{x}) + 10\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 6\,f^2 + 7\,f + 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{22} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{11} f^3(\vec{x}) + \frac{17}{22} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{11} f(\vec{x}) + \frac{20}{11}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -6\,f^2 - 7\,f - 10\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -6\,f^3 - 7\,f^2 - 10\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{22}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{11}f^3(\vec{x}) + \frac{17}{22}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{11}f(\vec{x}) + \frac{20}{11}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{22}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{11}f^3(\vec{x}) + \frac{17}{22}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{11}f(\vec{x}) + \frac{20}{11}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{22}X^4 - \frac{1}{11}X^3 + \frac{17}{22}X^2 + \frac{9}{11}X + \frac{20}{11}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 6X^2 + 7X + 10$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{22}X^4 - \frac{1}{11}X^3 + \frac{17}{22}X^2 + \frac{9}{11}X + \frac{20}{11} = \left(X^3 + 6X^2 + 7X + 10\right) \cdot \left(-\frac{1}{22}X + \frac{2}{11}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{22}\,f^4 - \frac{1}{11}\,f^3 + \frac{17}{22}\,f^2 + \frac{9}{11}\,f + \frac{20}{11}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 6\,f^2 + 7\,f + 10\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{22}\,f + \frac{2}{11}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 7f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 10\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 6u_{n+2} + 7u_{n+1} + 10u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 6\,f^2 + 7\,f + 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 6\,f^2 + 7\,f + 10\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 6\,f^2 + 7\,f + 10\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 5\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -5u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -5, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-5)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\, 2^{\frac{1}{2}n},\ \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-5)^n + (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\, 2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 45. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 1)\, Q + 2,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}
\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc}
\vec{x} &=& & \vec{y} + \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) &=& - & \vec{y} & + & f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& & \vec{y} - \vec{z} & &
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2} f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-1)^n + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 46. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 6$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $7 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 6\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + 6\,f + 6\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+6\,f+6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+6\,f+6\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+6 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+6 = (X+1)\,Q+7,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 6\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 7\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+6X+6 = (X+1)\,(X^2+6)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+6\,f+6\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+6\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+6\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{7}f^2\,(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{7}\,(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2\,(\vec{x})+\frac{6}{7}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{7}\,f^2+\frac{6}{7}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\Big(f^3+f^2+6\,f+6\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+6\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{7}\Big(f^2+6\mathrm{Id}_E\Big)\,((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\Big(f^3+f^2+6\,f+6\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2+6\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $7\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en

somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 6\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -6\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & 6\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{7} f^3(\vec{x}) + \frac{6}{7} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{7} f^2(\vec{x}) - \frac{6}{7}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 6f(\vec{x}) + 6\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 6f = -6\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{7} f^4(\vec{x}) - \frac{5}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 6f - 6\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 6f^2 - 6f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{7} f^4(\vec{x}) - \frac{5}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{7} f^4(\vec{x}) - \frac{5}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{7}X^4 - \frac{5}{7}X^2 + \frac{6}{7}$ par le polynôme annulateur

$X^3 + X^2 + 6X + 6$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{7}X^4 - \frac{5}{7}X^2 + \frac{6}{7} = \left(X^3 + X^2 + 6X + 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}X + \frac{1}{7}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{7} f^4 - \frac{5}{7} f^2 + \frac{6}{7}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 6\,f + 6\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{7}\,f + \frac{1}{7}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + u_{n+2} + 6u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-6u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2+6\,f = -6\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+f^2+6\,f+6\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2+6\,f+6\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2+6\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 6u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+6\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+6=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{6}$ et $r_2 = -i\sqrt{6}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{6}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right)\right)6^{\frac{1}{2}\,n},\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 6\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right)\right)6^{\frac{1}{2}\,n}.$$

Corrigé 47. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+3$ et X^2+X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+3$ admet -3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -3 donne : $8 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3 + 4\,f^2 + 5\,f + 6\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+4\,f^2+5\,f+6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+4\,f^2+5\,f+6\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 2$ par $X + 3$. On a en effet :

$$X^2 + X + 2 = (X+3)\,Q + 8,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f + 3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 8\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+4X^2+5X+6 = (X+3)\,(X^2+X+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 4\,f^2 + 5\,f + 6\mathrm{Id}_E = (f + 3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f + 3\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{8}\,(f + 3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}\right) \\
&= (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{8}f^2 + \frac{1}{8}f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{8}\left(f^3 + 4f^2 + 5f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{8}\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)((f + 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{8}\left(f^3 + 4f^2 + 5f + 6\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $8\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrrr} \vec{x} &=& \vec{y} & + \ \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& -\ 3\vec{y} & & +\ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& 9\vec{y} & -\ 2\vec{z} & -\ f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} \vec{x} &=& \vec{y} & + \ \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& -\ 3\vec{y} & & +\ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) &=& 6\vec{y} & -\ 2\vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{8}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{3}{8}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{8}f(\vec{x}) - \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(f^3(\vec{x}) + 4f^2(\vec{x}) + 5f(\vec{x}) + 6\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 4\,f^2 + 5\,f = -6\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -4\,f^2 - 5\,f - 6\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -4\,f^3 - 5\,f^2 - 6\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{8}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{8}X^4 - \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 4X^2 + 5X + 6$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{8}X^4 - \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{2} = \left(X^3 + 4X^2 + 5X + 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}X + \frac{1}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}\,f^4 - \frac{1}{4}\,f^3 + \frac{3}{8}\,f^2 + \frac{1}{2}\,f + \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 4\,f^2 + 5\,f + 6\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{8}\,f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+4f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+5f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}+4u_{n+2}+5u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (-6u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+4\,f^2+5\,f=-6\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+4\,f^2+5\,f+6\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+4\,f^2+5\,f+6\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+3\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+3\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-3)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\ &\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+u_{n+1}+2u_n=0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+r+2=0$. Son discriminant est : $\Delta=-7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1=\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2=\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=\sqrt{2}e^{i\theta}$, où $\theta\in\mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(b\cos(n\theta)+c\sin(n\theta))\,2^{\frac{1}{2}n},\ \text{ avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-3)^n+(b\cos(n\theta)+c\sin(n\theta))\,2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 48. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-X+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$

admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+3 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2-X+3 = (X+1)\,Q+5,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 3\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 5\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+2X+3 = (X+1)\,(X^2-X+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{5}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{5}f^2 - \frac{1}{5}f + \frac{3}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big)((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})-f(\vec{z})+3\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=f(\vec{z})-3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x}&=&\vec{y}&+\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&f(\vec{y})&+f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&f^2(\vec{y})&+f^2(\vec{z})\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccrcrcl}\vec{x}&=&\vec{y}&+&\vec{z}&&\\ f(\vec{x})&=&-\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&\vec{y}&-&3\vec{z}&+&f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3\leftarrow L_3-L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcl}\vec{x}&=&\vec{y}&+&\vec{z}&&\\ f(\vec{x})&=&-\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})-f(\vec{x})&=&2\vec{y}&-&3\vec{z}&&\end{array}\right..$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+3L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{5}f^2(\vec{x})-\frac{1}{5}f(\vec{x})+\frac{3}{5}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=-\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}f(\vec{x})+\frac{2}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{5}f^2(\vec{x})-\frac{1}{5}f(\vec{x})+\frac{3}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}f(\vec{x})+\frac{2}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x})-\frac{1}{5}f(\vec{x})+\frac{3}{5}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{5}f^3(\vec{x})-\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{3}{5}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{5}f^2(\vec{x})+\frac{1}{5}f(\vec{x})-\frac{3}{5}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x})+2f(\vec{x})+3\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2\,f = -3\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -2\,f - 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\,f^2 - 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{2}{5}X^3 - \frac{2}{5}X^2 + \frac{1}{5}X + \frac{6}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 2X + 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 + \frac{2}{5}X^3 - \frac{2}{5}X^2 + \frac{1}{5}X + \frac{6}{5} = \left(X^3 + 2X + 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X + \frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\,f^4 + \frac{2}{5}\,f^3 - \frac{2}{5}\,f^2 + \frac{1}{5}\,f + \frac{6}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 2\,f + 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\,f + \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 2u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-3u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f = -3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+3\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\ &\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-u_{n+1}+3u_n=0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2-r+3=0$. Son discriminant est : $\Delta=-11$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1=\dfrac{1-i\sqrt{11}}{2}$ et $r_2=\dfrac{1+i\sqrt{11}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=\sqrt{3}e^{i\theta}$, où $\theta\in\mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(b\cos(n\theta)+c\sin(n\theta))\,3^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-1)^n+(b\cos(n\theta)+c\sin(n\theta))\,3^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 49. ← page 10

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\{2,3,-2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+2)(X-2)(X-3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)\circ(f-2\mathrm{Id}_E)\circ(f+2\mathrm{Id}_E) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-4\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-3\,f^2-4\,f+12\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{2,3,-2\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-4f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}-3u_{n+2}-4u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (-12u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-3\,f^2-4\,f=-12\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-3\,f^2-4\,f+12\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-3\,f^2-4\,f+12\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-3\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot 3^n+2^n b+(-2)^n\,c.$$

Corrigé 50. ← page 11

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2},2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)&=(f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-2\,f^2-2\,f+4\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2},2\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)&=(u_{n+3}-2u_{n+2}-2u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\&=(-4u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-2\,f^2-2\,f=-4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-2\,f^2-2\,f+4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-2\,f^2-2\,f+4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-2\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot 2^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot 2^n+2^{\frac{1}{2}n}b+c\left(-\sqrt{2}\right)^n.$$

Corrigé 51. ← page 11

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{\sqrt{59},-\sqrt{59},1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{59}\right)\left(X-\sqrt{59}\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{59}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{59}\mathrm{Id}_E\right)&=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-59\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-f^2-59\,f+59\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{59},-\sqrt{59},1\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-59f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+59\,(u_n)_{n\geqslant 0}&=(u_{n+3}-u_{n+2}-59u_{n+1}+59u_n)_{n\geqslant 0}\\&=(0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2-59\,f+59\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-f^2-59\,f+59\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2-59\,f+59\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{59}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a+59^{\frac{1}{2}n}b+c\left(-\sqrt{59}\right)^n.$$

Corrigé 52. ← page 11

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-X+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $5\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)&=\ker\left((f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\right)\right)\\&=\ker(f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+3 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2-X+3=(X+1)\,Q+5,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+3\vec{x}=(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+5\vec{x}.\tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+2X+3=(X+1)(X^2-X+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+2\,f+3\mathrm{Id}_E=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+\mathrm{Id}_E).\tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5} f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{5}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5} f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}\right) \\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{5} f^2 - \frac{1}{5} f + \frac{3}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + 2f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\left(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + 2f + 3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\ f(\vec{x}) &=& -\vec{y} &&& + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} &-& 3\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & 2\vec{y} & - & 3\vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{2}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{2}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{3}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{5}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) - \frac{3}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2\,f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -2\,f - 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\,f^2 - 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{5}f^3(\vec{x}) - \frac{2}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x}) + \frac{6}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{2}{5}X^3 - \frac{2}{5}X^2 + \frac{1}{5}X + \frac{6}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 2X + 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 + \frac{2}{5}X^3 - \frac{2}{5}X^2 + \frac{1}{5}X + \frac{6}{5} = \left(X^3 + 2X + 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X + \frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\,f^4 + \frac{2}{5}\,f^3 - \frac{2}{5}\,f^2 + \frac{1}{5}\,f + \frac{6}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 2\,f + 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\,f + \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 2u_{n+1} + 3u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - r + 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -11$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{11}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{11}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{3}e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\, 3^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-1)^n + (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\, 3^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 53. ← page 11

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et X^2+27 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $36 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+27\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+27\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-3\,f^2+27\,f-81\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-3\,f^2+27\,f-81\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+27\,f-81\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+27\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+27\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+27 par $X-3$. On a en effet :
$$X^2+27 = (X-3)\,Q+36,$$
avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :
$$f^2\,(\vec{x})+27\vec{x} = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+36\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3-3X^2+27X-81 = (X-3)\,(X^2+27)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+27\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3-3\,f^2+27\,f-81\mathrm{Id}_E = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+27\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+27\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-3\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$
Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+27\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{36}f^2\,(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{36}\,(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+27\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{36}f^2\,(\vec{x})+\frac{3}{4}\vec{x}\right)\\ &= (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{36}\,f^2+\frac{3}{4}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{36}\Big(f^3-3\,f^2+27\,f-81\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+27\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{36}\Big(f^2+27\mathrm{Id}_E\Big)\,((f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{36}\Big(f^3-3\,f^2+27\,f-81\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $36\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 27\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -27\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & 27\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 27L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{36} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{36} f^3(\vec{x}) + \frac{3}{4} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{12} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{4}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{36}\left(f^3(\vec{x}) - 3f^2(\vec{x}) + 27f(\vec{x}) - 81\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 3\,f^2 + 27\,f = 81\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 27\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{36} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{27}{4}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 3\,f^2 - 27\,f + 81\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 3\,f^3 - 27\,f^2 + 81\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{36}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{27}{4}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{36}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{27}{4}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{36}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{27}{4}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 3X^2 + 27X - 81$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{36}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{27}{4} = \left(X^3 - 3X^2 + 27X - 81\right) \cdot \left(-\frac{1}{36}X - \frac{1}{12}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{36}\,f^4 - \frac{1}{2}\,f^2 + \frac{27}{4}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 3\,f^2 + 27\,f - 81\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{36}\,f - \frac{1}{12}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 27f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 3u_{n+2} + 27u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (81u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 + 27\,f = 81\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 + 27\,f - 81\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 + 27\,f - 81\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 27\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 27u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 27 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = 3i\sqrt{3}$ et $r_2 = -3i\sqrt{3}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = 3\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)\left(3\sqrt{3}\right)^n,\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 27\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 3^n + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)\left(3\sqrt{3}\right)^n.$$

Corrigé 54. ← page 11

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-2\sqrt{2}, -4, 2\sqrt{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + 2\sqrt{2}\right)\left(X - 2\sqrt{2}\right)(X + 4)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 8\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 4f^2 - 8f - 32\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-2\sqrt{2}, -4, 2\sqrt{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 4f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 8f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 4u_{n+2} - 8u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (32u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 4f^2 - 8f = 32\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 4f^2 - 8f - 32\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 4f^2 - 8f - 32\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$).

Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 4\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -4u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -4, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-4)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 4\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + 2\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-4)^n + b\left(2\sqrt{2}\right)^n + c\left(-2\sqrt{2}\right)^n.$$

Corrigé 55. ← page 12

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, -30, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X + 30)(X + 1)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 30\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f + 30\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 30\,f^2 - f - 30\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, -30, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 30\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 30f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 30\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 30u_{n+2} - u_{n+1} - 30u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 30\,f^2 - f - 30\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 30\,f^2 - f - 30\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 30\,f^2 - f - 30\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 30\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 30\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+30\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+30\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -30u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 30\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -30, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-30)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f+30\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 30\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-30)^n + (-1)^n\, c + b.$$

Corrigé 56. ← page 12

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X + \sqrt{5}+1\right)\left(2\,X - \sqrt{5}+1\right)(X+2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 3\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 3u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+3\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+3\,f^2+f-2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 3\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau

est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-2)^n + b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\Big)^n + c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 57. ← page 12

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 27$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 27$ admet -27 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -27 donne : $730 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 27\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + 27\,f^2 + f + 27\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 27\,f^2 + f + 27\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 27\,f^2 + f + 27\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 27$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 27)\,Q + 730,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f + 27\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 730\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 27X^2 + X + 27 = (X + 27)\,(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 27\,f^2 + f + 27\mathrm{Id}_E = (f + 27\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + 27\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{730} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{730}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{730}(f + 27\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 27\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{730} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{730}\vec{x}\right) \\ &= (f + 27\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{730} f^2 + \frac{1}{730}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{730}\left(f^3 + 27 f^2 + f + 27\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{730}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + 27\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{730}\left(f^3 + 27 f^2 + f + 27\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $730\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -27\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} \vec{x} &=& \vec{y} & + & \vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& -27\vec{y} & & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& 729\vec{y} & - & \vec{z} \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou

$L_3 \leftarrow L_3 - 729L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{730} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{730}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{730} f^2(\vec{x}) + \frac{729}{730}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{730} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{730}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{730} f^2(\vec{x}) + \frac{729}{730}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 27\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 27\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{730} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{730}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{730} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{730} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{27}{730} f^2(\vec{x}) - \frac{27}{730}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{730}\left(f^3(\vec{x}) + 27 f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 27\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 27\,f^2 + f = -27\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{730} f^4(\vec{x}) + \frac{364}{365} f^2(\vec{x}) + \frac{729}{730}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -27\,f^2 - f - 27\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -27\,f^3 - f^2 - 27\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{730} f^4(\vec{x}) + \frac{364}{365} f^2(\vec{x}) + \frac{729}{730}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 27\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{730} f^4(\vec{x}) + \frac{364}{365} f^2(\vec{x}) + \frac{729}{730}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{730}X^4 + \frac{364}{365}X^2 + \frac{729}{730}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 27X^2 + X + 27$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{730}X^4 + \frac{364}{365}X^2 + \frac{729}{730} = \left(X^3 + 27X^2 + X + 27\right) \cdot \left(-\frac{1}{730}X + \frac{27}{730}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{730}\,f^4 + \frac{364}{365}\,f^2 + \frac{729}{730}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 27\,f^2 + f + 27\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{730}\,f + \frac{27}{730}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 27f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 27u_{n+2} + u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-27u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+27\,f^2+f = -27\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+27\,f^2+f+27\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+27\,f^2+f+27\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+27\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+27\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+27\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -27u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+27\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -27, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-27)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}+u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f+27\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+27\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-27)^n + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 58. ← page 12

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{5}+1, 1, \sqrt{5}+1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{5}-1\right)\left(X-\sqrt{5}-1\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned} (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\,f-4\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3-3\,f^2-2\,f+4\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{5}+1, 1, \sqrt{5}+1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:
$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 4\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 3u_{n+2} - 2u_{n+1} + 4u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :
$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$
Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\sqrt{5}+1\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\left(\sqrt{5}+1\right)^n + c\left(-\sqrt{5}+1\right)^n.$$

Corrigé 59. ← page 12

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 2$ et $X^2 + 2X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $9 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned} \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2X + 1$ par $X - 2$. On a en effet :

$$X^2 + 2X + 1 = (X - 2)\,Q + 9,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 2f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 9\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 3X - 2 = (X - 2)\,(X^2 + 2X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{9} f^2\,(\vec{x}) + \frac{2}{9} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{9}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{9}\,(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{9} f^2\,(\vec{x}) + \frac{2}{9} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{9}\vec{x}\right) \\
&= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{9}\,f^2 + \frac{2}{9}\,f + \frac{1}{9}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{9}\Big(f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\Big(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{9}\Big(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\Big)\,((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{9}\Big(f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $9\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & \vec{z} & - & 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) & = & 8\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{9}f(\vec{x}) + \frac{1}{9}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{9}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{9}f(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{9}f(\vec{x}) + \frac{1}{9}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{9}f^2(\vec{x}) - \frac{2}{9}f(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{9}f(\vec{x}) + \frac{1}{9}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{9}f^3(\vec{x}) + \frac{2}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{9}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{2}{9}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{9}f(\vec{x}) + \frac{2}{9}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(f^3(\vec{x}) - 3f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 3\,f = 2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{9}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{9}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{14}{9}f(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 3\,f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 3\,f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{9}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{9}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{14}{9}f(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{9}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{9}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{14}{9}f(\vec{x}) + \frac{8}{9}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{9}X^4 - \frac{4}{9}X^3 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{14}{9}X + \frac{8}{9}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 3X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{9}X^4 - \frac{4}{9}X^3 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{14}{9}X + \frac{8}{9} = \Big(X^3 - 3X - 2\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{9}X - \frac{4}{9}\Big)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{9}\,f^4 - \frac{4}{9}\,f^3 + \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{14}{9}\,f + \frac{8}{9}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ \Big(-\frac{1}{9}\,f - \frac{4}{9}\mathrm{Id}_E\Big) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 3u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (2u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f = 2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 2^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 2\,r + 1 = 0$. Identité remarquable oblige, on reconnaît là : $(r+1)^2 = 0$, et on en déduit que l'équation caractéristique admet pour unique solution : $r = -1$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (bn + c)\,(-1)^n\,,\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 2^n + (bn + c)\,(-1)^n\,.$$

Corrigé 60. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)\,(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}\,(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} & \\
f(\vec{x}) & = & \vec{y} & + f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} - \vec{z} &
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}
f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\
&= (u_n)_{n\geqslant 0}
\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2} i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 61. ← page 13

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{30}, 3, \sqrt{30}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{30}\right)\left(X - \sqrt{30}\right)(X - 3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{30}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{30}\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 30\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 3f^2 - 30f + 90\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{30}, 3, \sqrt{30}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{30}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 30f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 3u_{n+2} - 30u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-90u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - 30\,f = -90\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - 30\,f + 90\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - 30\,f + 90\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{30}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{30}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{30}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 3^n + 30^{\frac{1}{2}n} b + c\left(-\sqrt{30}\right)^n.$$

