Équations différentielles d'ordre 3 et polynômes d'endomorphismes

💡 On montre comment l'interprétation d'une équation différentielle en termes de noyau de polynômes d'endomorphismes permet d'expliciter des solutions d'une telle équation, en se ramenant à l'explicitation des solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 (où la structure est bien connue).

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 22

$$f^3 + 2\,f^2 - 2\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 2y'' - 2y' - 3y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 23

$$f^3 - 25\,f^2 + f = 25\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 25y'' + y' = 25y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 26

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 29

$$f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' + y' - 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 32

$$f^3 - 213\,f^2 - 5\,f + 1065\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 213\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 213y'' - 5y' + 1065y = 0. \tag{†}$$

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 33

$$f^3 + f^2 + 2\,f = -2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + 2y' = -2y. \tag{†}$$

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 37

$$f^3 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y = 0. \tag{†}$$

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 40

$$f^3 + 2\,f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 2y'' + y' + 2y = 0. \tag{†}$$

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 44

$$f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0. \tag{†}$$

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 44

$$f^3 - 3\,f^2 - 36\,f - 32\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (8)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-1)\,\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' - 36y' - 32y = 0. \tag{†}$$

Exercice 11. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 45

$$f^3 + 5\,f^2 + 2\,f + 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{∗}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 5y'' + 2y' + 10y = 0. \tag{†}$$

Exercice 12. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 49

$$f^3 + 2\,f^2 + f = -2\mathrm{Id}_E. \tag{∗}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 2y'' + y' = -2y. \tag{†}$$

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 52

$$f^3 + f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{∗}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' - 2y' - 2y = 0. \tag{†}$$

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 53

$$f^3 + 2\,f^2 - 3\,f - 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{∗}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 2y'' - 3y' - 6y = 0. \tag{†}$$

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 54

$$f^3 + 149\,f^2 + 436\,f - 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{∗}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\sqrt{5331} - 73\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\sqrt{5331} - 73\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 149y'' + 436y' - 6y = 0. \tag{†}$$

Exercice 16. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 55

$$f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' + 2y' - 2y = 0. \tag{†}$$

Exercice 17. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 58

$$f^3 - 2\,f^2 - 5\,f = -10\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' - 5y' = -10y. \tag{†}$$

Exercice 18. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 59

$$f^3 + f^2 - 2\,f = 2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' - 2y' = 2y. \tag{†}$$

Exercice 19. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 60

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' + y' = y. \tag{†}$$

Exercice 20. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 63

$$f^3 - 4\,f^2 - 11\,f - 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 4y'' - 11y' - 6y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 21. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 67

$$f^3 + 3\,f^2 + 4\,f = -4\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' = -4y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 22. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 71

$$f^3 - 14\,f^2 - f = -14\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 14y'' - y' = -14y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 23. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 71

$$f^3 - f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' - 2y' + 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 24. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 72

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' + y' = y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 25. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 76

$$f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 26. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 77

$$f^3 - 3\,f^2 + 3\,f = 2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' + 3y' = 2y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 27. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 80

$$f^3 + f^2 + 4\,f = -4\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + 4y' = -4y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 28. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 83

$$f^3 - f^2 - 3\,f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2} + 1\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2} + 1\right) \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' - 3y' = y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 29. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 84

$$f^3 + f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y' + 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 30. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 88

$$f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 7y'' + 11y' + 5y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 31. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 91

$$f^3 + f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' - y' + 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 32. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 95

$$f^3 - 3\,f^2 - 11\,f + 33\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{11}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' - 11y' + 33y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 33. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 96

$$f^3 - 2\,f^2 = -\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' = -y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 34. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 97

$$f^3 + 5\,f^2 - f = 5\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 5y'' - y' = 5y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 35. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 98

$$f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + y' = -y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 36. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 101

$$f^3 - 2\,f^2 - 1195\,f = -2390\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' - 1195y' = -2390y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 37. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 102

$$f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' + 10y' - 10y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 38. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 105

$$f^3 - 10\,f^2 + 2\,f + 7\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 10y'' + 2y' + 7y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 39. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 106

$$f^3 + f^2 + 15\,f = -15\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + 15y' = -15y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 40. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 110

$$f^3 + 23\,f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 23y'' + y' + 23y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 41. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 113

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 42. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 116

$$f^3 - 3\,f^2 - 6\,f + 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' - 6y' + 8y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 43. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 117

$$f^3 - 24\,f^2 + 25\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 24y'' + 25y' - 2y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 44. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 118

$$f^3 - 2\,f^2 + 4\,f = 3\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' + 4y' = 3y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 45. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 121

$$f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 4y'' + 4y' - 3y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 46. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 125

$$f^3 - 6\,f^2 + 11\,f = 6\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (2)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 6y'' + 11y' = 6y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 47. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 126

$$f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' - y' - 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 48. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 129

$$f^3 - f^2 + 40\,f = 40\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' + 40y' = 40y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 49. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 133

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 50. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 136

$$f^3 - 32\,f^2 - 32\,f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{1085} + \frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{1085} + \frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 32y'' - 32y' + y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 51. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 137

$$f^3 + 5\,f^2 + 2\,f + 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 5y'' + 2y' + 10y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 52. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 140

$$f^3 - 19\,f = 30\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (5)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 19y' = 30y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 53. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 141

$$f^3 - f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' - 2y' + 2y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 54. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 142

$$f^3 + f^2 - 10\,f + 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-4)\,\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' - 10y' + 8y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 55. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 143

$$f^3 + 11\,f^2 + 7\,f = 3\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 11y'' + 7y' = 3y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 56. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 144

$$f^3 + f^2 + 7\,f = -7\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + 7y' = -7y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 57. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 147

$$f^3 - 3\,f^2 - 3\,f = 4\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' - 3y' = 4y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 58. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 151

$$f^3 + 3\,f^2 - 6\,f = 18\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{6}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 3y'' - 6y' = 18y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 59. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 152

$$f^3 - 3\,f^2 + 50\,f - 150\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' + 50y' - 150y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 60. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 155

$$f^3 - 21\,f^2 + 102\,f - 56\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 21y'' + 102y' - 56y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 61. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 156

$$f^3 - 25\,f^2 + 29\,f = 120\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 25y'' + 29y' = 120y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 62. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 160

$$f^3 + 11\,f^2 - 3\,f - 33\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 11y'' - 3y' - 33y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 63. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 161

$$f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 5y'' + y' - 5y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 64. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 164

$$f^3 + 4\,f^2 - 11\,f = 2\mathrm{Id}_E. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(2\sqrt{2} - 3\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-2\sqrt{2} - 3\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 4y'' - 11y' = 2y. \qquad (\dagger)$$

Exercice 65. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 165

$$f^3 - 2\,f^2 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' + y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 66. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 166

$$f^3 - 13\,f^2 - 7\,f + 228\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 13y'' - 7y' + 228y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 67. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 167

$$f^3 - 7\,f^2 + 11\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 7y'' + 11y' + 4y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 68. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 168

$$f^3 + f^2 - 3\,f + 9\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' - 3y' + 9y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 69. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 171

$$f^3 - 12\,f^2 + 17\,f - 66\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 12y'' + 17y' - 66y = 0. \qquad (\dagger)$$

Exercice 70. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 175

$$f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' - y' + 3y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 71. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 176

$$f^3 + 9\,f^2 - f - 9\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 9y'' - y' - 9y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 72. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 177

$$f^3 - 2\,f^2 - 9\,f + 18\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' - 9y' + 18y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 73. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 177

$$f^3 - 13\,f^2 - 12\,f = -2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{47} + 7\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{47} + 7\right) \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 13y'' - 12y' = -2y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 74. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 178

$$f^3 + 227\,f^2 + 228\,f = -2\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{12767} - 113\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{12767} - 113\right) \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 227y'' + 228y' = -2y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 75. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 179

$$f^3 - 2\,f^2 - 2\,f = -4\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' - 2y' = -4y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 76. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 180

$$f^3 + 4\,f^2 - 2\,f - 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 4y'' - 2y' - 8y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 77. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 181

$$f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + 2y' + 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 78. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 185

$$f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' + y' = y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 79. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 188

$$f^3 - 2\,f^2 - 12\,f = -9\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' - 12y' = -9y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 80. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 189

$$f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + y' = -y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 81. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 192

$$f^3 - 3\,f^2 + f = 3\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' + y' = 3y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 82. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 196

$$f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' + 2y' - 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 83. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 199

$$f^3 - f^2 - 3\,f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' - 3y' = y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 84. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 200

$$f^3 + f^2 + 47\,f + 47\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' + 47y' + 47y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 85. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 203

$$f^3 - 3\,f^2 - 4\,f = -12\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' - 4y' = -12y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 86. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 204

$$f^3 + f^2 - 4\,f = 4\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + y'' - 4y' = 4y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 87. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 205

$$f^3 - 3\,f^2 - 3\,f = -\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{3} + 2\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{3} + 2\right) \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' - 3y' = -y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 88. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 206

$$f^3 - 2\,f^2 - 2\,f = -3\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' - 2y' = -3y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 89. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 207

$$f^3 - 3\,f^2 - 5\,f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5} + 2\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5} + 2\right) \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 3y'' - 5y' = y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 90. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 208

$$f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y'' + 2y' - 4y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 91. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 212

$$f^3 - 2\,f = \mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 2y' = y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 92. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 213

$$f^3 + 5\,f^2 - f = 5\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 5y'' - y' = 5y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 93. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 213

$$f^3 - f^2 - 22\,f + 22\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{22}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' - 22y' + 22y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 94. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 214

$$f^3 - 7\,f^2 - 70\,f + 490\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - 7\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{70}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - 7y'' - 70y' + 490y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 95. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 215

$$f^3 + 56\,f^2 + f = -56\mathrm{Id}_E. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 56\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 56y'' + y' = -56y. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 96. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 219

$$f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 97. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 220

$$f^3 + 3\,f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 3y'' + y' + 3y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 98. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 223

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' + y' - y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 99. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 226

$$f^3 - f^2 - 10\,f - 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} - y'' - 10y' - 8y = 0. \tag{$\dagger$}$$

Exercice 100. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E qui vérifie : → page 227

$$f^3 + 20\,f^2 - 45\,f - 22\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}. \qquad (*)$$

1. Montrer qu'on a : $E = \ker(f + 22\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E\right)$.
2. En appliquant la question précédente à l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ (défini sur un espace que vous préciserez), donner la forme explicite des applications y de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y^{(3)} + 20y'' - 45y' - 22y = 0. \qquad (\dagger)$$

Corrigé 1. ← page 1

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{13}+1\right)\left(2\,X-\sqrt{13}+1\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+f-3\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+2\,f^2-2\,f-3\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3(y)+2f^2(y)-2f(y)-3y = y^{(3)}+2y''-2y'-3y = 0$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+2\,f^2-2\,f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+2\,f^2-2\,f-3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+2\,f^2-2\,f-3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :
$$y \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f(y)+y = 0 \iff y' = -y.$$
Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x}+ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}+1\right)\right)}+be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}-1\right)\right)}.$$

Corrigé 2. ← page 1

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-25$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-25$ admet 25 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 25 donne : $626 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :
$$\begin{aligned}\ker(f-25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-25\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-25\,f^2+f-25\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$
   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-25\,f^2+f-25\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-25\,f^2+f-25\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-25\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-25\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-25$. On a en effet :
$$X^2+1 = (X-25)\,Q+626,$$
   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :
$$f^2(\vec{x})+\vec{x} = (f-25\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+626\vec{x}. \tag{†}$$
   Remarquons également que l'on a : $X^3-25X^2+X-25 = (X-25)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-25\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:
$$f^3-25\,f^2+f-25\mathrm{Id}_E = (f-25\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-25\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$
   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-25\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :
$$\vec{y} = \frac{1}{626}f^2(\vec{x})+\frac{1}{626}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{626}(f-25\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$
   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-25\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :
$$\begin{aligned}(f-25\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-25\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{626}f^2(\vec{x})+\frac{1}{626}\vec{x}\right)\\ &= (f-25\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{626}\,f^2+\frac{1}{626}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{626}\Big(f^3-25\,f^2+f-25\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$
   donc : $\vec{y} \in \ker(f-25\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :
$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{626}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)((f-25\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{626}\Big(f^3-25\,f^2+f-25\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 25\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $626\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 25\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 25\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 625\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 625L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{626} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{626}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{626} f^2(\vec{x}) + \frac{625}{626}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{626} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{626}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{626} f^2(\vec{x}) + \frac{625}{626}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 25\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 25\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 25\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{626} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{626}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{626} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{626} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{25}{626} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{626}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{626}\left(f^3(\vec{x}) - 25 f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 25\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 25 f^2 + f = 25\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{626} f^4(\vec{x}) + \frac{312}{313} f^2(\vec{x}) + \frac{625}{626}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 25\,f^2 - f + 25\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 25\,f^3 - f^2 + 25\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{626}f^4\left(\vec{x}\right) + \frac{312}{313}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{625}{626}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{626}f^4\left(\vec{x}\right) + \frac{312}{313}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{625}{626}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{626}X^4 + \frac{312}{313}X^2 + \frac{625}{626}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 25X^2 + X - 25$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{626}X^4 + \frac{312}{313}X^2 + \frac{625}{626} = \left(X^3 - 25X^2 + X - 25\right) \cdot \left(-\frac{1}{626}X - \frac{25}{626}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{626}\,f^4 + \frac{312}{313}\,f^2 + \frac{625}{626}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 25\,f^2 + f - 25\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{626}\,f - \frac{25}{626}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\left(y\right) = f\left(y'\right) = \left(y'\right)' = y''$, et :

$$f^3\left(y\right) = f\left(f^2\left(y\right)\right) = f\left(y''\right) = \left(y''\right)' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left(y\right)\right)^2$ et $\left(f\left(y\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3\left(y\right) - 25f^2\left(y\right) + f\left(y\right) = y^{(3)} - 25y'' + y' = 25y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 25\,f^2 + f = 25\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 25\,f^2 + f - 25\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 25\,f^2 + f - 25\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \iff f\left(y\right) - 25y = 0 \iff y' = 25y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 25y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{25\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2\left(y\right) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$.

Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x)\,, \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 25\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 25\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{25\,x} + b\cos(x) + c\sin(x)\,.$$

Corrigé 3. ← page 1

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + \mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & \vec{z} &\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2} f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + f(y) + y = y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + b\cos(x) + c\sin(x).$$

Corrigé 4. ← page 1

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 2$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 2$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 2)\,Q + 5,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 5\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X-2)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{5}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\
&= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{5} f^2 + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{2}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 2\,f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2\,f^3 - f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5}f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \left(X^3 - 2X^2 + X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X - \frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{5}\,f^4 + \frac{3}{5}\,f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\,f - \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 2f^2(y) + f(y) - 2y = y^{(3)} - 2y'' + y' - 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f(y) - 2y = 0 \Longleftrightarrow y' = 2y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f^2(y) + y = 0 \Longleftrightarrow y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = ae^{2x} + b\cos(x) + c\sin(x).$$

Corrigé 5. ← page 1

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{5}, 213, -\sqrt{5}\right\}$. D'après le

critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{5}\right)\left(X-\sqrt{5}\right)(X-213)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-213\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{5}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{5}\mathrm{Id}_E\right) &= (f-213\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-5\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-213\,f^2-5\,f+1065\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{5},213,-\sqrt{5}\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-213\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\left(y\right)=f\left(y'\right)=\left(y'\right)'=y''$, et :

$$f^3\left(y\right)=f\left(f^2\left(y\right)\right)=f\left(y''\right)=\left(y''\right)'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left(y\right)\right)^2$ et $\left(f\left(y\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3\left(y\right)-213f^2\left(y\right)-5f\left(y\right)+1065y=y^{(3)}-213y''-5y'+1065y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-213\,f^2-5\,f+1065\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-213\,f^2-5\,f+1065\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-213\,f^2-5\,f+1065\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-213\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-213\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-213\mathrm{Id}_E)\iff f\left(y\right)-213y=0\iff y'=213y.$$

Autrement dit : $\ker(f-213\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=213y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{213\,x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y\in E=\ker(f-213\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-213\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{213\,x}+be^{\left(\sqrt{5}x\right)}+ce^{\left(-\sqrt{5}x\right)}.$$

Corrigé 6. ← page 2

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$

admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+2 = (X+1)\,Q+3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+2\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+3\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+2X+2 = (X+1)\,(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{3}\,(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}\right)\\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{3}\,f^2+\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\,((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+2\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcrcl}\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+2L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+2\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x})+\frac{2}{3}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})-\frac{2}{3}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x})+f^2(\vec{x})+2f(\vec{x})+2\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f^2+2\,f=-2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f^2-2\,f-2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^3-2\,f^2-2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 2X + 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 + X^2 + 2X + 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}f^4 - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + 2f(y) = y^{(3)} + y'' + 2y' = -2y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + 2f = -2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2+2f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + 2y = 0 \iff y'' + 2y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{2}$ et $r_2 = -i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La

théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Corrigé 7. ← page 2

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + X + 1 = (X-1)\,Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 1 = (X-1)\left(X^2 + X + 1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3}f^2 + \frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & - \; f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{2}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{1}{3}X + \frac{2}{3} = \left(X^3 - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3} f^4 - \frac{2}{3} f^3 + \frac{1}{3} f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3} f - \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - y = y^{(3)} - y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + f(y) + y = 0 \iff y'' + y' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)},\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 8. ← page 2

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 2$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 2$ admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + 2f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+2\,f^2+f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+2\,f^2+f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 2$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 2)\,Q + 5,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 5\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 2X^2 + X + 2 = (X + 2)\,(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 2\,f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{5}\,(f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\
&= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{5}\,f^2 + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3 + 2\,f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\,((f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\Big(f^3 + 2\,f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{2}{5} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) + 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2\, f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -2\, f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\, f^3 - f^2 - 2\, f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur

X^3+2X^2+X+2, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4+\frac{3}{5}X^2+\frac{4}{5}=\left(X^3+2X^2+X+2\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}X+\frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{5}f^4+\frac{3}{5}f^2+\frac{4}{5}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3+2f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{5}f+\frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)+2f^2(y)+f(y)+2y=y^{(3)}+2y''+y'+2y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+2f^2+f+2\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+2f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+2f^2+f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\iff f(y)+2y=0\iff y'=-2y.$$

Autrement dit : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-2y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-2x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)+y=0\iff y''+y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y:x\mapsto b\cos(x)+c\sin(x)\,,\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y\in E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-2x}+b\cos(x)+c\sin(x)\,.$$

Corrigé 9. ← page 2

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, -1, -2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X + 2)(X + 1)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 2\, f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, -1, -2\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 2f^2(y) - f(y) - 2y = y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\, f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\, f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\, f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 2y = 0 \iff y' = -2y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto a e^{-2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = a e^{-2\,x} + c e^{(-x)} + b e^{x}.$$

Corrigé 10. ← page 2

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{8, -4, -1\}$. D'après le critère polynomial de

diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+4)(X+1)(X-8)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+4\mathrm{Id}_E)\circ(f-(8)\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-(-1)\,\mathrm{Id}_E) &= (f+4\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-7\,f-8\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-3\,f^2-36\,f-32\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{8,-4,-1\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-(8)\,\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-(-1)\,\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y)=f\,(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3\,(y)=f\left(f^2\,(y)\right)=f\,(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f\,(y))^2$ et $(f\,(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3\,(y)-3f^2\,(y)-36f\,(y)-32y=y^{(3)}-3y''-36y'-32y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-3\,f^2-36\,f-32\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-3\,f^2-36\,f-32\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-3\,f^2-36\,f-32\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-(8)\,\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-(-1)\,\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-(8)\,\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-(-1)\,\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\iff f\,(y)+4y=0\iff y'=-4y.$$

Autrement dit : $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-4y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-4\,x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-(8)\,\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-(-1)\,\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y\in E=\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-(8)\,\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-(-1)\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-(8)\,\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-(-1)\,\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-4\,x}+be^{(8\,x)}+ce^{(-x)}.$$

Corrigé 11. ← page 3

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+5$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+5$

admet -5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -5 donne : $27 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+5\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+5$. On a en effet :

$$X^2+2 = (X+5)\,Q+27,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+2\vec{x} = (f+5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+27\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+5X^2+2X+10 = (X+5)\,(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E = (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+5\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{27}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{27}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{27}\,(f+5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f+5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{27}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{27}\vec{x}\right)\\ &= (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{27}\,f^2+\frac{2}{27}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{27}\Big(f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{27}\Big(f^2+2\mathrm{Id}_E\Big)\,((f+5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{27}\Big(f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+5\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $27\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-5\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+2\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc}\vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & 5\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & 25\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+2L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-25L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{27}f^2(\vec{x})+\frac{2}{27}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=-\frac{1}{27}f^2(\vec{x})+\frac{25}{27}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{27}f^2(\vec{x})+\frac{2}{27}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{27}f^2(\vec{x})+\frac{25}{27}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+5\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+2\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+5\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f+5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{27}f^2(\vec{x})+\frac{2}{27}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{27}f^3(\vec{x})+\frac{2}{27}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{5}{27}f^2(\vec{x})-\frac{10}{27}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{27}\left(f^3(\vec{x})+5f^2(\vec{x})+2f(\vec{x})+10\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+5f^2+2f+10\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{27}f^4(\vec{x})+\frac{23}{27}f^2(\vec{x})+\frac{50}{27}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-5f^2-2f-10\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-5f^3-2f^2-10f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{27}f^4(\vec{x})+\frac{23}{27}f^2(\vec{x})+\frac{50}{27}\vec{x}=\vec{0}$, donc

$\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{27}f^4(\vec{x})+\frac{23}{27}f^2(\vec{x})+\frac{50}{27}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{27}X^4 + \frac{23}{27}X^2 + \frac{50}{27}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 5X^2 + 2X + 10$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{27}X^4 + \frac{23}{27}X^2 + \frac{50}{27} = \left(X^3 + 5X^2 + 2X + 10\right) \cdot \left(-\frac{1}{27}X + \frac{5}{27}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{27}f^4 + \frac{23}{27}f^2 + \frac{50}{27}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 5f^2 + 2f + 10\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{27}f + \frac{5}{27}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 5f^2(y) + 2f(y) + 10y = y^{(3)} + 5y'' + 2y' + 10y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 5f^2 + 2f + 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 5f^2 + 2f + 10\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 5f^2 + 2f + 10\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 5y = 0 \iff y' = -5y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -5y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-5x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + 2y = 0 \iff y'' + 2y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{2}$ et $r_2 = -i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La

théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-5\,x} + b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Corrigé 12. ← page 3

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+2$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+2$ admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f+2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3+2\,f^2+f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+2\,f^2+f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+2\,f^2+f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+2$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X+2)\,Q+5,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = (f+2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 5\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+2X^2+X+2 = (X+2)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+2\,f^2+f+2\mathrm{Id}_E = (f+2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2+\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+\mathrm{Id}_E\right) \circ (f+2\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{5}\left(f+2\mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right)\\ &= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{5}f^2 + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + 2f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + 2f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vec{x} &=& \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) + f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \vec{x} &=& \vec{y} + \vec{z} \\ f(\vec{x}) &=& -2\vec{y} + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &=& 4\vec{y} - \vec{z} \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{5} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{5} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{2}{5} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{5}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) + 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 2\,f^2 + f = -2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -2\,f^3 - f^2 - 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) + \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 2X^2 + X + 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 + \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \left(X^3 + 2X^2 + X + 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X + \frac{2}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{5}\,f^4 + \frac{3}{5}\,f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 2\,f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\,f + \frac{2}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 2f^2(y) + f(y) = y^{(3)} + 2y'' + y' = -2y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f^2 + f = -2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f\,(y) + 2y = 0 \iff y' = -2y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2\,(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\,(x) + c\sin\,(x)\,, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-2\,x} + b\cos\,(x) + c\sin\,(x)\,.$$

Corrigé 13. ← page 3

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\right)(X + 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3\,(y) = f\left(f^2\,(y)\right) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) - 2f(y) - 2y = y^{(3)} + y'' - 2y' - 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2-2f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+f^2-2f-2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2-2f-2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{2}x\right)}.$$

Corrigé 14. ← page 3

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{3}\right)\left(X - \sqrt{3}\right)(X + 2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 3\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 2f^2 - 3f - 6\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 2f^2(y) - 3f(y) - 6y = y^{(3)} + 2y'' - 3y' - 6y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f^2 - 3\,f - 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f^2 - 3\,f - 6\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f^2 - 3\,f - 6\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f\,(y) + 2y = 0 \iff y' = -2y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-2\,x} + be^{\left(\sqrt{3}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{3}x\right)}.$$

Corrigé 15. ← page 3

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-3, -\sqrt{5331} - 73, \sqrt{5331} - 73\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{5331} + 73\right)\left(X - \sqrt{5331} + 73\right)(X + 3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{5331} - 73\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{5331} - 73\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 146\,f - 2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 149\,f^2 + 436\,f - 6\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-3, -\sqrt{5331} - 73, \sqrt{5331} - 73\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5331} - 73\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5331} - 73\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3\,(y) = f\left(f^2\,(y)\right) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f\,(y))^2$ et $(f\,(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3\,(y) + 149f^2\,(y) + 436f\,(y) - 6y = y^{(3)} + 149y'' + 436y' - 6y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 149\,f^2 + 436\,f - 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 +$

$149\,f^2+436\,f-6\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+149\,f^2+436\,f-6\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+3\mathrm{Id}_E)\iff f\,(y)+3y=0\iff y'=-3y.$$

Autrement dit : $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-3y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-3\,x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $y\in E=\ker(f+3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\sqrt{5331}-73\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-3\,x}+ce^{\left(-x\left(\sqrt{5331}+73\right)\right)}+be^{\left(x\left(\sqrt{5331}-73\right)\right)}.$$

Corrigé 16. ← page 4

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)&=\ker\left((f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)\right)\\&=\ker(f^3-f^2+2\,f-2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+2\,f-2\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+2\,f-2\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+2=(X-1)\,Q+3,$$

   avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+2\vec{x}=(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+3\vec{x}.\tag{†}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+2X-2=(X-1)\,(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+2\,f-2\mathrm{Id}_E=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,.\tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \quad f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 2\,f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 2X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 - X^2 + 2X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\,f^4 - \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\,f - \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) + 2f(y) - 2y = y^{(3)} - y'' + 2y' - 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + 2y = 0 \iff y'' + 2y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{2}$ et $r_2 = -i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Corrigé 17. ← page 4

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{2, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{5}\right)\left(X - \sqrt{5}\right)(X - 2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 5\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 2f^2 - 5f + 10\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{2, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 2f^2(y) - 5f(y) = y^{(3)} - 2y'' - 5y' = -10y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 - 5f = -10\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 - 5f + 10\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 - 5f + 10\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 2y = 0 \iff y' = 2y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{5}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{2x} + be^{\left(\sqrt{5}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{5}x\right)}.$$

Corrigé 18. ← page 4

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\right)(X + 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + f^2 - 2f - 2\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera

plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) - 2f(y) = y^{(3)} + y'' - 2y' = 2y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 - 2\,f = 2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{2}x\right)}.$$

Corrigé 19. ← page 4

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X - 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2} f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) + f(y) = y^{(3)} - y'' + y' = y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + b\cos(x) + c\sin(x).$$

Corrigé 20. ← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-6$ et X^2+2X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-6$ admet 6 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 6 donne : $49 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-6\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-4\,f^2-11\,f-6\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-4\,f^2-11\,f-6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-4\,f^2-11\,f-6\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-6\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-6\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2X+1 par $X-6$. On a en effet :

$$X^2+2X+1 = (X-6)\,Q+49,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+2f\,(\vec{x})+\vec{x} = (f-6\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+49\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-4X^2-11X-6 = (X-6)\,(X^2+2X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-6\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-4\,f^2-11\,f-6\mathrm{Id}_E = (f-6\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-6\mathrm{Id}_E)\,. \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-6\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{49}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{49}f\,(\vec{x})+\frac{1}{49}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{49}\,(f-6\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-6\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-6\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-6\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{49}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{49}f\,(\vec{x})+\frac{1}{49}\vec{x}\right)\\ &= (f-6\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{49}\,f^2+\frac{2}{49}\,f+\frac{1}{49}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{49}\Big(f^3-4\,f^2-11\,f-6\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-6\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{49}\Big(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E\Big)\,((f-6\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{49}\Big(f^3-4\,f^2-11\,f-6\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 6\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $49\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 6\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\,(\vec{z}) + 2f\,(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\,(\vec{z}) = -2f\,(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 6\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 36\vec{y} & - & \vec{z} & - & 2f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 6\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2\,(\vec{x}) + 2f\,(\vec{x}) & = & 48\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 48L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{49}f^2\,(\vec{x}) + \frac{2}{49}f\,(\vec{x}) + \frac{1}{49}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{49}f^2\,(\vec{x}) - \frac{2}{49}f\,(\vec{x}) + \frac{48}{49}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{49}f^2\,(\vec{x}) + \frac{2}{49}f\,(\vec{x}) + \frac{1}{49}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{49}f^2\,(\vec{x}) - \frac{2}{49}f\,(\vec{x}) + \frac{48}{49}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 6\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - 6\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 6\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{49}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{49}f(\vec{x}) + \frac{1}{49}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{49}f^3(\vec{x}) + \frac{2}{49}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{49}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{6}{49}f^2(\vec{x}) + \frac{12}{49}f(\vec{x}) + \frac{6}{49}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{49}\left(f^3(\vec{x}) - 4f^2(\vec{x}) - 11f(\vec{x}) - 6\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 4f^2 - 11f - 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{49}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{49}f^3(\vec{x}) + \frac{43}{49}f^2(\vec{x}) + \frac{94}{49}f(\vec{x}) + \frac{48}{49}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 4f^2 + 11f + 6\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 4f^3 + 11f^2 + 6f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{49}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{49}f^3(\vec{x}) + \frac{43}{49}f^2(\vec{x}) + \frac{94}{49}f(\vec{x}) + \frac{48}{49}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{49}f^4(\vec{x}) - \frac{4}{49}f^3(\vec{x}) + \frac{43}{49}f^2(\vec{x}) + \frac{94}{49}f(\vec{x}) + \frac{48}{49}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{49}X^4 - \frac{4}{49}X^3 + \frac{43}{49}X^2 + \frac{94}{49}X + \frac{48}{49}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 4X^2 - 11X - 6$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{49}X^4 - \frac{4}{49}X^3 + \frac{43}{49}X^2 + \frac{94}{49}X + \frac{48}{49} = \left(X^3 - 4X^2 - 11X - 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{49}X - \frac{8}{49}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{49}f^4 - \frac{4}{49}f^3 + \frac{43}{49}f^2 + \frac{94}{49}f + \frac{48}{49}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 4f^2 - 11f - 6\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{49}f - \frac{8}{49}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 4f^2(y) - 11f(y) - 6y = y^{(3)} - 4y'' - 11y' - 6y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 4f^2 - 11f - 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 4f^2 - 11f - 6\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 4f^2 - 11f - 6\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\,(y) - 6y = 0 \Longleftrightarrow y' = 6y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 6y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{6\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f^2\,(y) + 2f\,(y) + y = 0 \Longleftrightarrow y'' + 2y' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 2\,r + 1 = 0$. Identité remarquable oblige, on reconnaît là : $(r+1)^2 = 0$, et on en déduit que l'équation caractéristique admet pour unique solution : $r = -1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto (bx + c)e^{(-x)}, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 6\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{6\,x} + (bx + c)e^{(-x)}.$$

Corrigé 21. ← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+2$ et X^2+X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+2$ admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $4 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned} \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 3\,f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 3\,f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 3\,f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 2$ par $X + 2$. On a en effet :

$$X^2 + X + 2 = (X + 2)\,Q + 4,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + f\,(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 4\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+3X^2+4X+4 = (X+2)(X^2+X+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+3f^2+4f+4\mathrm{Id}_E = (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+2\mathrm{Id}_E). \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\frac{1}{4}f(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{4}(f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\frac{1}{4}f(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{4}f^2+\frac{1}{4}f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3+3f^2+4f+4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{4}\left(f^2+f+2\mathrm{Id}_E\right)((f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\left(f^3+3f^2+4f+4\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-2\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrrrr} \vec{x} & = & \vec{y} & + \ \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 2\vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & -\ 2\vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrrrr} \vec{x} & = & \vec{y} & + \ \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ 2\vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & -\ 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x}) + 3f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) + 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 3\,f^2 + 4\,f = -4\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x},$$

et comme : $f^3 = -3\,f^2 - 4\,f - 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -3\,f^3 - 4\,f^2 - 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{2}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + 1$ par le polynôme annulateur $X^3 + 3X^2 + 4X + 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + 1 = \left(X^3 + 3X^2 + 4X + 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{4}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$-\frac{1}{4}f^4-\frac{1}{2}f^3-\frac{1}{4}f^2+\mathrm{Id}_E=\Big(f^3+3f^2+4f+4\mathrm{Id}_E\Big)\circ\Big(-\frac{1}{4}f+\frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\Big)$$
$$=0_{\mathrm{L}(E)}.$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)+3f^2(y)+4f(y)=y^{(3)}+3y''+4y'=-4y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+3f^2+4f=-4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+3f^2+4f+4\mathrm{Id}_E)$), or $f^3+3f^2+4f+4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\iff f(y)+2y=0\iff y'=-2y.$$

Autrement dit : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-2y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-2x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)+f(y)+2y=0\iff y''+y'+2y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+r+2=0$. Son discriminant est : $\Delta=-7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1=\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2=\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y:x\mapsto\left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)},\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y\in E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+f+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-2x}+\left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 22. ← page 5

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, -1, 14\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+1)(X-1)(X-14)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 14\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f - 14\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 14\, f^2 - f + 14\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, -1, 14\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 14 f^2(y) - f(y) = y^{(3)} - 14y'' - y' = -14y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 14\, f^2 - f = -14\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 14\, f^2 - f + 14\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 14\, f^2 - f + 14\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 14y = 0 \iff y' = 14y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 14y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{14\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{14\,x} + ce^{(-x)} + be^{x}.$$

Corrigé 23. ← page 5

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\right\}$. D'après le

critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2},1\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\left(y\right)=f\left(y'\right)=\left(y'\right)'=y''$, et :

$$f^3\left(y\right)=f\left(f^2\left(y\right)\right)=f\left(y''\right)=\left(y''\right)'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left(y\right)\right)^2$ et $\left(f\left(y\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3\left(y\right)-f^2\left(y\right)-2f\left(y\right)+2y=y^{(3)}-y''-2y'+2y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\left(y\right)-y=0\iff y'=y.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^x$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y\in E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^x+be^{\left(\sqrt{2}x\right)}+ce^{\left(-\sqrt{2}x\right)}.$$

Corrigé 24. ← page 5

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$

admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X-1)\,Q+2,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+\vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+X-1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\Big(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E\Big)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) + f(y) = y^{(3)} - y'' + y' = y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x)\,, \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + b\cos(x) + c\sin(x)\,.$$

Corrigé 25. ← page 6

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1,-1,-2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+2)(X+1)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1,-1,-2\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3(y) + 2f^2(y) - f(y) - 2y = y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :
$$y \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 2y = 0 \iff y' = -2y.$$
Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-2\,x} + ce^{(-x)} + be^{x}.$$

Corrigé 26. ← page 6

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-2$ et X^2-X+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3 - 3\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 3\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+3\,f-2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 1$ par $X-2$. On a en effet :

$$X^2 - X + 1 = (X-2)\,Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 3X^2 + 3X - 2 = (X-2)\,(X^2 - X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 3\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E = (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-2\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{3}f\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}\,(f-2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{3}f\,(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{3}\,f^2 - \frac{1}{3}\,f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3 - 3\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - 3\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$

d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x})-\frac{1}{3}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{2}{3}f^2(\vec{x})-\frac{2}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x})-3f^2(\vec{x})+3f(\vec{x})-2\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-3\,f^2+3\,f=2\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})+\frac{2}{3}f^3(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3=3\,f^2-3\,f+2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=3\,f^3-3\,f^2+2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})+\frac{2}{3}f^3(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x})+\frac{2}{3}f^3(\vec{x})-\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4+\frac{2}{3}X^3-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur X^3-3X^2+3X-2, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4+\frac{2}{3}X^3-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}=\left(X^3-3X^2+3X-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}\,f^4+\frac{2}{3}\,f^3-\frac{1}{3}\,f+\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-3\,f^2+3\,f-2\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{3}\,f-\frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-3f^2(y)+3f(y)=y^{(3)}-3y''+3y'=2y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-3\,f^2+3\,f=2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-3\,f^2+3\,f-2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 + 3\,f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\,(y) - 2y = 0 \Longleftrightarrow y' = 2y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f^2\,(y) - f\,(y) + y = 0 \Longleftrightarrow y'' - y' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}\,x\right)},\ \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{2\,x} + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}\,x\right)}.$$

Corrigé 27. ← page 6

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 4$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $5 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right)\Big)\\ &= \ker(f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 4$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 4 = (X + 1)\,Q + 5,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 4\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 5\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + 4X + 4 = (X+1)(X^2+4)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{5}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{5} f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{5}\left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{5}\left(f^3 + f^2 + 4f + 4\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $5\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 4\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -4\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 4\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{5}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5} f^3(\vec{x}) + \frac{4}{5} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{5} f^2(\vec{x}) - \frac{4}{5}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) + 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 4\,f = -4\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) - \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 4\,f - 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 4\,f^2 - 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) - \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{5} f^4(\vec{x}) - \frac{3}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{4}{5}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{5}X^4 - \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 4X + 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{5}X^4 - \frac{3}{5}X^2 + \frac{4}{5} = \left(X^3 + X^2 + 4X + 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}X + \frac{1}{5}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5} f^4 - \frac{3}{5} f^2 + \frac{4}{5}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{5} f + \frac{1}{5}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + 4f(y) = y^{(3)} + y'' + 4y' = -4y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + 4\,f = -4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + 4\,f + 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + 4y = 0 \iff y'' + 4y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 4 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(2\,x) + c\sin(2\,x)\,, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 4\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + b\cos(2\,x) + c\sin(2\,x)\,.$$

Corrigé 28. ← page 6

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}+1, -1\right\}$. D'après le

critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}-1\right)\left(X-\sqrt{2}-1\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\,f-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-f^2-3\,f-\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2}+1,-\sqrt{2}+1,-1\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y)=f\,(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3\,(y)=f\left(f^2\,(y)\right)=f\,(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f\,(y))^2$ et $(f\,(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3\,(y)-f^2\,(y)-3f\,(y)=y^{(3)}-y''-3y'=y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2-3\,f=\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-f^2-3\,f-\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2-3\,f-\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f\,(y)+y=0\iff y'=-y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $y\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-x}+be^{\left(x\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}+ce^{\left(-x\left(\sqrt{2}-1\right)\right)}.$$

Corrigé 29. ← page 6

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2-X+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $4 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\big)\Big) \\ &= \ker(f^3+f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+2 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2-X+2 = (X+1)\,Q+4,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 4\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X+2 = (X+1)(X^2-X+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f+2\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{4}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{4}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\big(f^3+f+2\mathrm{Id}_E\big)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\big)(\vec{z}) &= \frac{1}{4}\big(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\big)\big((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\big) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{4}\big(f^3+f+2\mathrm{Id}_E\big)\big(Q(f)(\vec{x})\big) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $4\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{4}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{4}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{4}f(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f^3(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2-f+2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}f^3(\vec{x})-\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f-2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^2-2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}f^3(\vec{x})-\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{4}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}f^3(\vec{x})-\frac{1}{4}f^2(\vec{x})+\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{4}X^4+\frac{1}{2}X^3-\frac{1}{4}X^2+1$ par le polynôme annulateur X^3+X+2, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{4}X^4+\frac{1}{2}X^3-\frac{1}{4}X^2+1=\left(X^3+X+2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}X+\frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\,f^4+\frac{1}{2}\,f^3-\frac{1}{4}\,f^2+\mathrm{Id}_E &= \left(f^3+f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{4}\,f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)+f(y)+2y=y^{(3)}+y'+2y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f+2\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f(y)+y=0\iff y'=-y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2-f+2\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)-f(y)+2y=0\iff y''-y'+2y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - r + 2 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -7$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 30. ← page 7

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 5$ et $X^2 + 2X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 5$ admet -5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -5 donne : $16 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\big)\Big)\\ &= \ker(f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2X + 1$ par $X + 5$. On a en effet :

$$X^2 + 2X + 1 = (X + 5)\,Q + 16,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 2f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 16\vec{x}. \tag{†}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 + 7X^2 + 11X + 5 = (X + 5)\,(X^2 + 2X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E = (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \big(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\big) \circ (f + 5\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{16} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{8} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{16}\,(f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{16} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{8} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}\right) \\
&= (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{16}\,f^2 + \frac{1}{8}\,f + \frac{1}{16}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{16}\left(f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{16}\left(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{16}\left(f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2+2\,f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $16\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\,(\vec{z}) + 2f\,(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\,(\vec{z}) = -2f\,(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc}
\vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) & = & - & 5\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & & 25\vec{y} & - & \vec{z} & - & 2f(\vec{z})
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & 5\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) & = & & 15\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 15L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{16}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{16}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{16}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{16}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{16}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}f(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{16}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{16}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{5}{16}f^2(\vec{x}) - \frac{5}{8}f(\vec{x}) - \frac{5}{16}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(f^3(\vec{x}) + 7f^2(\vec{x}) + 11f(\vec{x}) + 5\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{16}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{5}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{7}{4}f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -7\,f^2 - 11\,f - 5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -7\,f^3 - 11\,f^2 - 5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{16}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{5}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{7}{4}f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{16}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{4}f^3(\vec{x}) + \frac{5}{8}f^2(\vec{x}) + \frac{7}{4}f(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{16}X^4 - \frac{1}{4}X^3 + \frac{5}{8}X^2 + \frac{7}{4}X + \frac{15}{16}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 7X^2 + 11X + 5$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{16}X^4 - \frac{1}{4}X^3 + \frac{5}{8}X^2 + \frac{7}{4}X + \frac{15}{16} = \left(X^3 + 7X^2 + 11X + 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{16}X + \frac{3}{16}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16}\,f^4 - \frac{1}{4}\,f^3 + \frac{5}{8}\,f^2 + \frac{7}{4}\,f + \frac{15}{16}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{16}\,f + \frac{3}{16}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3(y) + 7f^2(y) + 11f(y) + 5y = y^{(3)} + 7y'' + 11y' + 5y = 0$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 7\,f^2 + 11\,f + 5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :
$$y \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f(y) + 5y = 0 \Longleftrightarrow y' = -5y.$$
Autrement dit : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -5y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-5\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :
$$y \in \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f^2(y) + 2f(y) + y = 0 \Longleftrightarrow y'' + 2y' + y = 0.$$
Autrement dit : $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 2\,r + 1 = 0$. Identité remarquable oblige, on reconnaît là : $(r+1)^2 = 0$, et on en déduit que l'équation caractéristique admet pour unique solution : $r = -1$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :
$$y : x \mapsto (bx + c)e^{(-x)}, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\,f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-5\,x} + (bx + c)e^{(-x)}.$$

Corrigé 31. ← page 7

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 2$ et $X^2 - X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 2$

admet -2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -2 donne : $7 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+1 par $X+2$. On a en effet :

$$X^2-X+1 = (X+2)\,Q+7,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = (f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 7\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2-X+2 = (X+2)\left(X^2-X+1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E = (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+2\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{7}f^2\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{7}f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{7}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{7}\left(f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f+2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2\left(\vec{x}\right) - \frac{1}{7}f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{7}\vec{x}\right)\\ &= (f+2\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{7}f^2 - \frac{1}{7}f + \frac{1}{7}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{7}\Big(f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{z}\right) &= \frac{1}{7}\Big(f^2-f+\mathrm{Id}_E\Big)\left((f+2\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{7}\Big(f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E\Big)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $7\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-2\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})-f(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=f(\vec{z})-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x}&=&\vec{y}&+\vec{z}\\ f(\vec{x})&=&f(\vec{y})&+f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&f^2(\vec{y})&+f^2(\vec{z})\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccrcccc}\vec{x}&=&\vec{y}&+&\vec{z}&&\\ f(\vec{x})&=&-\,2\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})&=&4\vec{y}&-&\vec{z}&+&f(\vec{z})\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3\leftarrow L_3-L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcccc}\vec{x}&=&\vec{y}&+&\vec{z}&&\\ f(\vec{x})&=&-\,2\vec{y}&&&+&f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x})-f(\vec{x})&=&6\vec{y}&-&\vec{z}&&\end{array}\right..$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-6L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{7}f^2(\vec{x})-\frac{1}{7}f(\vec{x})+\frac{1}{7}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=-\frac{1}{7}f^2(\vec{x})+\frac{1}{7}f(\vec{x})+\frac{6}{7}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{7}f^2(\vec{x})-\frac{1}{7}f(\vec{x})+\frac{1}{7}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{7}f^2(\vec{x})+\frac{1}{7}f(\vec{x})+\frac{6}{7}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id}_E)(\vec{y})&=(f+2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2(\vec{x})-\frac{1}{7}f(\vec{x})+\frac{1}{7}\vec{x}\right)\\&=\left(\frac{1}{7}f^3(\vec{x})-\frac{1}{7}f^2(\vec{x})+\frac{1}{7}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{2}{7}f^2(\vec{x})+\frac{2}{7}f(\vec{x})-\frac{2}{7}\vec{x}\right)\\&=\frac{1}{7}\left(f^3(\vec{x})+f^2(\vec{x})-f(\vec{x})+2\vec{x}\right)\\&=\vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{7}f^4(\vec{x})+\frac{2}{7}f^3(\vec{x})+\frac{4}{7}f^2(\vec{x})-\frac{5}{7}f(\vec{x})+\frac{6}{7}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f^2+f-2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^3+f^2-2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x})+\frac{2}{7}f^3(\vec{x})+\frac{4}{7}f^2(\vec{x})-\frac{5}{7}f(\vec{x})+\frac{6}{7}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x})+\frac{2}{7}f^3(\vec{x})+\frac{4}{7}f^2(\vec{x})-\frac{5}{7}f(\vec{x})+\frac{6}{7}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{7}X^4+\frac{2}{7}X^3+\frac{4}{7}X^2-\frac{5}{7}X+\frac{6}{7}$ par le polynôme annulateur X^3+X^2-X+2, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{7}X^4+\frac{2}{7}X^3+\frac{4}{7}X^2-\frac{5}{7}X+\frac{6}{7}=\left(X^3+X^2-X+2\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}X+\frac{3}{7}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{7}\,f^4+\frac{2}{7}\,f^3+\frac{4}{7}\,f^2-\frac{5}{7}\,f+\frac{6}{7}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{7}\,f+\frac{3}{7}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)+f^2(y)-f(y)+2y=y^{(3)}+y''-y'+2y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2-f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\iff f(y)+2y=0\iff y'=-2y.$$

Autrement dit : $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-2y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-2\,x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)-f(y)+y=0\iff y''-y'+y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)},\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-2x} + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 32. ← page 7

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{3, \sqrt{11}, -\sqrt{11}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{11}\right)\left(X - \sqrt{11}\right)(X - 3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{11}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{11}\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 11\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 3\,f^2 - 11\,f + 33\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{3, \sqrt{11}, -\sqrt{11}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{11}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3(y) - 3f^2(y) - 11f(y) + 33y = y^{(3)} - 3y'' - 11y' + 33y = 0$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - 11\,f + 33\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - 11\,f + 33\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - 11\,f + 33\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{11}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$.

Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow f\,(y)-3y=0\Longleftrightarrow y'=3y.$$

Autrement dit : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=3y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{3\,x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y\in E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{11}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{11}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{3\,x}+be^{\left(\sqrt{11}x\right)}+ce^{\left(-\sqrt{11}x\right)}.$$

Corrigé 33. ← page 7

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{1,-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{5}-1\right)\left(2\,X-\sqrt{5}-1\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)&=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f-\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-2\,f^2+\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1,-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y)=f\,(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3\,(y)=f\left(f^2\,(y)\right)=f\,(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f\,(y))^2$ et $(f\,(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3\,(y)-2f^2\,(y)=y^{(3)}-2y''=-y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-2\,f^2=-\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-2\,f^2+\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-2\,f^2+\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit :

toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}.$$

Corrigé 34. ← page 7

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, -5, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+5)(X+1)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 5\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 5\,f^2 - f - 5\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, -5, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 5f^2(y) - f(y) = y^{(3)} + 5y'' - y' = 5y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 5\,f^2 - f = 5\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 5\,f^2 - f - 5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 5\,f^2 - f - 5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \iff f(y)+5y=0 \iff y'=-5y.$$

Autrement dit : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-5y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-5x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-5x} + ce^{(-x)} + be^{x}.$$

Corrigé 35. ← page 8

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X+1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+\mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr}
\vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\
f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & \vec{z} &
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + f(y) = y^{(3)} + y'' + y' = -y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, or

$f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f(y)+y=0\iff y'=-y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)+y=0\iff y''+y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y:x\mapsto b\cos(x)+c\sin(x),\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-x}+b\cos(x)+c\sin(x).$$

Corrigé 36. ← page 8

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{\sqrt{1195},2,-\sqrt{1195}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{1195}\right)\left(X-\sqrt{1195}\right)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{1195}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{1195}\mathrm{Id}_E\right)&=(f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-1195\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-2f^2-1195f+2390\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{1195},2,-\sqrt{1195}\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :
$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 2f^2(y) - 1195f(y) = y^{(3)} - 2y'' - 1195y' = -2390y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 - 1195f = -2390\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 - 1195f + 2390\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 - 1195f + 2390\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 2y = 0 \iff y' = 2y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{1195}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{2x} + be^{\left(\sqrt{1195}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{1195}x\right)}.$$

Corrigé 37. ← page 8

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 10$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $11 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 10\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - f^2 + 10f - 10\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 10f - 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 10f - 10\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 10$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 10 = (X - 1)\,Q + 11,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 10\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 11\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 10X - 10 = (X-1)(X^2+10)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 10\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 10\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{11}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{11} f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}\right) \\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{11} f^2 + \frac{10}{11}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{11}\left(f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 10\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{11}\left(f^2 + 10\mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{11}\left(f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $11\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + 10\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -10\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} &+\vec{z} \\ f(\vec{x}) &= f(\vec{y}) &+f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= f^2(\vec{y}) &+f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} &= \vec{y} + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &= \vec{y} & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) &= \vec{y} - 10\vec{z} & \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 10L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{11}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{11}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{11}f^3(\vec{x}) + \frac{10}{11}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{11}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 10f(\vec{x}) - 10\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 10\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{11}f^4(\vec{x}) - \frac{9}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 10\,f + 10\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 10\,f^2 + 10\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{11}f^4(\vec{x}) - \frac{9}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{11}f^4(\vec{x}) - \frac{9}{11}f^2(\vec{x}) + \frac{10}{11}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{11}X^4 - \frac{9}{11}X^2 + \frac{10}{11}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 10X - 10$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{11}X^4 - \frac{9}{11}X^2 + \frac{10}{11} = \left(X^3 - X^2 + 10X - 10\right) \cdot \left(-\frac{1}{11}X - \frac{1}{11}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{11}\,f^4 - \frac{9}{11}\,f^2 + \frac{10}{11}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{11}\,f - \frac{1}{11}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) + 10f(y) - 10y = y^{(3)} - y'' + 10y' - 10y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + 10\,f - 10\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + 10y = 0 \iff y'' + 10y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 10 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{10}$ et $r_2 = -i\sqrt{10}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{10}x\right) + c\sin\left(\sqrt{10}x\right), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 10\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + b\cos\left(\sqrt{10}x\right) + c\sin\left(\sqrt{10}x\right).$$

Corrigé 38. ← page 8

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{9}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X + \sqrt{109} - 9\right)\left(2\,X - \sqrt{109} - 9\right)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 9\,f - 7\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 10\,f^2 + 2\,f + 7\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 10f^2(y) + 2f(y) + 7y = y^{(3)} - 10y'' + 2y' + 7y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 10\,f^2 + 2\,f + 7\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 10\,f^2 + 2\,f + 7\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 10\,f^2 + 2\,f + 7\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f(y) - y = 0 \Longleftrightarrow y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{109}+\frac{9}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{109}+9\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{109}-9\right)\right)}.$$

Corrigé 39. ← page 8

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+15 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $16 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 15\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + 15\,f + 15\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+15\,f+15\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+15\,f+15\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+15 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+15 = (X+1)\,Q+16,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+15\vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+16\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+15X+15 = (X+1)\,(X^2+15)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+15\,f+15\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+15\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+15\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{16}f^2(\vec{x})+\frac{15}{16}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{16}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{16}f^2(\vec{x})+\frac{15}{16}\vec{x}\right)\\
&= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{16}f^2+\frac{15}{16}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{16}\left(f^3+f^2+15\,f+15\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2+15\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{16}\left(f^2+15\mathrm{Id}_E\right)((f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{16}\left(f^3+f^2+15\,f+15\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2+15\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $16\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en

somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 15\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -15\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 15\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 15L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{16} f^2(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{16} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{16} f^2(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{16} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{16}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{16} f^2(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{16} f^3(\vec{x}) + \frac{15}{16} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{16} f^2(\vec{x}) - \frac{15}{16}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 15 f(\vec{x}) + 15\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 15\,f = -15\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 15\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{16} f^4(\vec{x}) - \frac{7}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 15\,f - 15\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 15\,f^2 - 15\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{16} f^4(\vec{x}) - \frac{7}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{15}{16}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{16}f^4(\vec{x})-\frac{7}{8}f^2(\vec{x})+\frac{15}{16}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{16}X^4-\frac{7}{8}X^2+\frac{15}{16}$ par le polynôme annulateur $X^3+X^2+15X+15$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{16}X^4-\frac{7}{8}X^2+\frac{15}{16}=\left(X^3+X^2+15X+15\right)\cdot\left(-\frac{1}{16}X+\frac{1}{16}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{16}f^4-\frac{7}{8}f^2+\frac{15}{16}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3+f^2+15\,f+15\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{16}f+\frac{1}{16}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)+f^2(y)+15f(y)=y^{(3)}+y''+15y'=-15y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2+15\,f=-15\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+f^2+15\,f+15\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2+15\,f+15\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f(y)+y=0\iff y'=-y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)+15y=0\iff y''+15y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+15\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+15=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i\sqrt{15}$ et $r_2=-i\sqrt{15}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y:x\mapsto b\cos\left(\sqrt{15}x\right)+c\sin\left(\sqrt{15}x\right),\ \text{avec }(b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 15\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + b\cos\left(\sqrt{15}x\right) + c\sin\left(\sqrt{15}x\right).$$

Corrigé 40. ← page 9

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 23$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 23$ admet -23 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -23 donne : $530 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 23\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + 23\, f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + 23\, f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + 23\, f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 23$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 23)\, Q + 530,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = (f + 23\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 530\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3 + 23X^2 + X + 23 = (X + 23)\left(X^2 + 1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 23\, f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E = (f + 23\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + 23\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

   Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{530} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{530}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{530}\left(f + 23\mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 23\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f + 23\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{530} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{530}\vec{x}\right)\\ &= (f + 23\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{530}\, f^2 + \frac{1}{530}\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{530}\left(f^3 + 23\, f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{530}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\left((f + 23\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right)\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{530}\left(f^3 + 23\,f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 23\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $530\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -23\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} &=& & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) &=& - & 23\vec{y} & & & + \quad f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& & 529\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 529L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{530}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{530}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{530}f^2(\vec{x}) + \frac{529}{530}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{530}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{530}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{530}f^2(\vec{x}) + \frac{529}{530}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 23\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + 23\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 23\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{530}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{530}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{530}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{530}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{23}{530}f^2(\vec{x}) - \frac{23}{530}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{530}\left(f^3(\vec{x}) + 23f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 23\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 23\,f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$.
Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{530} f^4(\vec{x}) + \frac{264}{265} f^2(\vec{x}) + \frac{529}{530}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -23\,f^2 - f - 23\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -23\,f^3 - f^2 - 23\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{530} f^4(\vec{x}) + \frac{264}{265} f^2(\vec{x}) + \frac{529}{530}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{530} f^4(\vec{x}) + \frac{264}{265} f^2(\vec{x}) + \frac{529}{530}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{530}X^4 + \frac{264}{265}X^2 + \frac{529}{530}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 23X^2 + X + 23$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{530}X^4 + \frac{264}{265}X^2 + \frac{529}{530} = \left(X^3 + 23X^2 + X + 23\right) \cdot \left(-\frac{1}{530}X + \frac{23}{530}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{530}\,f^4 + \frac{264}{265}\,f^2 + \frac{529}{530}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 23\,f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{530}\,f + \frac{23}{530}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 23f^2(y) + f(y) + 23y = y^{(3)} + 23y'' + y' + 23y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 23\,f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 23\,f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 23\,f^2 + f + 23\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 23\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 23y = 0 \iff y' = -23y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 23\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -23y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-23\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x)\,, \text{ avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f+23\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+23\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x) = ae^{-23\,x} + b\cos(x) + c\sin(x)\,.$$

Corrigé 41. ← page 9

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+1$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X+1)\,Q + 2,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E = (f+\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2} f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + f(y) + y = y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E)$. Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow f(y)+y=0\Longleftrightarrow y'=-y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow f^2(y)+y=0\Longleftrightarrow y''+y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y:x\mapsto b\cos(x)+c\sin(x)\,,\ \text{ avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-x}+b\cos(x)+c\sin(x)\,.$$

Corrigé 42. ← page 9

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\{1,4,-2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+2)(X-1)(X-4)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f-(4)\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-(-2)\,\mathrm{Id}_E)&=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\,f-8\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-3\,f^2-6\,f+8\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1,4,-2\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-(4)\,\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-(-2)\,\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 3f^2(y) - 6f(y) + 8y = y^{(3)} - 3y'' - 6y' + 8y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3f^2 - 6f + 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3f^2 - 6f + 8\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3f^2 - 6f + 8\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + be^{(4x)} + ce^{(-2x)}.$$

Corrigé 43. ← page 9

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, \frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{521} - 23\right)\left(2X - \sqrt{521} - 23\right)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 23f + 2\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 24f^2 + 25f - 2\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, \frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 24f^2(y) + 25f(y) - 2y = y^{(3)} - 24y'' + 25y' - 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 24\,f^2 + 25\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 24\,f^2 + 25\,f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 24\,f^2 + 25\,f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\,(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{521} + \frac{23}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{521}+23\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{521}-23\right)\right)}.$$

Corrigé 44. ← page 9

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 - X + 3$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 3$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 - X + 3 = (X - 1)\,Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + 3\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-2X^2+4X-3=(X-1)\left(X^2-X+3\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-2\,f^2+4\,f-3\mathrm{Id}_E=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,.\quad(\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{3}f^2\left(\vec{x}\right)-\frac{1}{3}f\left(\vec{x}\right)+\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad\vec{z}=\frac{1}{3}\left(f-\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right)&=(f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2\left(\vec{x}\right)-\frac{1}{3}f\left(\vec{x}\right)+\vec{x}\right)\\&=(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{3}\,f^2-\frac{1}{3}\,f+\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{3}\Big(f^3-2\,f^2+4\,f-3\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{x}\right)\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big)\left(\vec{z}\right)&=\frac{1}{3}\Big(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\Big)\left((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{3}\Big(f^3-2\,f^2+4\,f-3\mathrm{Id}_E\Big)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-\mathrm{Id}_E)\left(\vec{x}\right)=\vec{0}$, et : $\left(f^2-f+3\mathrm{Id}_E\right)\left(\vec{x}\right)=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2-f+3\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 3\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & & - & 3\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

On a directement :

$$\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x}), \qquad \text{et :} \quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x})$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{3}f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) - 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2f^2 + 4f = 3\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{4}{3}f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}),$$

et comme : $f^3 = 2f^2 - 4f + 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2f^3 - 4f^2 + 3f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{3}f^3(\vec{x}) - \frac{4}{3}f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 2f^2(y) + 4f(y) = y^{(3)} - 2y'' + 4y' = 3y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 + 4f = 3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 + 4f - 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 + 4f - 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) - f(y) + 3y = 0 \iff y'' - y' + 3y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - r + 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -11$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{11}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{11}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{11}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{11}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{11}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{11}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 45. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 3$ et $X^2 - X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $7 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - 4f^2 + 4f - 3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-4\,f^2+4\,f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-4\,f^2+4\,f-3\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2-X+1 par $X-3$. On a en effet :

$$X^2-X+1 = (X-3)\,Q+7,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 7\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-4X^2+4X-3 = (X-3)\,(X^2-X+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-4\,f^2+4\,f-3\mathrm{Id}_E = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-3\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{7}f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{7}f\,(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{7}\,(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f-3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{7}f\,(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}\right)\\
&= (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{7}\,f^2 - \frac{1}{7}\,f + \frac{1}{7}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\left(f^3-4\,f^2+4\,f-3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{7}\left(f^2-f+\mathrm{Id}_E\right)((f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\left(f^3-4\,f^2+4\,f-3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2-f+\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $7\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2-f+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & \vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 6\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{7} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{7} f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7} f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{7} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{7} f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7} f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{7} f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{7} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{7} f^2(\vec{x}) - \frac{3}{7} f(\vec{x}) + \frac{3}{7}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(f^3(\vec{x}) - 4f^2(\vec{x}) + 4f(\vec{x}) - 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{7} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{7} f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7} f^2(\vec{x}) - \frac{5}{7} f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 4\,f^2 - 4\,f + 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 4\,f^3 - 4\,f^2 + 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{5}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{5}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{7}X^4 + \frac{2}{7}X^3 + \frac{4}{7}X^2 - \frac{5}{7}X + \frac{6}{7}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 4X^2 + 4X - 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{7}X^4 + \frac{2}{7}X^3 + \frac{4}{7}X^2 - \frac{5}{7}X + \frac{6}{7} = \left(X^3 - 4X^2 + 4X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}X - \frac{2}{7}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{7}\,f^4 + \frac{2}{7}\,f^3 + \frac{4}{7}\,f^2 - \frac{5}{7}\,f + \frac{6}{7}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{7}\,f - \frac{2}{7}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 4f^2(y) + 4f(y) - 3y = y^{(3)} - 4y'' + 4y' - 3y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 4\,f^2 + 4\,f - 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 3y = 0 \iff y' = 3y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{3\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) - f(y) + y = 0 \iff y'' - y' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est :