Corrigé 62. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 5$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $6 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 5$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 5 = (X - 1)\, Q + 6,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 5\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 6\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 5X - 5 = (X - 1)(X^2 + 5)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{6}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{6}\, f^2 + \frac{5}{6}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{6}\left(f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{6}\left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{6}\left(f^3 - f^2 + 5\,f - 5\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $6\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer

que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 5\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -5\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 5\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}f^3(\vec{x}) + \frac{5}{6}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 5f(\vec{x}) - 5\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 5\,f = 5\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{6}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 5\,f + 5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 5\,f^2 + 5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{6}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{6}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{6}X^4 - \frac{2}{3}X^2 + \frac{5}{6}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 5X - 5$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{6}X^4 - \frac{2}{3}X^2 + \frac{5}{6} = \left(X^3 - X^2 + 5X - 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{6}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}\, f^4 - \frac{2}{3}\, f^2 + \frac{5}{6}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 5\, f - 5\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{6}\, f - \frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 5f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - u_{n+2} + 5u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (5u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + 5\, f = 5\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + 5\, f - 5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + 5\, f - 5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 5\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 5u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 5 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{5}$ et $r_2 = -i\sqrt{5}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right)\right)5^{\frac{1}{2}\,n},\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right)\right)5^{\frac{1}{2}\,n}.$$

Corrigé 63. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+97$ et X^2-X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+97$ admet -97 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -97 donne : $9508 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+97\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+97\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+96\,f^2-95\,f+194\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+96\,f^2-95\,f+194\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+96\,f^2-95\,f+194\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+97\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+97\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+2 par $X+97$. On a en effet :

$$X^2-X+2 = (X+97)\,Q + 9508,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f+97\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 9508\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+96X^2-95X+194 = (X+97)\,(X^2-X+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+97\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+96\,f^2-95\,f+194\mathrm{Id}_E = (f+97\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+97\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+97\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{9508}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9508}f(\vec{x}) + \frac{1}{4754}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{9508}\,(f+97\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+97\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+97\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+97\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{9508}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9508}f(\vec{x}) + \frac{1}{4754}\vec{x}\right)\\ &= (f+97\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{9508}\,f^2 - \frac{1}{9508}\,f + \frac{1}{4754}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{9508}\Big(f^3+96\,f^2-95\,f+194\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{9508}\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)((f + 97\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{9508}\left(f^3 + 96\, f^2 - 95\, f + 194\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f{+}97\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f{+}97\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 97\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $9508\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -97\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcrcl}\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 97\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & 9409\vec{y} & - & 2\vec{z} & + & f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcl}\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 97\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 9506\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9506L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{9508}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9508}f(\vec{x}) + \frac{1}{4754}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{9508}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{9508}f(\vec{x}) + \frac{4753}{4754}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{9508}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9508}f(\vec{x}) + \frac{1}{4754}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{9508}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{9508}f(\vec{x}) + \frac{4753}{4754}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E)$,

$\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f+97\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 97\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + 97\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 97\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{9508}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9508}f(\vec{x}) + \frac{1}{4754}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{9508}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{9508}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4754}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{97}{9508}f^2(\vec{x}) + \frac{97}{9508}f(\vec{x}) - \frac{97}{4754}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{9508}\left(f^3(\vec{x}) + 96f^2(\vec{x}) - 95f(\vec{x}) + 194\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 96\,f^2 - 95\,f = -194\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{9508}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{4754}f^3(\vec{x}) + \frac{9503}{9508}f^2(\vec{x}) - \frac{2376}{2377}f(\vec{x}) + \frac{4753}{2377}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -96\,f^2 + 95\,f - 194\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -96\,f^3 + 95\,f^2 - 194\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{9508}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{4754}f^3(\vec{x}) + \frac{9503}{9508}f^2(\vec{x}) - \frac{2376}{2377}f(\vec{x}) + \frac{4753}{2377}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 97\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{9508}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{4754}f^3(\vec{x}) + \frac{9503}{9508}f^2(\vec{x}) - \frac{2376}{2377}f(\vec{x}) + \frac{4753}{2377}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{9508}X^4 + \frac{1}{4754}X^3 + \frac{9503}{9508}X^2 - \frac{2376}{2377}X + \frac{4753}{2377}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 96X^2 - 95X + 194$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{9508}X^4+\frac{1}{4754}X^3+\frac{9503}{9508}X^2-\frac{2376}{2377}X+\frac{4753}{2377} = \left(X^3 + 96X^2 - 95X + 194\right)\cdot\left(-\frac{1}{9508}X + \frac{49}{4754}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{9508}\,f^4 + \frac{1}{4754}\,f^3 + \frac{9503}{9508}\,f^2 - \frac{2376}{2377}\,f + \frac{4753}{2377}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 96\,f^2 - 95\,f + 194\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{9508}\,f + \frac{49}{4754}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 96f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 95f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 96u_{n+2} - 95u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (-194u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 96\,f^2 - 95\,f = -194\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 96\,f^2 - 95\,f + 194\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 96\,f^2 - 95\,f + 194\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 97\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f{+}97\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right){+}97\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -97u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 97\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -97, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-97)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\,2^{\frac{1}{2}n},\ \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 97\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 97\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-97)^n + (b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta))\,2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 64. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\, Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer

que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \ \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - \ \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$-\frac{1}{2}f^4+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E=\left(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$$
$$=0_{\mathrm{L}(E)}.$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-(u_n)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3}-u_{n+2}+u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$$
$$=(0)_{n\geqslant 0}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}$$
$$\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+u_n=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec }(b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 65. ← page 14

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{14}, \sqrt{14}, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{14}\right)\left(X-\sqrt{14}\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{14}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{14}\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-14\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+f^2-14\,f-14\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{14}, \sqrt{14}, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\sqrt{14}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-14f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-14\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}+u_{n+2}-14u_{n+1}-14u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2-14\,f-14\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+f^2-14\,f-14\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2-14\,f-14\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les

éléments de $\ker(f-\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{14}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-1)^n+14^{\frac{1}{2}n}b+c\left(-\sqrt{14}\right)^n.$$

Corrigé 66. ← page 14

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{\sqrt{7}+3,-\sqrt{7}+3,1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{7}-3\right)\left(X-\sqrt{7}-3\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E\right)&=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-6\,f+2\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-7\,f^2+8\,f-2\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{7}+3,-\sqrt{7}+3,1\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-7f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+8f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)&=(u_{n+3}-7u_{n+2}+8u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\&=(2u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-7\,f^2+8\,f=2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-7\,f^2+8\,f-2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-7\,f^2+8\,f-2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\sqrt{7}+3\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\left(\sqrt{7}+3\right)^n + c\left(-\sqrt{7}+3\right)^n.$$

Corrigé 67. ← page 14

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 2, -2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+2)(X-1)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 4\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - f^2 - 4\,f + 4\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 2, -2\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 4f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 4\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 - 4\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 - 4\,f + 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 - 4\,f + 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$. Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + 2^n b + (-2)^n c.$$

Corrigé 68. ← page 14

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}, -2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{13}-3\right)\left(2\,X-\sqrt{13}-3\right)(X+2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-3\,f-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-f^2-7\,f-2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}, -2\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 7f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}-u_{n+2}-7u_{n+1}-2u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2-7\,f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-f^2-7\,f-2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2-7\,f-2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-2)^n + b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\Big)^n + c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 69. ← page 14