$r^2 - r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{3x} + \left(b \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 46. ← page 10

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 2, 3\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - (2)\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - (1)\,\mathrm{Id}_E) &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 3\,f + 2\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 6\,f^2 + 11\,f - 6\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 2, 3\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (2)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 6f^2(y) + 11f(y) = y^{(3)} - 6y'' + 11y' = 6y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 6\,f^2 + 11\,f = 6\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 6\,f^2 + 11\,f - 6\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 6\,f^2 + 11\,f - 6\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (2)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - (2)\,\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 3y = 0 \iff y' = 3y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{3x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - (2)\,\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (2)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - (2)\,\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{3x} + be^{(2x)} + ce^{x}.$$

Corrigé 47. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 2$ et $X^2 + X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $7 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X - 2$. On a en effet :

$$X^2 + X + 1 = (X - 2)\,Q + 7,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x} = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 7\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 - X - 2 = (X - 2)(X^2 + X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{7} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7} f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{7}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}\right) \\ &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{7}f^2 + \frac{1}{7}f + \frac{1}{7}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\left(f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{7}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{7}\left(f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $7\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \ \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - \ \vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \ \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 6\vec{y} & - \ \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}f(\vec{x}) + \frac{1}{7}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{7}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{2}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{7}f(\vec{x}) + \frac{2}{7}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{7}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 + f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 + f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{7}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{7}f^3(\vec{x}) + \frac{4}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{7}f(\vec{x}) + \frac{6}{7}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{7}X^4 - \frac{2}{7}X^3 + \frac{4}{7}X^2 + \frac{5}{7}X + \frac{6}{7}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 - X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{7}X^4 - \frac{2}{7}X^3 + \frac{4}{7}X^2 + \frac{5}{7}X + \frac{6}{7} = \left(X^3 - X^2 - X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}X - \frac{3}{7}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{7}\,f^4 - \frac{2}{7}\,f^3 + \frac{4}{7}\,f^2 + \frac{5}{7}\,f + \frac{6}{7}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{7}\,f - \frac{3}{7}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) - f(y) - 2y = y^{(3)} - y'' - y' - 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 2y = 0 \iff y' = 2y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + f(y) + y = 0 \iff y'' + y' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{2x} + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 48. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 40$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $41 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 40\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + 40f - 40\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+40\,f-40\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+40\,f-40\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+40 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+40 = (X-1)\,Q+41,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+40\vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+41\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+40X-40 = (X-1)\,(X^2+40)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+40\,f-40\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+40\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+40\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{41}f^2\,(\vec{x})+\frac{40}{41}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{41}\,(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{41}f^2\,(\vec{x})+\frac{40}{41}\vec{x}\right)\\ &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{41}\,f^2+\frac{40}{41}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{41}\left(f^3-f^2+40\,f-40\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+40\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{41}\left(f^2+40\mathrm{Id}_E\right)((f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{41}\left(f^3-f^2+40\,f-40\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f-\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2+40\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $41\vec{x} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en

somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 40\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -40\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 40\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 40L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{41} f^2(\vec{x}) + \frac{40}{41}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{41} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{41}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{41} f^2(\vec{x}) + \frac{40}{41}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{41} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{41}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{41} f^2(\vec{x}) + \frac{40}{41}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{41} f^3(\vec{x}) + \frac{40}{41} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{41} f^2(\vec{x}) + \frac{40}{41}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{41}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 40 f(\vec{x}) - 40\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 40\,f = 40\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 40\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{41} f^4(\vec{x}) - \frac{39}{41} f^2(\vec{x}) + \frac{40}{41}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 40\,f + 40\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 40\,f^2 + 40\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{41} f^4(\vec{x}) - \frac{39}{41} f^2(\vec{x}) + \frac{40}{41}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{41}f^4(\vec{x})-\frac{39}{41}f^2(\vec{x})+\frac{40}{41}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{41}X^4-\frac{39}{41}X^2+\frac{40}{41}$ par le polynôme annulateur $X^3-X^2+40X-40$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{41}X^4-\frac{39}{41}X^2+\frac{40}{41}=\left(X^3-X^2+40X-40\right)\cdot\left(-\frac{1}{41}X-\frac{1}{41}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{41}f^4-\frac{39}{41}f^2+\frac{40}{41}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3-f^2+40f-40\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{41}f-\frac{1}{41}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-f^2(y)+40f(y)=y^{(3)}-y''+40y'=40y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2+40f=40\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-f^2+40f-40\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2+40f-40\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f(y)-y=0\iff y'=y.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^x$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)+40y=0\iff y''+40y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+40\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+40=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=2i\sqrt{10}$ et $r_2=-2i\sqrt{10}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y:x\mapsto b\cos\left(2\sqrt{10}x\right)+c\sin\left(2\sqrt{10}x\right),\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 40\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + b\cos\left(2\sqrt{10}x\right) + c\sin\left(2\sqrt{10}x\right).$$

Corrigé 49. ← page 10

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 1)\, Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\left(\vec{x}\right) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)\left(X^2 + 1\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)\left(\vec{y}\right) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & + \vec{z}\\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & + f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & + f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x} & = & & \vec{y} & + \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & + f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-f^2-f-\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-f^3-f^2-f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur X^3+X^2+X+1, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{2}=\left(X^3+X^2+X+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f^4+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)+f^2(y)+f(y)+y=y^{(3)}+y''+y'+y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2+f+\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow f(y)+y=0\Longleftrightarrow y'=-y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow f^2(y)+y=0\Longleftrightarrow y''+y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x)\,, \text{ avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-x}+b\cos(x)+c\sin(x)\,.$$

Corrigé 50. ← page 11

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2},-1,\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{1085}-33\right)\left(2\,X-\sqrt{1085}-33\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)&=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-33\,f+\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-32\,f^2-32\,f+\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2},-1,\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-32f^2(y)-32f(y)+y=y^{(3)}-32y''-32y'+y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-32\,f^2-32\,f+\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-32\,f^2-32\,f+\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-32\,f^2-32\,f+\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f\,(y)+y=0 \iff y'=-y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1085}+\frac{33}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{1085}+33\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{1085}-33\right)\right)}.$$

Corrigé 51. ← page 11

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+5$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+5$ admet -5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -5 donne : $27 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f+5\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+2 par $X+5$. On a en effet :

$$X^2+2 = (X+5)\,Q+27,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+2\vec{x} = (f+5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+27\vec{x}. \tag{†}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3+5X^2+2X+10 = (X+5)\,(X^2+2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+5\,f^2+2\,f+10\mathrm{Id}_E = (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+2\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+5\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{27}f^2\,(\vec{x})+\frac{2}{27}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{27}\,(f+5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{27}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{27}\vec{x}\right)\\ &= (f + 5\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{27}f^2 + \frac{2}{27}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{27}\left(f^3 + 5f^2 + 2f + 10\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{27}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)((f + 5\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{27}\left(f^3 + 5f^2 + 2f + 10\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $27\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vec{x} & = & \vec{y} \quad +\vec{z}\\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) \quad +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) \quad +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & -5\vec{y} & & & + f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & 25\vec{y} & - & 2\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 25L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{27}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{27}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{27}f^2(\vec{x}) + \frac{25}{27}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{27} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{27}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{27} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{27}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{27} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{27}\vec{x}\right)\\
&= \left(\frac{1}{27} f^3(\vec{x}) + \frac{2}{27} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{5}{27} f^2(\vec{x}) - \frac{10}{27}\vec{x}\right)\\
&= \frac{1}{27}\left(f^3(\vec{x}) + 5f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 10\vec{x}\right)\\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 5\,f^2 + 2\,f + 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{27} f^4(\vec{x}) + \frac{23}{27} f^2(\vec{x}) + \frac{50}{27}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -5\,f^2 - 2\,f - 10\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -5\,f^3 - 2\,f^2 - 10\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{27} f^4(\vec{x}) + \frac{23}{27} f^2(\vec{x}) + \frac{50}{27}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{27} f^4(\vec{x}) + \frac{23}{27} f^2(\vec{x}) + \frac{50}{27}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{27}X^4 + \frac{23}{27}X^2 + \frac{50}{27}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 5X^2 + 2X + 10$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{27}X^4 + \frac{23}{27}X^2 + \frac{50}{27} = \left(X^3 + 5X^2 + 2X + 10\right) \cdot \left(-\frac{1}{27}X + \frac{5}{27}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{27}\,f^4 + \frac{23}{27}\,f^2 + \frac{50}{27}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 5\,f^2 + 2\,f + 10\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{27}\,f + \frac{5}{27}\mathrm{Id}_E\right)\\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 5f^2(y) + 2f(y) + 10y = y^{(3)} + 5y'' + 2y' + 10y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 5\,f^2 + 2\,f + 10\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 5\,f^2 + 2\,f + 10\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 5\,f^2 + 2\,f + 10\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \iff f\,(y) + 5y = 0 \iff y' = -5y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -5y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-5\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \iff f^2\,(y) + 2y = 0 \iff y'' + 2y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\,\sqrt{2}$ et $r_2 = -i\,\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 5\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-5\,x} + b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Corrigé 52. ← page 11

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{-3, 5, -2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+3)(X+2)(X-5)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - (5)\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - (-2)\,\mathrm{Id}_E) &= (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 3\,f - 10\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 19\,f - 30\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

   d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{-3, 5, -2\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (5)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3\,(y) = f\left(f^2\,(y)\right) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 19f(y) = y^{(3)} - 19y' = 30y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 19\,f = 30\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 19\,f - 30\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 19\,f - 30\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (5)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - (5)\,\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 3y = 0 \iff y' = -3y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-3\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - (5)\,\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (5)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - (5)\,\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-3\,x} + be^{(5\,x)} + ce^{(-2\,x)}.$$

Corrigé 53. ← page 11

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\right)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) - 2f(y) + 2y = y^{(3)} - y'' - 2y' + 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2-2\,f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\,(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{2}x\right)}.$$

Corrigé 54. ← page 11

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 2, -4\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+4)(X-1)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - (1)\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - (-4)\,\mathrm{Id}_E) &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 3\,f - 4\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + f^2 - 10\,f + 8\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 2, -4\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-4)\,\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3\,(y) = f\left(f^2\,(y)\right) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f\,(y))^2$ et $(f\,(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3\,(y) + f^2\,(y) - 10f\,(y) + 8y = y^{(3)} + y'' - 10y' + 8y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 - 10\,f + 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+f^2-10\,f+8\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2-10\,f+8\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$).

Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-4)\,\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-(1)\,\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-(-4)\,\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 2y = 0 \iff y' = 2y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - (-4)\,\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-4)\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - (1)\,\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - (-4)\,\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{2\,x} + ce^{(-4\,x)} + be^{x}.$$

Corrigé 55. ← page 12

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{2\sqrt{7} - 5, -2\sqrt{7} - 5, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + 2\sqrt{7} + 5\right)\left(X - 2\sqrt{7} + 5\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 10\,f - 3\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 11\,f^2 + 7\,f - 3\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{2\sqrt{7} - 5, -2\sqrt{7} - 5, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3(y) + 11f^2(y) + 7f(y) = y^{(3)} + 11y'' + 7y' = 3y$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 11\,f^2 + 7\,f = 3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 11\,f^2 + 7\,f - 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 11\,f^2 + 7\,f - 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit :

toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-2\sqrt{7} - 5\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + ce^{\left(-x\left(2\sqrt{7}+5\right)\right)} + be^{\left(x\left(2\sqrt{7}-5\right)\right)}.$$

Corrigé 56. ← page 12

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 7$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $8 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 7\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + f^2 + 7f + 7\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + 7f + 7\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + 7f + 7\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 7$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 7 = (X + 1)\,Q + 8,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 7\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 8\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + 7X + 7 = (X + 1)(X^2 + 7)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + 7f + 7\mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 7\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 7\mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{8}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{8} f^2 + \frac{7}{8}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{8}\left(f^3 + f^2 + 7f + 7\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 7\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{8}\left(f^2 + 7\mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{8}\left(f^3 + f^2 + 7f + 7\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $8\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 7\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -7\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} && \\
f(\vec{x}) &=& -\,\vec{y} &&&+& f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) &=& \vec{y} &-& 7\vec{z} &&
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 7L_1$, ou

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{8}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{8} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{8} f^3(\vec{x}) + \frac{7}{8} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{8} f^2(\vec{x}) - \frac{7}{8}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 7 f(\vec{x}) + 7\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 7\,f = -7\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 7\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{8} f^4(\vec{x}) - \frac{3}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 7\,f - 7\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 7\,f^2 - 7\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{8} f^4(\vec{x}) - \frac{3}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{8} f^4(\vec{x}) - \frac{3}{4} f^2(\vec{x}) + \frac{7}{8}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{8} X^4 - \frac{3}{4} X^2 + \frac{7}{8}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 7X + 7$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{8} X^4 - \frac{3}{4} X^2 + \frac{7}{8} = \left(X^3 + X^2 + 7X + 7\right) \cdot \left(-\frac{1}{8} X + \frac{1}{8}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}\,f^4 - \frac{3}{4}\,f^2 + \frac{7}{8}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 7\,f + 7\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{8}\,f + \frac{1}{8}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + 7f(y) = y^{(3)} + y'' + 7y' = -7y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + 7f = -7\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + 7f + 7\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + 7f + 7\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + 7y = 0 \iff y'' + 7y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 7 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{7}$ et $r_2 = -i\sqrt{7}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{7}x\right) + c\sin\left(\sqrt{7}x\right), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 7\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + b\cos\left(\sqrt{7}x\right) + c\sin\left(\sqrt{7}x\right).$$

Corrigé 57. ← page 12

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 4$ et $X^2 + X + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 4$ admet 4 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 4 donne : $21 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - 3f^2 - 3f - 4\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 3f^2 - 3f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 3f^2 - 3f - 4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en

deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X - 4$. On a en effet :

$$X^2 + X + 1 = (X - 4)\, Q + 21,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + f\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f - 4\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 21\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 3X^2 - 3X - 4 = (X - 4)\,(X^2 + X + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 3\,f^2 - 3\,f - 4\mathrm{Id}_E = (f - 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 4\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{21} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{21} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{21}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{21}\,(f - 4\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 4\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f - 4\mathrm{Id}_E) \left(\frac{1}{21} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{21} f\,(\vec{x}) + \frac{1}{21}\vec{x}\right) \\
&= (f - 4\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{21}\,f^2 + \frac{1}{21}\,f + \frac{1}{21}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{21}\left(f^3 - 3\,f^2 - 3\,f - 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{21}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)((f - 4\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{21}\left(f^3 - 3\,f^2 - 3\,f - 4\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 4\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $21\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel

que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 4\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + f(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -f(\vec{z}) - \vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 16\vec{y} & - & \vec{z} & - & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) & = & 20\vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 20L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{21}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{21}f(\vec{x}) + \frac{1}{21}\vec{x}, \qquad \text{et : } \quad \vec{z} = -\frac{1}{21}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{21}f(\vec{x}) + \frac{20}{21}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{21}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{21}f(\vec{x}) + \frac{1}{21}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{21}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{21}f(\vec{x}) + \frac{20}{21}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 4\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 4\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 4\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{21}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{21}f(\vec{x}) + \frac{1}{21}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{21}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{21}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{21}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{4}{21}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{21}f(\vec{x}) + \frac{4}{21}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{21}\left(f^3(\vec{x}) - 3f^2(\vec{x}) - 3f(\vec{x}) - 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 3\,f^2 - 3\,f = 4\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{21}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{21}f^3(\vec{x}) + \frac{6}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{19}{21}f(\vec{x}) + \frac{20}{21}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 3\,f^2 + 3\,f + 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 3\,f^3 + 3\,f^2 + 4\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{21}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{21}f^3(\vec{x}) + \frac{6}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{19}{21}f(\vec{x}) + \frac{20}{21}\vec{x} = \vec{0}$,

donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{21}f^4(\vec{x}) - \frac{2}{21}f^3(\vec{x}) + \frac{6}{7}f^2(\vec{x}) + \frac{19}{21}f(\vec{x}) + \frac{20}{21}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{21}X^4 - \frac{2}{21}X^3 + \frac{6}{7}X^2 + \frac{19}{21}X + \frac{20}{21}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 3X^2 - 3X - 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{21}X^4 - \frac{2}{21}X^3 + \frac{6}{7}X^2 + \frac{19}{21}X + \frac{20}{21} = \left(X^3 - 3X^2 - 3X - 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{21}X - \frac{5}{21}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{21}f^4 - \frac{2}{21}f^3 + \frac{6}{7}f^2 + \frac{19}{21}f + \frac{20}{21}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 3f^2 - 3f - 4\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{21}f - \frac{5}{21}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 3f^2(y) - 3f(y) = y^{(3)} - 3y'' - 3y' = 4y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3f^2 - 3f = 4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3f^2 - 3f - 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3f^2 - 3f - 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 4y = 0 \iff y' = 4y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 4y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{4x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + f(y) + y = 0 \iff y'' + y' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -3$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et