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 3, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f+\mathrm{Id}_E) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 3, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 3u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = a\cdot 3^n + (-1)^n c + b.$$

Corrigé 70. ← page 15

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $10\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-3$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X-3)\,Q+10,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+\vec{x} = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+10\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-3X^2+X-3=(X-3)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-3\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{10}f^2(\vec{x})+\frac{1}{10}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{10}(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}\right)\\ &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{10}f^2 + \frac{1}{10}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\left(f^3 - 3f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{10}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\left(f^3 - 3f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $10\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \quad f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2(\vec{x})+\frac{1}{10}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{10}f^3(\vec{x})+\frac{1}{10}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{3}{10}f^2(\vec{x})+\frac{3}{10}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{10}\left(f^3(\vec{x})-3f^2(\vec{x})+f(\vec{x})-3\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-3\,f^2+f=3\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{10}f^4(\vec{x})+\frac{4}{5}f^2(\vec{x})+\frac{9}{10}\vec{x},$$

et comme : $f^3=3\,f^2-f+3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=3\,f^3-f^2+3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x})+\frac{4}{5}f^2(\vec{x})+\frac{9}{10}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x})+\frac{4}{5}f^2(\vec{x})+\frac{9}{10}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{10}X^4+\frac{4}{5}X^2+\frac{9}{10}$ par le polynôme annulateur X^3-3X^2+X-3, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{10}X^4+\frac{4}{5}X^2+\frac{9}{10}=\left(X^3-3X^2+X-3\right)\cdot\left(-\frac{1}{10}X-\frac{3}{10}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{10}\,f^4+\frac{4}{5}\,f^2+\frac{9}{10}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{10}\,f-\frac{3}{10}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}-3u_{n+2}+u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (3u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 + f = 3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0}\\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2} i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right),\ \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 3^n + b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right).$$

Corrigé 71. ← page 15

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 5$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 5$ admet 5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 5 donne : $26 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en

deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 5$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 5)\,Q + 26,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f - 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 26\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 5X^2 + X - 5 = (X - 5)\,(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E = (f - 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 5\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{26} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{26}\,(f - 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{26} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}\right) \\
&= (f - 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{26}\,f^2 + \frac{1}{26}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{26}\left(f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{26}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{26}\left(f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $26\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel

que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 5\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 25\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 25L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{26}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{26}f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{26}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{26}f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{26}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{26}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{26}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{5}{26}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{26}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{26}\left(f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 5\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 5\,f^2 + f = 5\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{26}f^4(\vec{x}) + \frac{12}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 5\,f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 5\,f^3 - f^2 + 5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{26}f^4(\vec{x}) + \frac{12}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{26}f^4(\vec{x}) + \frac{12}{13}f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{26}X^4 + \frac{12}{13}X^2 + \frac{25}{26}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 5X^2 + X - 5$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{26}X^4 + \frac{12}{13}X^2 + \frac{25}{26} = \left(X^3 - 5X^2 + X - 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{26}X - \frac{5}{26}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{26}\,f^4+\frac{12}{13}\,f^2+\frac{25}{26}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{26}\,f-\frac{5}{26}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-5f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}-5u_{n+2}+u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (5u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-5\,f^2+f=5\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-5\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-5\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-5\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=5u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 5, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot 5^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\ &\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+u_n=0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right),\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 5^n + b \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c \sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 72. ← page 15

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{13} - 1\right)\left(2X - \sqrt{13} - 1\right)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f - 3\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 2f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-3u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 - 2f = -3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :
$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\Big)^n + c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 73. ← page 15

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X + \sqrt{5} + 1\right)\left(2\,X - \sqrt{5} + 1\right)(X+2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f - \Big(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\Big)\mathrm{Id}_E\Big) \circ \Big(f - \Big(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\Big)\mathrm{Id}_E\Big) &= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 3\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 3u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 3\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 3\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 3\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question)

s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-2)^n+b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\Big)^n+c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 74. ← page 15

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-2X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $4\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)&=\ker\left((f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E\right)\right)\\&=\ker(f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-2X+1 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2-2X+1=(X+1)\,Q+4,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right)-2f\left(\vec{x}\right)+\vec{x}=(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+4\vec{x}.\qquad(\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2-X+1=(X+1)\,(X^2-2X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2-f+\mathrm{Id}_E=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2-2\,f+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,.\qquad(\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{4} f^2\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{2} f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{4}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{4}\left(f + \mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{y}\right) &= \left(f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\frac{1}{4} f^2\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{2} f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{4}\vec{x}\right) \\
&= \left(f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(\frac{1}{4}\,f^2 - \frac{1}{2}\,f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 - f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{4}\left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\left(f + \mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3 - f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $\left(f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$, et : $\left(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\left(\vec{z}\right) - 2f\left(\vec{z}\right) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\left(\vec{z}\right) = 2f\left(\vec{z}\right) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc}
\vec{x} & = & & \vec{y} & + \ \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - \ \vec{z} & + & 2f(\vec{z})
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{1}{4}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x}) - \frac{1}{4}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 - f = -\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) + f^3(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 + f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 + f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) + f^3(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) + f^3(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \frac{3}{4}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4 + X^3 - \frac{1}{2}X^2 - X + \frac{3}{4}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 - X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4 + X^3 - \frac{1}{2}X^2 - X + \frac{3}{4} = \left(X^3 - X^2 - X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}X + \frac{3}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}f^4 + f^3 - \frac{1}{2}f^2 - f + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-u_n)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 - f = -\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - 2\,r + 1 = 0$. Identité remarquable oblige, on reconnaît là : $(r-1)^2 = 0$, et on en déduit que l'équation caractéristique admet pour unique solution : $r = 1$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = bn + c,\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-1)^n + bn + c.$$

Corrigé 75. ← page 16

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-1$. On a en effet :
$$X^2+1 = (X-1)\,Q+2,$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x})+\vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$
Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+X-1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$
Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
donc : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\big((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\big)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\,f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}\,f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 76. ← page 16

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 - X + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 2$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 2 = (X - 1)\,Q + 2,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = (X - 1)\,(X^2 - X + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\big) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \quad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{2}f\,(\vec{x}) + \vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}\,(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \vec{x}\right)\\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - 2f^2 + 3f - 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - 2f^2 + 3f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x}), \quad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2} f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2} f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2} f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2} f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + 3f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + f^3(\vec{x}) - \frac{3}{2} f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - 3\,f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - 3\,f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + f^3(\vec{x}) - \frac{3}{2} f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}
f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n)_{n\geqslant 0} \\
&= (0)_{n\geqslant 0}
\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)&\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\&\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-u_{n+1}+2u_n=0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2-r+2=0$. Son discriminant est : $\Delta=-7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1=\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$. Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=\sqrt{2}e^{i\theta}$, où $\theta\in\mathbb{R}$ est un argument de r_1, que vous ne parviendrez pas à écrire sous une forme simple et explicite. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(b\cos(n\theta)+c\sin(n\theta))\,2^{\frac{1}{2}n},\ \text{ avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a+(b\cos(n\theta)+c\sin(n\theta))\,2^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 77. ← page 16

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\{1,-5,12\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+5)(X-1)(X-12)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-12\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f+5\mathrm{Id}_E)&=(f-12\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+4\,f-5\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-8\,f^2-53\,f+60\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1,-5,12\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 8f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 53f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 60\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 8u_{n+2} - 53u_{n+1} + 60u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 8\,f^2 - 53\,f + 60\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 8\,f^2 - 53\,f + 60\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 8\,f^2 - 53\,f + 60\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 12\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 12u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 12, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 12^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 12^n + (-5)^n\,c + b.$$

Corrigé 78. ← page 16

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 13$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $14 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 13\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 13$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 13 = (X - 1)\,Q + 14,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 13\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 14\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 13X - 13 = (X-1)\left(X^2+13\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 + 13\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 13\mathrm{Id}_E\right)\circ(f - \mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{14} f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{14}(f - \mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{14} f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x}\right)\\ &= (f - \mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{14}\,f^2 + \frac{13}{14}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{14}\left(f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 13\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{14}\left(f^2 + 13\mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{14}\left(f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $14\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + 13\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -13\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} - 13\vec{z} \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 13L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{14}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{14}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{14}f^3(\vec{x}) + \frac{13}{14}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{14}f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{14}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 13f(\vec{x}) - 13\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 13\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{14}f^4(\vec{x}) - \frac{6}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 13\,f + 13\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 13\,f^2 + 13\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{14}f^4(\vec{x}) - \frac{6}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{14}f^4(\vec{x}) - \frac{6}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{13}{14}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{14}X^4 - \frac{6}{7}X^2 + \frac{13}{14}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 13X - 13$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{14}X^4 - \frac{6}{7}X^2 + \frac{13}{14} = \left(X^3 - X^2 + 13X - 13\right) \cdot \left(-\frac{1}{14}X - \frac{1}{14}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{14}\,f^4 - \frac{6}{7}\,f^2 + \frac{13}{14}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{14}\,f - \frac{1}{14}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 13f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 13\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - u_{n+2} + 13u_{n+1} - 13u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + 13\,f - 13\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 13\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 13u_n = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 13 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{13}$ et $r_2 = -i\sqrt{13}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{13}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)13^{\frac{1}{2}n},\ \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 13\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)13^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 79. ← page 16

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{17}-1\right)\left(2\,X-\sqrt{17}-1\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f-4\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-5\,f-4\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-5f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}-5u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (4u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-5\,f = 4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-5\,f-4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-5\,f-4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :
$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$
Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n+b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\Big)^n+c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 80. ← page 17

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 3, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 3\, f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 3, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 3u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 3^n + (-1)^n\, c + b.$$

Corrigé 81. ← page 17

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 2, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 2\,f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 2, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2\,f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2\,f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2\,f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 2^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 2^n + (-1)^n\,c + b.$$

Corrigé 82. ← page 17

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{85}+9\right)\left(2\,X-\sqrt{85}+9\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+9\,f-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+10\,f^2+8\,f-\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+10f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+8f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}+10u_{n+2}+8u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+10\,f^2+8\,f = \mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+10\,f^2+8\,f-\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+10\,f^2+8\,f-\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n+b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\Big)^n+c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{85}-\frac{9}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 83. ← page 17

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 34, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-34)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f - 34\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f - 34\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 34\, f^2 - f + 34\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 34, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 34\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 34f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 34u_{n+2} - u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-34u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 34\, f^2 - f = -34\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 34\, f^2 - f + 34\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 34\, f^2 - f + 34\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 34\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 34\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :
$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 34\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 34\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 34u_n.$$
Autrement dit : $\ker(f - 34\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 34, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 34^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 34\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 34\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 34^n + (-1)^n\, c + b.$$

Corrigé 84. ← page 17

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{5}+1\right)\left(2\,X-\sqrt{5}+1\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+f-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-2\,f+\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :
$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:
$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}-2u_{n+1}+u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$
car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-2\,f+\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-2\,f+\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-2\,f+\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :
$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)-(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n.$$
Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = a+b\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)^n+c\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Corrigé 85. ← page 18

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}, -5\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X+\sqrt{13}+3\right)\left(2X-\sqrt{13}+3\right)(X+5)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+5\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+3\,f-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+8\,f^2+14\,f-5\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}, -5\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+8f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+14f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3}+8u_{n+2}+14u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (5u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+8\,f^2+14\,f = 5\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+8\,f^2+14\,f-5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+8\,f^2+14\,f-5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+5\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = -5u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -5, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-5)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-5)^n + b\left(\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}\right)^n + c\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}\right)^n.$$

Corrigé 86. ← page 18

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+5$ et X^2+2X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+5$ admet -5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -5 donne : $16 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+5\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2X+1 par $X+5$. On a en effet :

$$X^2+2X+1 = (X+5)\,Q + 16,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + \vec{x} = (f+5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 16\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+7X^2+11X+5 = (X+5)(X^2+2X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E = (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+5\mathrm{Id}_E)\,. \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{16}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{16}(f+5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{16}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}\right)\\ &= (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{16}\,f^2 + \frac{1}{8}\,f + \frac{1}{16}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{16}\Big(f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{16}\left(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{16}\left(f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $16\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 5\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & & 25\vec{y} & - & \vec{z} & - & 2f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 5\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) & = & & 15\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 15L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{16}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{16}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{16}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{16}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$

d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+5\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{16}f^2(\vec{x})+\frac{1}{8}f(\vec{x})+\frac{1}{16}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{16}f^3(\vec{x})+\frac{1}{8}f^2(\vec{x})+\frac{1}{16}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{5}{16}f^2(\vec{x})-\frac{5}{8}f(\vec{x})-\frac{5}{16}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(f^3(\vec{x})+7f^2(\vec{x})+11f(\vec{x})+5\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{16}f^4(\vec{x})-\frac{1}{4}f^3(\vec{x})+\frac{5}{8}f^2(\vec{x})+\frac{7}{4}f(\vec{x})+\frac{15}{16}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-7\,f^2-11\,f-5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-7\,f^3-11\,f^2-5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{16}f^4(\vec{x})-\frac{1}{4}f^3(\vec{x})+\frac{5}{8}f^2(\vec{x})+\frac{7}{4}f(\vec{x})+\frac{15}{16}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{16}f^4(\vec{x})-\frac{1}{4}f^3(\vec{x})+\frac{5}{8}f^2(\vec{x})+\frac{7}{4}f(\vec{x})+\frac{15}{16}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{16}X^4-\frac{1}{4}X^3+\frac{5}{8}X^2+\frac{7}{4}X+\frac{15}{16}$ par le polynôme annulateur $X^3+7X^2+11X+5$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{16}X^4-\frac{1}{4}X^3+\frac{5}{8}X^2+\frac{7}{4}X+\frac{15}{16}=\left(X^3+7X^2+11X+5\right)\cdot\left(-\frac{1}{16}X+\frac{3}{16}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{16}\,f^4-\frac{1}{4}\,f^3+\frac{5}{8}\,f^2+\frac{7}{4}\,f+\frac{15}{16}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{16}\,f+\frac{3}{16}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+7f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+11f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+5\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}+7u_{n+2}+11u_{n+1}+5u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+7\,f^2+11\,f+5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+5\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-5u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -5, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=\left(a\cdot(-5)^n\right)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)&\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\&\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+2\,r+1=0$. Identité remarquable oblige, on reconnaît là : $(r+1)^2=0$, et on en déduit que l'équation caractéristique admet pour unique solution : $r=-1$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(bn+c)\,(-1)^n\,,\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-5)^n+(bn+c)\,(-1)^n\,.$$

Corrigé 87. ← page 18

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)&=\ker\left((f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\right)\\&=\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que

$\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)\,(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}\,(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}\,f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et

l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\,f^4+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\Big)\circ\Big(-\frac{1}{2}\,f-\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\Big)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) = f\Big((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\Big) = \Big(u_{(n+1)+1}\Big)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big) = f\Big(f^2\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)\Big) = f\Big((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\Big) = \Big(u_{(n+2)+1}\Big)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\Big(f\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)\Big)^2$ et $\Big(f\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)\Big)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)-f^2\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)+f\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)-(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}-u_{n+2}+u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)-(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\Big((u_n)_{n\geqslant 0}\Big)+(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\ &\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+u_n=0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=b\cos\Big(\frac{1}{2}\,\pi n\Big)+c\sin\Big(\frac{1}{2}\,\pi n\Big),\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 88. ← page 18

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - 2\,f^2 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (-4u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2\,f^2 - 2\,f = -4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2\,f^2 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2\,f^2 - 2\,f + 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 2^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments

de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 2^n + 2^{\frac{1}{2}n} b + c\left(-\sqrt{2}\right)^n.$$

Corrigé 89. ← page 18

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{5} - 1\right)\left(2X - \sqrt{5} - 1\right)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 2f^2 + \mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 2u_{n+2})_{n\geqslant 0} \\ &= (-u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 = -\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = a + b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\Big)^n + c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 90. ← page 19

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}-u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + 2^{\frac{1}{2}n} b + c\left(-\sqrt{2}\right)^n.$$

Corrigé 91. ← page 19

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -4\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{3}\right)\left(X - \sqrt{3}\right)(X + 4)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 3\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 4\, f^2 - 3\, f - 12\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -4\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 4f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + 4u_{n+2} - 3u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\ &= (12u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+4\, f^2-3\, f = 12\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+4\, f^2-3\, f-12\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+4\, f^2-3\, f-12\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+4\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-4u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -4, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-4)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-4)^n+3^{\frac{1}{2}n}b+c\left(-\sqrt{3}\right)^n.$$

Corrigé 92. ← page 19

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+2$ et X^2+3 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+2$ admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $7\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)&=\ker\left((f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\right)\\&=\ker(f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+3 par $X+2$. On a en effet :

$$X^2+3=(X+2)\,Q+7,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+3\vec{x}=(f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+7\vec{x}.\qquad(\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+2X^2+3X+6=(X+2)\,(X^2+3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+2\,f^2+3\,f+6\mathrm{Id}_E=(f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2+3\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+2\mathrm{Id}_E).\qquad(\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{7}f^2(\vec{x})+\frac{3}{7}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{7}(f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}\right)\\ &= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{7}f^2 + \frac{3}{7}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\left(f^3 + 2f^2 + 3f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{7}\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)((f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\left(f^3 + 2f^2 + 3f + 6\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $7\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc}\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & 3\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{7}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{7}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{3}{7}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{2}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{6}{7}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{7}\left(f^3(\vec{x}) + 2f^2(\vec{x}) + 3f(\vec{x}) + 6\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{12}{7}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -2\,f^2 - 3\,f - 6\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\,f^3 - 3\,f^2 - 6\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{12}{7}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{12}{7}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{7}X^4 + \frac{1}{7}X^2 + \frac{12}{7}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 2X^2 + 3X + 6$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{7}X^4 + \frac{1}{7}X^2 + \frac{12}{7} = \left(X^3 + 2X^2 + 3X + 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}X + \frac{2}{7}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{7}\,f^4 + \frac{1}{7}\,f^2 + \frac{12}{7}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 6\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{7}\,f + \frac{2}{7}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 6\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 2u_{n+2} + 3u_{n+1} + 6u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 6\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f^2 + 3\,f + 6\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-2)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0}\\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 3u_n = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 3 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{3}$ et $r_2 = -i\sqrt{3}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{3}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right)\right)3^{\frac{1}{2}\,n},\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-2)^n + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right)\right)3^{\frac{1}{2}\,n}.$$

Corrigé 93. ← page 19

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 21$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $22 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 21\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + f^2 + 21\,f + 21\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+21\,f+21\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+21\,f+21\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en

deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 21$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 21 = (X + 1)\, Q + 22,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 21\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 22\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + 21X + 21 = (X + 1)\,(X^2 + 21)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + 21\, f + 21\mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 21\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 21\mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{22} f^2(\vec{x}) + \frac{21}{22}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{22}\,(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{22} f^2(\vec{x}) + \frac{21}{22}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{22} f^2 + \frac{21}{22}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{22}\left(f^3 + f^2 + 21\, f + 21\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 21\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{22}\left(f^2 + 21\mathrm{Id}_E\right)\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{22}\left(f^3 + f^2 + 21\, f + 21\mathrm{Id}_E\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $22\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ tel

que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 21\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -21\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 21\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 21L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{22}f^2(\vec{x}) + \frac{21}{22}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{22}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{22}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{22}f^2(\vec{x}) + \frac{21}{22}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{22}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{22}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{22}f^2(\vec{x}) + \frac{21}{22}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{22}f^3(\vec{x}) + \frac{21}{22}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{22}f^2(\vec{x}) - \frac{21}{22}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{22}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 21f(\vec{x}) + 21\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 21\,f + 21\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 21\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{22}f^4(\vec{x}) - \frac{10}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{21}{22}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 21\,f - 21\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 21\,f^2 - 21\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{22}f^4(\vec{x}) - \frac{10}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{21}{22}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{22}f^4(\vec{x}) - \frac{10}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{21}{22}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{22}X^4 - \frac{10}{11}X^2 + \frac{21}{22}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 21X + 21$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{22}X^4 - \frac{10}{11}X^2 + \frac{21}{22} = \left(X^3 + X^2 + 21X + 21\right) \cdot \left(-\frac{1}{22}X + \frac{1}{22}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{22} f^4 - \frac{10}{11} f^2 + \frac{21}{22}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 21\, f + 21\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{22} f + \frac{1}{22}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}
$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$
f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}
$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$
\begin{aligned}
f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 21 f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 21\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + u_{n+2} + 21u_{n+1} + 21u_n)_{n\geqslant 0} \\
&= (0)_{n\geqslant 0}
\end{aligned}
$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + 21\, f + 21\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + 21\, f + 21\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + 21\, f + 21\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$
(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.
$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E) &\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 21\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 21u_n = 0.
\end{aligned}
$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 21\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 21 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{21}$ et $r_2 = -i\sqrt{21}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{21}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$
\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)21^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.
$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+21\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+21\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)21^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 94. ← page 19

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-3\sqrt{6}, 2, 3\sqrt{6}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+3\sqrt{6}\right)\left(X-3\sqrt{6}\right)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E\right) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-54\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-2f^2-54f+108\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-3\sqrt{6}, 2, 3\sqrt{6}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 54f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 108\,(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3}-2u_{n+2}-54u_{n+1}+108u_n)_{n\geqslant 0}\\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-2f^2-54f+108\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-2f^2-54f+108\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-2f^2-54f+108\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 2, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot 2^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments

de $\ker(f - 3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + 3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - 3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + 3\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 2^n + b\left(3\sqrt{6}\right)^n + c\left(-3\sqrt{6}\right)^n.$$

Corrigé 95. ← page 20

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{41} - 3\right)\left(2X - \sqrt{41} - 3\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 3f - 8\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 2f^2 - 11f - 8\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 11f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 8(u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} - 2u_{n+2} - 11u_{n+1} - 8u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 - 11f - 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 - 11f - 8\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 - 11f - 8\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels.
En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-1)^n + b\left(\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)^n + c\left(-\frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{3}{2}\right)^n.$$

Corrigé 96. ← page 20

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 1)\, Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2+f=-\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)&\iff f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\&\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+u_n=0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1=e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right),\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=a\cdot(-1)^n+b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right).$$

Corrigé 97. ← page 20

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X+\sqrt{5}+1\right)\left(2X-\sqrt{5}+1\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)&=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+f-\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3+2f^2-\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned} f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - (u_n)_{n\geqslant 0} &= (u_{n+3} + 2u_{n+2} - u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= (0)_{n\geqslant 0} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f^2 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f^2 - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f^2 - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -1, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a\cdot(-1)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\cdot(-1)^n + b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\Big)^n + c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 98. ← page 20

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 9$ et $X^2 + 5$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 9$ admet -9 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -9 donne : $86 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 9\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + 9\,f^2 + 5\,f + 45\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+9\,f^2+5\,f+45\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+9\,f^2+5\,f+45\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+9\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+9\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+5 par $X+9$. On a en effet :

$$X^2+5 = (X+9)\,Q+86,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+5\vec{x} = (f+9\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+86\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+9X^2+5X+45 = (X+9)\,(X^2+5)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+9\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+9\,f^2+5\,f+45\mathrm{Id}_E = (f+9\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+5\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+5\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+9\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+9\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{86}f^2\,(\vec{x})+\frac{5}{86}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{86}\,(f+9\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+9\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f+9\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+9\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{86}f^2\,(\vec{x})+\frac{5}{86}\vec{x}\right)\\
&= (f+9\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{86}\,f^2+\frac{5}{86}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{86}\left(f^3+9\,f^2+5\,f+45\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+9\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2+5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{86}\left(f^2+5\mathrm{Id}_E\right)((f+9\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{86}\left(f^3+9\,f^2+5\,f+45\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+9\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+9\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+9\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+9\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+9\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2+5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $86\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f+9\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f+9\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -9\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 5\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -5\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 9\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 81\vec{y} & - & 5\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 81L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{86} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{86}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{86} f^2(\vec{x}) + \frac{81}{86}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{86} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{86}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{86} f^2(\vec{x}) + \frac{81}{86}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 9\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 9\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 9\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{86} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{86}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{86} f^3(\vec{x}) + \frac{5}{86} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{9}{86} f^2(\vec{x}) - \frac{45}{86}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{86}\left(f^3(\vec{x}) + 9f^2(\vec{x}) + 5f(\vec{x}) + 45\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 9\,f^2 + 5\,f = -45\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{86} f^4(\vec{x}) + \frac{38}{43} f^2(\vec{x}) + \frac{405}{86}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -9\,f^2 - 5\,f - 45\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -9\,f^3 - 5\,f^2 - 45\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{86} f^4(\vec{x}) + \frac{38}{43} f^2(\vec{x}) + \frac{405}{86}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{86}f^4(\vec{x})+\frac{38}{43}f^2(\vec{x})+\frac{405}{86}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{86}X^4+\frac{38}{43}X^2+\frac{405}{86}$ par le polynôme annulateur $X^3+9X^2+5X+45$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{86}X^4+\frac{38}{43}X^2+\frac{405}{86}=\left(X^3+9X^2+5X+45\right)\cdot\left(-\frac{1}{86}X+\frac{9}{86}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{86}f^4+\frac{38}{43}f^2+\frac{405}{86}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3+9f^2+5f+45\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{86}f+\frac{9}{86}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)=f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)=f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right)=\left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0}=(u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+9f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+5f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)&=(u_{n+3}+9u_{n+2}+5u_{n+1})_{n\geqslant 0}\\&=(-45u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+9f^2+5f=-45\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+9f^2+5f+45\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+9f^2+5f+45\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+9\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f+9\mathrm{Id}_E)$ et d'une suite dans $\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f+9\mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+9\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-9u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f+9\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -9, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0}=(a\cdot(-9)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\geqslant 0}\in\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)&\Longleftrightarrow f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)+5\,(u_n)_{n\geqslant 0}=(0)_{n\geqslant 0}\\&\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+5u_n=0.\end{aligned}$$

Autrement dit : $\ker(f^2+5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+5=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i\sqrt{5}$ et $r_2=-i\sqrt{5}$

(j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). Or la forme exponentielle de r_1 est : $r_1 = \sqrt{5}e^{\frac{1}{2}i\pi}$. La théorie des suites récurrentes linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les suites vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)5^{\frac{1}{2}n},\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 5\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-9)^n + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)5^{\frac{1}{2}n}.$$

Corrigé 99. ← page 20

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{3, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{5} + 1\right)\left(2X - \sqrt{5} + 1\right)(X - 3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 2f^2 - 4f + 3\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{3, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 2f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 4f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 2u_{n+2} - 4u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-3u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 - 4f = -3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 - 4f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 - 4f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison 3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot 3^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 3^n + b\Big(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\Big)^n + c\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\Big)^n.$$

Corrigé 100. ← page 21

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}, -3\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X + 3\sqrt{3169} - 169\right)\left(2\,X - 3\sqrt{3169} - 169\right)(X+3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 - 169\,f + \\ &= f^3 - 166\,f^2 - 497\,f + 30\mathrm{Id} \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}, -3\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des suites vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a : $f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left((u_{n+1})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+1)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+2})_{n\geqslant 0}$, et :

$$f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = f\left(f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right) = f\left((u_{n+2})_{n\geqslant 0}\right) = \left(u_{(n+2)+1}\right)_{n\geqslant 0} = (u_{n+3})_{n\geqslant 0}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^2$ et $\left(f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$:

$$\begin{aligned}f^3\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 166f^2\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) - 497f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) &= (u_{n+3} - 166u_{n+2} - 497u_{n+1})_{n\geqslant 0} \\ &= (-30u_n)_{n\geqslant 0}\end{aligned}$$

car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 166\,f^2 - 497\,f = -30\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 166\,f^2 - 497\,f + 30\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 166\,f^2 - 497\,f + 30\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute suite de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une suite dans $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on a :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) + 3\,(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n.$$

Autrement dit : $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des suites géométriques de raison -3, c'est-à-dire de la forme $(u_n)_{n\geqslant 0} = (a \cdot (-3)^n)_{n\geqslant 0}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est somme d'un élément de $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot (-3)^n + b\left(\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)^n + c\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3169} + \frac{169}{2}\right)^n.$$