$r_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{4x} + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 58. ← page 12

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -3\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{6}\right)\left(X-\sqrt{6}\right)(X+3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{6}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{6}\mathrm{Id}_E\right) &= (f+3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-6\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+3\,f^2-6\,f-18\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -3\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\sqrt{6}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 3f^2(y) - 6f(y) = y^{(3)} + 3y'' - 6y' = 18y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+3\,f^2-6\,f = 18\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+3\,f^2-6\,f-18\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+3\,f^2-6\,f-18\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\sqrt{6}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 3y = 0 \iff y' = -3y.$$

Autrement dit : $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-3x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\sqrt{6}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{6}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-3x} + be^{\left(\sqrt{6}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{6}x\right)}.$$

Corrigé 59. ← page 12

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et X^2+50 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $59 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+50\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+50\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3-3\,f^2+50\,f-150\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-3\,f^2+50\,f-150\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+50\,f-150\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+50\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+50\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+50 par $X-3$. On a en effet :

$$X^2+50 = (X-3)\,Q + 59,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 50\vec{x} = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 59\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-3X^2+50X-150 = (X-3)(X^2+50)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+50\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-3\,f^2+50\,f-150\mathrm{Id}_E = (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+50\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+50\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-3\mathrm{Id}_E). \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+50\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{59}f^2(\vec{x}) + \frac{50}{59}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{59}(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{59}f^2(\vec{x}) + \frac{50}{59}\vec{x}\right) \\
&= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{59}f^2 + \frac{50}{59}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{59}\left(f^3 - 3f^2 + 50f - 150\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 50\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{59}\left(f^2 + 50\mathrm{Id}_E\right)((f - 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{59}\left(f^3 - 3f^2 + 50f - 150\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $59\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 50\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -50\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + \vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & + f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & + f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & 50\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 50L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{59}f^2(\vec{x}) + \frac{50}{59}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{59}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{59}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{59}f^2(\vec{x}) + \frac{50}{59}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{59}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{59}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$ d'autre part.

La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+50\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+50\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{59}f^2(\vec{x})+\frac{50}{59}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{59}f^3(\vec{x})+\frac{50}{59}f(\vec{x})\right)-\left(\frac{3}{59}f^2(\vec{x})+\frac{150}{59}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{59}\left(f^3(\vec{x})-3f^2(\vec{x})+50f(\vec{x})-150\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3-3\,f^2+50\,f-150\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+50\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{59}f^4(\vec{x})-\frac{41}{59}f^2(\vec{x})+\frac{450}{59}\vec{x},$$

et comme : $f^3=3\,f^2-50\,f+150\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=3\,f^3-50\,f^2+150\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{59}f^4(\vec{x})-\frac{41}{59}f^2(\vec{x})+\frac{450}{59}\vec{x}=\vec{0}$, donc $\vec{z}\in\ker(f^2+50\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+50\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+50\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{59}f^4(\vec{x})-\frac{41}{59}f^2(\vec{x})+\frac{450}{59}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{59}X^4-\frac{41}{59}X^2+\frac{450}{59}$ par le polynôme annulateur $X^3-3X^2+50X-150$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{59}X^4-\frac{41}{59}X^2+\frac{450}{59}=\left(X^3-3X^2+50X-150\right)\cdot\left(-\frac{1}{59}X-\frac{3}{59}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{59}\,f^4-\frac{41}{59}\,f^2+\frac{450}{59}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-3\,f^2+50\,f-150\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{59}\,f-\frac{3}{59}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-3f^2(y)+50f(y)-150y=y^{(3)}-3y''+50y'-150y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-3\,f^2+50\,f-150\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-3\,f^2+$

$50\,f - 150\mathrm{Id}_E$), or $f^3 - 3\,f^2 + 50\,f - 150\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\,(y) - 3y = 0 \Longleftrightarrow y' = 3y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{3\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f^2\,(y) + 50y = 0 \Longleftrightarrow y'' + 50y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 50 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = 5i\,\sqrt{2}$ et $r_2 = -5i\,\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(5\,\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(5\,\sqrt{2}x\right),\ \text{avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 50\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{3\,x} + b\cos\left(5\,\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(5\,\sqrt{2}x\right).$$

Corrigé 60. ← page 13

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\frac{1}{2}\,\sqrt{33} + \frac{7}{2}, 14, -\frac{1}{2}\,\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X + \sqrt{33} - 7\right)\left(2\,X - \sqrt{33} - 7\right)(X - 14)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 14\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\,\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\,\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 14\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 7\,f + 4\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - 21\,f^2 + 102\,f - 56\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\,\sqrt{33} + \frac{7}{2}, 14, -\frac{1}{2}\,\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f - \left(\frac{1}{2}\,\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - \left(-\frac{1}{2}\,\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3\,(y) = f\left(f^2\,(y)\right) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 21f^2(y) + 102f(y) - 56y = y^{(3)} - 21y'' + 102y' - 56y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 21\,f^2 + 102\,f - 56\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 21\,f^2 + 102\,f - 56\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 21\,f^2 + 102\,f - 56\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 14y = 0 \iff y' = 14y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 14y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{14\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 14\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 14\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{7}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{14\,x} + be^{\left(\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{33}+7\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}\,x\left(\sqrt{33}-7\right)\right)}.$$

Corrigé 61. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 24$ et $X^2 - X + 5$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 24$ admet 24 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 24 donne : $557 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 24\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - 25\,f^2 + 29\,f - 120\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 25\,f^2 + 29\,f - 120\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 25\,f^2 + 29\,f - 120\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 5$ par $X - 24$. On a en effet :

$$X^2 - X + 5 = (X - 24)\,Q + 557,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 5\vec{x} = (f - 24\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 557\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 25X^2 + 29X - 120 = (X-24)(X^2 - X + 5)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 25f^2 + 29f - 120\mathrm{Id}_E = (f - 24\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 24\mathrm{Id}_E). \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{557}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{557}f(\vec{x}) + \frac{5}{557}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{557}(f - 24\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 24\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 24\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{557}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{557}f(\vec{x}) + \frac{5}{557}\vec{x}\right) \\
&= (f - 24\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{557}f^2 - \frac{1}{557}f + \frac{5}{557}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{557}\left(f^3 - 25f^2 + 29f - 120\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité ($*$) de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{557}\left(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E\right)((f - 24\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{557}\left(f^3 - 25f^2 + 29f - 120\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 24\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $557\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 24\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 5\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 5\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 24\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 576\vec{y} & - & 5\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 24\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 552\vec{y} & - & 5\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 552L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{557}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{557}f(\vec{x}) + \frac{5}{557}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{557}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{557}f(\vec{x}) + \frac{552}{557}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{557}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{557}f(\vec{x}) + \frac{5}{557}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{557}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{557}f(\vec{x}) + \frac{552}{557}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 24\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 24\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 24\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{557}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{557}f(\vec{x}) + \frac{5}{557}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{557}f^3(\vec{x}) - \frac{1}{557}f^2(\vec{x}) + \frac{5}{557}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{24}{557}f^2(\vec{x}) - \frac{24}{557}f(\vec{x}) + \frac{120}{557}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{557}\left(f^3(\vec{x}) - 25f^2(\vec{x}) + 29f(\vec{x}) - 120\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 25\,f^2 + 29\,f = 120\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{557}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{557}f^3(\vec{x}) + \frac{546}{557}f^2(\vec{x}) - \frac{547}{557}f(\vec{x}) + \frac{2760}{557}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 25\,f^2 - 29\,f + 120\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 25\,f^3 - 29\,f^2 + 120\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{557}f^4(\vec{x}) + \frac{2}{557}f^3(\vec{x}) + \frac{546}{557}f^2(\vec{x}) - \frac{547}{557}f(\vec{x}) + \frac{2760}{557}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{557}f^4(\vec{x})+\frac{2}{557}f^3(\vec{x})+\frac{546}{557}f^2(\vec{x})-\frac{547}{557}f(\vec{x})+\frac{2760}{557}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{557}X^4+\frac{2}{557}X^3+\frac{546}{557}X^2-\frac{547}{557}X+\frac{2760}{557}$ par le polynôme annulateur $X^3-25X^2+29X-120$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{557}X^4+\frac{2}{557}X^3+\frac{546}{557}X^2-\frac{547}{557}X+\frac{2760}{557}=\left(X^3-25X^2+29X-120\right)\cdot\left(-\frac{1}{557}X-\frac{23}{557}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{557}f^4+\frac{2}{557}f^3+\frac{546}{557}f^2-\frac{547}{557}f+\frac{2760}{557}\mathrm{Id}_E&=\left(f^3-25f^2+29f-120\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{557}f-\frac{23}{557}\mathrm{Id}_E\right)\\&=0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-25f^2(y)+29f(y)=y^{(3)}-25y''+29y'=120y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-25f^2+29f=120\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-25f^2+29f-120\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-25f^2+29f-120\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-24\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2-f+5\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-24\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2-f+5\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-24\mathrm{Id}_E)\iff f(y)-24y=0\iff y'=24y.$$

Autrement dit : $\ker(f-24\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=24y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{24x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2-f+5\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)-f(y)+5y=0\iff y''-y'+5y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2-f+5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2-r+5=0$. Son discriminant est : $\Delta=-19$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1=\dfrac{1-i\sqrt{19}}{2}$ et $r_2=\dfrac{1+i\sqrt{19}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y:x\mapsto\left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}x\right)+c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}x\right)},\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 24\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 24\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{24\,x} + \left(b\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}x\right) + c\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}x\right)\right)e^{\left(\frac{1}{2}\,x\right)}.$$

Corrigé 62. ← page 13

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -11\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{3}\right)\left(X-\sqrt{3}\right)(X+11)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f + 11\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 11\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 3\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 11\,f^2 - 3\,f - 33\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -11\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3\,(y) = f\left(f^2\,(y)\right) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f\,(y))^2$ et $(f\,(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3\,(y) + 11f^2\,(y) - 3f\,(y) - 33y = y^{(3)} + 11y'' - 3y' - 33y = 0$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 11\,f^2 - 3\,f - 33\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 11\,f^2 - 3\,f - 33\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 11\,f^2 - 3\,f - 33\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 11\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :
$$y \in \ker(f + 11\mathrm{Id}_E) \iff f\,(y) + 11y = 0 \iff y' = -11y.$$
Autrement dit : $\ker(f + 11\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -11y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-11\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 11\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \sqrt{3}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-11\,x} + be^{\left(\sqrt{3}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{3}x\right)}.$$

Corrigé 63. ← page 13

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-5$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-5$ admet 5 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 5 donne : $26 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f-5\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f-5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-5\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-5$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X-5)\,Q+26,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+\vec{x} = (f-5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+26\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3-5X^2+X-5 = (X-5)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f-5\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E = (f-5\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-5\mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{26}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{26}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{26}\,(f-5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-5\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{26}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{26}\vec{x}\right)\\ &= (f-5\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{26}\,f^2+\frac{1}{26}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{26}\left(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

   donc : $\vec{y} \in \ker(f-5\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{26}\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)((f-5\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{26}\left(f^3-5\,f^2+f-5\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $26\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 5\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 5\vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 25\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 25L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 5\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 5\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{26}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{26} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{26} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{5}{26} f^2(\vec{x}) + \frac{5}{26}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{26}\left(f^3(\vec{x}) - 5f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 5\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{26} f^4(\vec{x}) + \frac{12}{13} f^2(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 5\,f^2 - f + 5\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 5\,f^3 - f^2 + 5\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{26}f^4\,(\vec{x}) + \frac{12}{13}f^2\,(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{26}f^4\,(\vec{x}) + \frac{12}{13}f^2\,(\vec{x}) + \frac{25}{26}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{26}X^4 + \frac{12}{13}X^2 + \frac{25}{26}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 5X^2 + X - 5$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{26}X^4 + \frac{12}{13}X^2 + \frac{25}{26} = \Big(X^3 - 5X^2 + X - 5\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{26}X - \frac{5}{26}\Big)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{26}\,f^4 + \frac{12}{13}\,f^2 + \frac{25}{26}\mathrm{Id}_E &= \Big(f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E\Big) \circ \Big(-\frac{1}{26}\,f - \frac{5}{26}\mathrm{Id}_E\Big) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3\,(y) = f\,\Big(f^2\,(y)\Big) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f\,(y))^2$ et $(f\,(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3\,(y) - 5f^2\,(y) + f\,(y) - 5y = y^{(3)} - 5y'' + y' - 5y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 5\,f^2 + f - 5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f\,(y) - 5y = 0 \Longleftrightarrow y' = 5y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 5y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{5\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f^2\,(y) + y = 0 \Longleftrightarrow y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x)\,,\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 5\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{5x} + b\cos(x) + c\sin(x)\,.$$

Corrigé 64. ← page 13

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-2\sqrt{2}-3, 2, 2\sqrt{2}-3\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + 2\sqrt{2} + 3\right)\left(X - 2\sqrt{2} + 3\right)(X - 2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 6f + \mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 4f^2 - 11f - 2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-2\sqrt{2}-3, 2, 2\sqrt{2}-3\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3(y) + 4f^2(y) - 11f(y) = y^{(3)} + 4y'' - 11y' = 2y$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 4f^2 - 11f = 2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 4f^2 - 11f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 4f^2 - 11f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :
$$y \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f(y) - 2y = 0 \Longleftrightarrow y' = 2y.$$

Autrement dit : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-2\sqrt{2}-3\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{2x}+ce^{\left(-x\left(2\sqrt{2}+3\right)\right)}+be^{\left(x\left(2\sqrt{2}-3\right)\right)}.$$

Corrigé 65. ← page 14

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X+\sqrt{5}-1\right)\left(2X-\sqrt{5}-1\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-2f^2+\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-2f^2(y)+y=y^{(3)}-2y''+y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-2f^2+\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-2f^2+\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-2f^2+\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f(y)-y=0\iff y'=y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}.$$

Corrigé 66. ← page 14

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{12, -\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{77} - 1\right)\left(2X - \sqrt{77} - 1\right)(X - 12)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 12\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f - 12\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f - 19\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 13f^2 - 7f + 228\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{12, -\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 13f^2(y) - 7f(y) + 228y = y^{(3)} - 13y'' - 7y' + 228y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 13f^2 - 7f + 228\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 13f^2 - 7f + 228\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 13f^2 - 7f + 228\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 12\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 12\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 12y = 0 \iff y' = 12y.$$

Autrement dit : $\ker(f-12\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=12y$, qui sont de la forme $y: x\mapsto ae^{12x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{77}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{77}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $y\in E=\ker(f-12\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{77}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{77}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-12\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{77}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{77}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{12x}+be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{77}+1\right)\right)}+ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{77}-1\right)\right)}.$$

Corrigé 67. ← page 14

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2},4\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X+\sqrt{13}-3\right)\left(2X-\sqrt{13}-3\right)(X-4)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f-4\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)&=(f-4\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-3f-\mathrm{Id}_E\right)\\&=f^3-7f^2+11f+4\mathrm{Id}_E\\&\overset{(*)}{=}0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2},4\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :
$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:
$$f^3(y)-7f^2(y)+11f(y)+4y=y^{(3)}-7y''+11y'+4y=0$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-7f^2+11f+4\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-7f^2+11f+4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-7f^2+11f+4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-4\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :
$$y\in\ker(f-4\mathrm{Id}_E)\iff f(y)-4y=0\iff y'=4y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 4y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{4x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 4\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 4\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{4x} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}+3\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}-3\right)\right)}.$$

Corrigé 68. ← page 14

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 3$ et $X^2 - 2X + 3$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 3$ admet -3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -3 donne : $18 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + f^2 - 3f + 9\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 - 3f + 9\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 - 3f + 9\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - 2X + 3$ par $X + 3$. On a en effet :

$$X^2 - 2X + 3 = (X + 3)\,Q + 18,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + 3\vec{x} = (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 18\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 - 3X + 9 = (X + 3)(X^2 - 2X + 3)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 - 3f + 9\mathrm{Id}_E = (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E\right) \circ (f + 3\mathrm{Id}_E). \quad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{18}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9}f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{18}(f + 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + 3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{18}f^2\,(\vec{x}) - \frac{1}{9}f\,(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}\right)\\
&= (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{18}\,f^2 - \frac{1}{9}\,f + \frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{18}\left(f^3 + f^2 - 3\,f + 9\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{18}\left(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E\right)((f + 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{18}\left(f^3 + f^2 - 3\,f + 9\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $18\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).

Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2\,(\vec{z}) - 2f\,(\vec{z}) + 3\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2\,(\vec{z}) = 2f\,(\vec{z}) - 3\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z}\\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcrcl}
\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) & = & -\ 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\
f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & 3\vec{z} & + & 2f(\vec{z})
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcl}
\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\
f(\vec{x}) & = & -\ 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\
f^2\,(\vec{x}) - 2f\,(\vec{x}) & = & 15\vec{y} & - & 3\vec{z} & &
\end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 15L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{18} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9} f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{18} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{9} f(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{18} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9} f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{18} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{9} f(\vec{x}) + \frac{5}{6}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}
(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{18} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{9} f(\vec{x}) + \frac{1}{6}\vec{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{18} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{9} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{6} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3} f(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= \frac{1}{18}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) - 3f(\vec{x}) + 9\vec{x}\right) \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 - 3f + 9\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{18} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{9} f^3(\vec{x}) + \frac{4}{9} f^2(\vec{x}) - \frac{4}{3} f(\vec{x}) + \frac{5}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 + 3f - 9\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 + 3f^2 - 9f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{18} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{9} f^3(\vec{x}) + \frac{4}{9} f^2(\vec{x}) - \frac{4}{3} f(\vec{x}) + \frac{5}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{18} f^4(\vec{x}) + \frac{2}{9} f^3(\vec{x}) + \frac{4}{9} f^2(\vec{x}) - \frac{4}{3} f(\vec{x}) + \frac{5}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{18}X^4 + \frac{2}{9}X^3 + \frac{4}{9}X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{5}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 - 3X + 9$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{18}X^4 + \frac{2}{9}X^3 + \frac{4}{9}X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{5}{2} = \left(X^3 + X^2 - 3X + 9\right) \cdot \left(-\frac{1}{18}X + \frac{5}{18}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{18} f^4 + \frac{2}{9} f^3 + \frac{4}{9} f^2 - \frac{4}{3} f + \frac{5}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 - 3f + 9\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{18} f + \frac{5}{18}\mathrm{Id}_E\right) \\
&= 0_{\mathrm{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) - 3f(y) + 9y = y^{(3)} + y'' - 3y' + 9y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2-3\,f+9\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+f^2-3\,f+9\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2-3\,f+9\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 3y = 0 \iff y' = -3y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-3\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) - 2f(y) + 3y = 0 \iff y'' - 2y' + 3y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 - 2\,r + 3 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -8$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{2 - i\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}i$ et $r_2 = \dfrac{2 + i\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}i$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)e^x, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-3\,x} + \left(b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)e^x.$$

Corrigé 69. ← page 14

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 11$ et $X^2 - X + 6$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 11$ admet 11 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 11 donne : $116 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 11\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - 12\,f^2 + 17\,f - 66\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 12\,f^2 + 17\,f - 66\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 12\,f^2 + 17\,f - 66\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 - X + 6$ par $X - 11$. On a en effet :

$$X^2 - X + 6 = (X - 11)\, Q + 116,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) + 6\vec{x} = (f - 11\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 116\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 12X^2 + 17X - 66 = (X - 11)\,(X^2 - X + 6)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 12\, f^2 + 17\, f - 66\mathrm{Id}_E = (f - 11\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 11\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{116} f(\vec{x}) + \frac{3}{58}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{116}(f - 11\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 11\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 11\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{116} f(\vec{x}) + \frac{3}{58}\vec{x}\right) \\
&= (f - 11\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{116} f^2 - \frac{1}{116} f + \frac{3}{58}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{116}\left(f^3 - 12\, f^2 + 17\, f - 66\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{116}\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)((f - 11\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{116}\left(f^3 - 12\, f^2 + 17\, f - 66\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 11\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $116\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Ayant démontré : $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 11\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) - f(\vec{z}) + 6\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = f(\vec{z}) - 6\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 11\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 121\vec{y} & - & 6\vec{z} & + & f(\vec{z}) \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Au lieu de se lancer dans un échelonnement (qui marcherait en très peu de calculs), on peut se contenter de remarquer que si l'on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, alors le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 11\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) & = & 110\vec{y} & - & 6\vec{z} & & \end{array}\right. .$$

À ce stade, il suffit de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 110L_1$, pour en déduire que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{116} f(\vec{x}) + \frac{3}{58}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{116} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{116} f(\vec{x}) + \frac{55}{58}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{116} f(\vec{x}) + \frac{3}{58}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{116} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{116} f(\vec{x}) + \frac{55}{58}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 11\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 11\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 11\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{1}{116} f(\vec{x}) + \frac{3}{58}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{116} f^3(\vec{x}) - \frac{1}{116} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{58} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{11}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{11}{116} f(\vec{x}) + \frac{33}{58}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{116}\left(f^3(\vec{x}) - 12 f^2(\vec{x}) + 17 f(\vec{x}) - 66\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 12\, f^2 + 17\, f - 66\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{116} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{58} f^3(\vec{x}) + \frac{103}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{26}{29} f(\vec{x}) + \frac{165}{29}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 12\,f^2 - 17\,f + 66\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 12\,f^3 - 17\,f^2 + 66\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{116} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{58} f^3(\vec{x}) + \frac{103}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{26}{29} f(\vec{x}) + \frac{165}{29}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{116} f^4(\vec{x}) + \frac{1}{58} f^3(\vec{x}) + \frac{103}{116} f^2(\vec{x}) - \frac{26}{29} f(\vec{x}) + \frac{165}{29}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{116}X^4 + \frac{1}{58}X^3 + \frac{103}{116}X^2 - \frac{26}{29}X + \frac{165}{29}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 12X^2 + 17X - 66$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{116}X^4 + \frac{1}{58}X^3 + \frac{103}{116}X^2 - \frac{26}{29}X + \frac{165}{29} = \left(X^3 - 12X^2 + 17X - 66\right) \cdot \left(-\frac{1}{116}X - \frac{5}{58}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{116}\,f^4 + \frac{1}{58}\,f^3 + \frac{103}{116}\,f^2 - \frac{26}{29}\,f + \frac{165}{29}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 12\,f^2 + 17\,f - 66\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{116}\,f - \frac{5}{58}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 12f^2(y) + 17f(y) - 66y = y^{(3)} - 12y'' + 17y' - 66y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 12\,f^2 + 17\,f - 66\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 12\,f^2 + 17\,f - 66\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 12\,f^2 + 17\,f - 66\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 11y = 0 \iff y' = 11y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 11y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{11\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) - f(y) + 6y = 0 \iff y'' - y' + 6y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est :

$r^2 - r + 6 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = -23$. Il est strictement négatif, et on en déduit que les solutions de l'équation caractéristique sont complexes, égales à $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{23}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{23}}{2}$. La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto \left(b \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{23}x\right) + c \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{23}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 11\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 11\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 - f + 6\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = a e^{11\,x} + \left(b \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{23}x\right) + c \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{23}x\right)\right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}.$$

Corrigé 70. ← page 15

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, 3, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X + 1)(X - 1)(X - 3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, 3, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 3f^2(y) - f(y) + 3y = y^{(3)} - 3y'' - y' + 3y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 3y = 0 \iff y' = 3y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{3x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{3x} + ce^{(-x)} + be^x.$$

Corrigé 71. ← page 15

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, -1, -9\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+9)(X+1)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f + 9\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f + 9\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 + 9\, f^2 - f - 9\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, -1, -9\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3(y) + 9f^2(y) - f(y) - 9y = y^{(3)} + 9y'' - y' - 9y = 0$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 9\, f^2 - f - 9\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 9\, f^2 - f - 9\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 9\, f^2 - f - 9\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :
$$y \in \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 9y = 0 \iff y' = -9y.$$
Autrement dit : $\ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -9y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-9x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 9\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 9\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-9x} + ce^{(-x)} + be^x.$$

Corrigé 72. ← page 15

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{2, 3, -3\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+3)(X-2)(X-3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\circ(f-3\mathrm{Id}_E)\circ(f+3\mathrm{Id}_E) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-9\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-2\,f^2-9\,f+18\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{2, 3, -3\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+3\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3\,(y) = f\left(f^2\,(y)\right) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f\,(y))^2$ et $(f\,(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3\,(y) - 2f^2\,(y) - 9f\,(y) + 18y = y^{(3)} - 2y'' - 9y' + 18y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2\,f^2 - 9\,f + 18\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2\,f^2 - 9\,f + 18\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2\,f^2 - 9\,f + 18\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+3\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \iff f\,(y) - 2y = 0 \iff y' = 2y.$$

Autrement dit : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{2\,x} + be^{(3\,x)} + ce^{(-3\,x)}.$$

Corrigé 73. ← page 15

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{47}+7, \sqrt{47}+7, -1\right\}$. D'après

le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{47}-7\right)\left(X-\sqrt{47}-7\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-14\,f+2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-13\,f^2-12\,f+2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{47}+7,\sqrt{47}+7,-1\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-13f^2(y)-12f(y)=y^{(3)}-13y''-12y'=-2y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-13\,f^2-12\,f=-2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-13\,f^2-12\,f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-13\,f^2-12\,f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\iff f(y)+y=0\iff y'=-y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y\in E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\sqrt{47}+7\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-x}+be^{\left(x\left(\sqrt{47}+7\right)\right)}+ce^{\left(-x\left(\sqrt{47}-7\right)\right)}.$$

Corrigé 74. ← page 15

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{12767}-113, \sqrt{12767}-113, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{12767}+113\right)\left(X-\sqrt{12767}+113\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+226\,f+2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+227\,f^2+228\,f+2\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{12767}-113, \sqrt{12767}-113, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 227f^2(y) + 228f(y) = y^{(3)} + 227y'' + 228y' = -2y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 227\,f^2 + 228\,f = -2\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+227\,f^2+228\,f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+227\,f^2+228\,f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\left(-\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\sqrt{12767}-113\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + ce^{\left(-x\left(\sqrt{12767}+113\right)\right)} + be^{\left(x\left(\sqrt{12767}-113\right)\right)}.$$

Corrigé 75.

← page 16

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :
$$\begin{aligned}(f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f-2\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-2\,f^2-2\,f+4\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$
d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :
$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$
(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:
$$f^3(y) - 2f^2(y) - 2f(y) = y^{(3)} - 2y'' - 2y' = -4y$$
car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-2\,f^2-2\,f = -4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-2\,f^2-2\,f+4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-2\,f^2-2\,f+4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :
$$y \in \ker(f-2\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 2y = 0 \iff y' = 2y.$$
Autrement dit : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :
$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x) = ae^{2\,x} + be^{\left(\sqrt{2}x\right)} + ce^{\left(-\sqrt{2}x\right)}.$$

Corrigé 76. ← page 16

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -4\right\}$. D'après le

critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)(X+4)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+4\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E\right) &= (f+4\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-2\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+4\,f^2-2\,f-8\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2},-4\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)+4f^2(y)-2f(y)-8y=y^{(3)}+4y''-2y'-8y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+4\,f^2-2\,f-8\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+4\,f^2-2\,f-8\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+4\,f^2-2\,f-8\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\iff f(y)+4y=0\iff y'=-4y.$$

Autrement dit : $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-4y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-4\,x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y\in E=\ker(f+4\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+4\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{2}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-4\,x}+be^{\left(\sqrt{2}x\right)}+ce^{\left(-\sqrt{2}x\right)}.$$

Corrigé 77. ← page 16

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+2 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$

admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+2\,f+2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 2 = (X + 1)\,Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + 2X + 2 = (X + 1)\,(X^2 + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2\,(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{3}\,(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2\,(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right)\\ &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big)\,((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\Big(f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & 2\vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3} f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{3} f^2(\vec{x}) - \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) + 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 2\,f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 2\,f - 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 2\,f^2 - 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3} f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3} f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 2X + 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 + X^2 + 2X + 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}f^4 - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 2f + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + 2f(y) + 2y = y^{(3)} + y'' + 2y' + 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+f^2+2f+2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+f^2+2f+2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+f^2+2f+2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + 2y = 0 \iff y'' + 2y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{2}$ et $r_2 = -i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La

théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Corrigé 78. ← page 16

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X-1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc}\vec{x} & = & \vec{y} & + \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & + & f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) + f(y) = y^{(3)} - y'' + y' = y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E)$, or

$f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x)\,, \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + b\cos(x) + c\sin(x)\,.$$

Corrigé 79. ← page 16

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}, -3\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X + \sqrt{13} - 5\right)\left(2X - \sqrt{13} - 5\right)(X + 3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 5f + 3\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 2f^2 - 12f + 9\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}, -3\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 2f^2(y) - 12f(y) = y^{(3)} - 2y'' - 12y' = -9y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2f^2 - 12f = -9\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2f^2 - 12f + 9\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2f^2 - 12f + 9\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 3y = 0 \iff y' = -3y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-3x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-3x} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}+5\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}-5\right)\right)}.$$

Corrigé 80. ← page 17

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X + 1$ et $X^2 + 1$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X + 1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $2 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 1)\,Q + 2,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) \circ (f + \mathrm{Id}_E). \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(‡)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons

deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcrcrcl} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & -\ \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + \vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - f^2 - f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + X + 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + f(y) = y^{(3)} + y'' + y' = -y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + f = -\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f(y) + y = 0 \Longleftrightarrow y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow f^2(y) + y = 0 \Longleftrightarrow y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = ae^{-x} + b\cos(x) + c\sin(x).$$

Corrigé 81. ← page 17

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).

Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-3$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-3$ admet 3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 3 donne : $10 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-3$. On a en effet :

$$X^2+1=(X-3)\,Q+10,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x})+\vec{x}=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x})+10\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-3X^2+X-3=(X-3)\,(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-3\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E=(f-3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)=\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-3\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{10}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{10}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{10}\,(f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité $(\dagger)$ implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f-3\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f-3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2\,(\vec{x})+\frac{1}{10}\vec{x}\right)\\ &= (f-3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{10}\,f^2+\frac{1}{10}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f-3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{10}\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\,((f-3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3-3\,f^2+f-3\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $10\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & 3\vec{y} & & & + \; f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 9\vec{y} & - & \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{10} f^3(\vec{x}) + \frac{1}{10} f(\vec{x})\right) - \left(\frac{3}{10} f^2(\vec{x}) + \frac{3}{10}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(f^3(\vec{x}) - 3f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - 3\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 3f^2 + f = 3\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{10} f^4(\vec{x}) + \frac{4}{5} f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 3\,f^2 - f + 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 3\,f^3 - f^2 + 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{10}f^4\left(\vec{x}\right) + \frac{4}{5}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{9}{10}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{10}f^4\left(\vec{x}\right) + \frac{4}{5}f^2\left(\vec{x}\right) + \frac{9}{10}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{10}X^4 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{9}{10}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 3X^2 + X - 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{10}X^4 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{9}{10} = \left(X^3 - 3X^2 + X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}X - \frac{3}{10}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{10}\,f^4 + \frac{4}{5}\,f^2 + \frac{9}{10}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{10}\,f - \frac{3}{10}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\left(y\right) = f\left(y'\right) = \left(y'\right)' = y''$, et :

$$f^3\left(y\right) = f\left(f^2\left(y\right)\right) = f\left(y''\right) = \left(y''\right)' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left(y\right)\right)^2$ et $\left(f\left(y\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3\left(y\right) - 3f^2\left(y\right) + f\left(y\right) = y^{(3)} - 3y'' + y' = 3y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 + f = 3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 + f - 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f\left(y\right) - 3y = 0 \iff y' = 3y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{3\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2\left(y\right) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x)\,,\ \text{avec } (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{3x} + b\cos(x) + c\sin(x)\,.$$

Corrigé 82. ← page 17

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 1$ et $X^2 + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $3 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2$ par $X - 1$. On a en effet :

$$X^2 + 2 = (X - 1)\,Q + 3,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X - 1)(X^2 + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\Big) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\,. \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{3}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)\left((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})\right) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{3}\left(f^3 - f^2 + 2f - 2\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}f^3(\vec{x}) + \frac{2}{3}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - 2\vec{x}\right) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - 2\,f + 2\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - 2\,f^2 + 2\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3}f^4(\vec{x}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + 2X - 2$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3} = \left(X^3 - X^2 + 2X - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}\,f^4 - \frac{1}{3}\,f^2 + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + 2\,f - 2\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\,f - \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) + 2f(y) - 2y = y^{(3)} - y'' + 2y' - 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2+2\,f-2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-f^2+2\,f-2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2+2\,f-2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f\,(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) \iff f^2\,(y) + 2y = 0 \iff y'' + 2y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+2 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\,\sqrt{2}$ et $r_2 = -i\,\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + b\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Corrigé 83. ← page 17

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}+1, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{2}-1\right)\left(X-\sqrt{2}-1\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2\,f - \mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3 - f^2 - 3\,f - \mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}+1, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\,(y) = f\,(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3\,(y) = f\left(f^2\,(y)\right) = f\,(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) - 3f(y) = y^{(3)} - y'' - 3y' = y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 - 3f = \mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 - 3f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 - 3f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{\left(x\left(\sqrt{2}+1\right)\right)} + ce^{\left(-x\left(\sqrt{2}-1\right)\right)}.$$

Corrigé 84. ← page 17

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+1$ et X^2+47 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+1$ admet -1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -1 donne : $48 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 47\mathrm{Id}_E\right)\right) \\ &= \ker(f^3 + f^2 + 47\,f + 47\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+f^2+47\,f+47\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+f^2+47\,f+47\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 47$ par $X + 1$. On a en effet :

$$X^2 + 47 = (X+1)\,Q + 48,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 47\vec{x} = (f + \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 48\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3+X^2+47X+47=(X+1)\left(X^2+47\right)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+f^2+47\,f+47\mathrm{Id}_E=(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2+47\mathrm{Id}_E\right)=\left(f^2+47\mathrm{Id}_E\right)\circ(f+\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y}=\frac{1}{48}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{47}{48}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{48}\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z}\in\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}\left(f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{y})&=\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\left(\frac{1}{48}f^2\left(\vec{x}\right)+\frac{47}{48}\vec{x}\right)\\&=\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(\frac{1}{48}\,f^2+\frac{47}{48}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{48}\left(f^3+f^2+47\,f+47\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\&\overset{(*)}{=}\vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2+47\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})&=\frac{1}{48}\left(f^2+47\mathrm{Id}_E\right)\left(\left(f+\mathrm{Id}_E\right)\circ Q(f)(\vec{x})\right)\\&\overset{(\ddagger)}{=}\frac{1}{48}\left(f^3+f^2+47\,f+47\mathrm{Id}_E\right)\left(Q(f)(\vec{x})\right)\\&\overset{(*)}{=}\vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z}\in\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $\left(f+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $\left(f^2+47\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $48\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+47\mathrm{Id}_E)$

implique : $f^2(\vec{z}) + 47\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -47\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\begin{cases} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} & = & & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & - & \vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & \vec{y} & - & 47\vec{z} & & \end{cases}$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 47L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{48}f^2(\vec{x}) + \frac{47}{48}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{48}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{48}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{48}f^2(\vec{x}) + \frac{47}{48}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{48}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{48}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{48}f^2(\vec{x}) + \frac{47}{48}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{48}f^3(\vec{x}) + \frac{47}{48}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{1}{48}f^2(\vec{x}) - \frac{47}{48}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{48}\left(f^3(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) + 47f(\vec{x}) + 47\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + f^2 + 47\,f + 47\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 47\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{48}f^4(\vec{x}) - \frac{23}{24}f^2(\vec{x}) + \frac{47}{48}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -f^2 - 47\,f - 47\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -f^3 - 47\,f^2 - 47\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{48}f^4(\vec{x}) - \frac{23}{24}f^2(\vec{x}) + \frac{47}{48}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{48}f^4(\vec{x}) - \frac{23}{24}f^2(\vec{x}) + \frac{47}{48}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{48}X^4 - \frac{23}{24}X^2 + \frac{47}{48}$ par le polynôme annulateur $X^3 + X^2 + 47X + 47$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{48}X^4 - \frac{23}{24}X^2 + \frac{47}{48} = \left(X^3 + X^2 + 47X + 47\right) \cdot \left(-\frac{1}{48}X + \frac{1}{48}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{48}f^4 - \frac{23}{24}f^2 + \frac{47}{48}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + f^2 + 47\,f + 47\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{48}f + \frac{1}{48}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) + 47f(y) + 47y = y^{(3)} + y'' + 47y' + 47y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 + 47\,f + 47\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 + 47\,f + 47\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 + 47\,f + 47\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + 47y = 0 \iff y'' + 47y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 47 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i\sqrt{47}$ et $r_2 = -i\sqrt{47}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos\left(\sqrt{47}x\right) + c\sin\left(\sqrt{47}x\right), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + 47\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + b\cos\left(\sqrt{47}x\right) + c\sin\left(\sqrt{47}x\right).$$

Corrigé 85. ← page 18

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{2, 3, -2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+2)(X-2)(X-3)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) &= (f - 3\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 4\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 3\,f^2 - 4\,f + 12\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{2, 3, -2\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 3f^2(y) - 4f(y) = y^{(3)} - 3y'' - 4y' = -12y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - 4\,f = -12\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - 4\,f + 12\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - 4\,f + 12\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) - 3y = 0 \iff y' = 3y.$$

Autrement dit : $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{3\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{3\,x} + be^{(2\,x)} + ce^{(-2\,x)}.$$

Corrigé 86. ← page 18

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{2, -2, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+2)(X+1)(X-2)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 4\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + f^2 - 4\,f - 4\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{2, -2, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + f^2(y) - 4f(y) = y^{(3)} + y'' - 4y' = 4y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + f^2 - 4\,f = 4\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + f^2 - 4\,f - 4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + f^2 - 4\,f - 4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{(2\,x)} + ce^{(-2\,x)}.$$

Corrigé 87. ← page 18

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{3} + 2, -1, -\sqrt{3} + 2\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{3} - 2\right)\left(X - \sqrt{3} - 2\right)(X + 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{3} + 2\right) \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{3} + 2\right) \mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 4\,f + \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 3\,f^2 - 3\,f + \mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{3} + 2, -1, -\sqrt{3} + 2\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{3} + 2\right) \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{3} + 2\right) \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera

plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 3f^2(y) - 3f(y) = y^{(3)} - 3y'' - 3y' = -y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - 3\,f = -\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - 3\,f + \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - 3\,f + \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\sqrt{3}+2\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{\left(x\left(\sqrt{3}+2\right)\right)} + ce^{\left(-x\left(\sqrt{3}-2\right)\right)}.$$

Corrigé 88. ← page 18

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2\,X+\sqrt{13}-1\right)\left(2\,X-\sqrt{13}-1\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f-3\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-2\,f^2-2\,f+3\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{1, -\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 2f^2(y) - 2f(y) = y^{(3)} - 2y'' - 2y' = -3y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2\,f^2 - 2\,f = -3\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2\,f^2 - 2\,f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}+1\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{13}-1\right)\right)}.$$

Corrigé 89. ← page 18

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{5}+2, \sqrt{5}+2, -1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{5} - 2\right)\left(X - \sqrt{5} - 2\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 4\,f - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - 3\,f^2 - 5\,f - \mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{5}+2, \sqrt{5}+2, -1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 3f^2(y) - 5f(y) = y^{(3)} - 3y'' - 5y' = y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 3\,f^2 - 5\,f = \mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - 3\,f^2 - 5\,f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 3\,f^2 - 5\,f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\sqrt{5}+2\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{\left(x\left(\sqrt{5}+2\right)\right)} + ce^{\left(-x\left(\sqrt{5}-2\right)\right)}.$$

Corrigé 90. ← page 19

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X - 2$ et $X^2 + 2$ sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X - 2$ admet 2 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 2 donne : $6 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) &= \ker\left((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)\right)\\ &= \ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 4\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3 - 2\,f^2 + 2\,f - 4\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en

deux temps, en démontrant que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 2$ par $X - 2$. On a en effet :

$$X^2 + 2 = (X - 2)\,Q + 6,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + 2\vec{x} = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 6\vec{x}. \tag{$\dagger$}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 - 2X^2 + 2X - 4 = (X - 2)(X^2 + 2)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 - 2f^2 + 2f - 4\mathrm{Id}_E = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right) = \left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E). \tag{$\ddagger$}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{6}(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité ($\dagger$) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{6} f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\
&= (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{6} f^2 + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{6}\left(f^3 - 2f^2 + 2f - 4\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{6}\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)((f - 2\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{6}\left(f^3 - 2f^2 + 2f - 4\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x})) \\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant ($\dagger$) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $6\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel

que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + 2\vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -2\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{y} & & & + & f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & 4\vec{y} & - & 2\vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned} (f - 2\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - 2\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{6}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{3}\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{3}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{2}{3}\vec{x}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + 2f(\vec{x}) - 4\vec{x}\right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - 2f^2 + 2f - 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + 2\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{6}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{3}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = 2f^2 - 2f + 4\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = 2f^3 - 2f^2 + 4f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{6}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{3}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + 2\mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{6}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{3}f^2(\vec{x}) + \frac{4}{3}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{6}X^4 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{4}{3}$ par le polynôme annulateur $X^3 - 2X^2 + 2X - 4$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{6}X^4 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{4}{3} = \left(X^3 - 2X^2 + 2X - 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{3}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{6}f^4+\frac{1}{3}f^2+\frac{4}{3}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3-2f^2+2f-4\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{6}f-\frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-2f^2(y)+2f(y)-4y=y^{(3)}-2y''+2y'-4y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-2f^2+2f-4\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-2f^2+2f-4\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-2f^2+2f-4\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\iff f(y)-2y=0\iff y'=2y.$$

Autrement dit : $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=2y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{2x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Ensuite :

$$y\in\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)\iff f^2(y)+2y=0\iff y''+2y=0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+2=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i\sqrt{2}$ et $r_2=-i\sqrt{2}$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y:x\mapsto b\cos\left(\sqrt{2}x\right)+c\sin\left(\sqrt{2}x\right),\ \text{avec }(b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y\in E=\ker(f-2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-2\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+2\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{2x}+b\cos\left(\sqrt{2}x\right)+c\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Corrigé 91. ← page 19

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\frac{1}{4}\left(2X+\sqrt{5}-1\right)\left(2X-\sqrt{5}-1\right)(X+1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f+\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-f-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-2\,f-\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - 2f(y) = y^{(3)} - 2y' = y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - 2\,f = \mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3-2\,f-\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - 2\,f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f+\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f+\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{\left(\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}+1\right)\right)} + ce^{\left(-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}.$$

Corrigé 92. ← page 19

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, -5, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+5)(X+1)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f+5\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f+\mathrm{Id}_E) &= (f+5\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3+5\,f^2-f-5\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, -5, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 5f^2(y) - f(y) = y^{(3)} + 5y'' - y' = 5y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 5\,f^2 - f = 5\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3+5\,f^2-f-5\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+5\,f^2-f-5\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f+5\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 5y = 0 \iff y' = -5y.$$

Autrement dit : $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -5y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-5\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f+5\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+5\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-5\,x} + ce^{(-x)} + be^{x}.$$

Corrigé 93. ← page 19

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{-\sqrt{22}, \sqrt{22}, 1\right\}$. D'après le

critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X+\sqrt{22}\right)\left(X-\sqrt{22}\right)(X-1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{22}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{22}\mathrm{Id}_E\right) &= (f-\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-22\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-f^2-22\,f+22\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{22},\sqrt{22},1\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2\left(y\right)=f\left(y'\right)=\left(y'\right)'=y''$, et :

$$f^3\left(y\right)=f\left(f^2\left(y\right)\right)=f\left(y''\right)=\left(y''\right)'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $\left(f\left(y\right)\right)^2$ et $\left(f\left(y\right)\right)^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3\left(y\right)-f^2\left(y\right)-22f\left(y\right)+22y=y^{(3)}-y''-22y'+22y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-f^2-22\,f+22\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-f^2-22\,f+22\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-f^2-22\,f+22\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\iff f\left(y\right)-y=0\iff y'=y.$$

Autrement dit : $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^x$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y\in E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{22}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^x+be^{\left(\sqrt{22}x\right)}+ce^{\left(-\sqrt{22}x\right)}.$$

Corrigé 94. ← page 19

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f)\subseteq\left\{-\sqrt{70},\sqrt{70},7\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme

$\left(X+\sqrt{70}\right)\left(X-\sqrt{70}\right)(X-7)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f-7\mathrm{Id}_E)\circ\left(f-\sqrt{70}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\sqrt{70}\mathrm{Id}_E\right) &= (f-7\mathrm{Id}_E)\circ\left(f^2-70\mathrm{Id}_E\right)\\ &= f^3-7\,f^2-70\,f+490\mathrm{Id}_E\\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{-\sqrt{70},\sqrt{70},7\right\}$, et on a comme attendu : $E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y)=f(y')=(y')'=y''$, et :

$$f^3(y)=f\left(f^2(y)\right)=f(y'')=(y'')'=y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y\in E$:

$$f^3(y)-7f^2(y)-70f(y)+490y=y^{(3)}-7y''-70y'+490y=0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3-7\,f^2-70\,f+490\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3-7\,f^2-70\,f+490\mathrm{Id}_E)$, or $f^3-7\,f^2-70\,f+490\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$.
Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f+\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\iff f(y)-7y=0\iff y'=7y.$$

Autrement dit : $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=7y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{7\,x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y\in E=\ker(f-7\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f-7\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\sqrt{70}\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{7\,x}+be^{\left(\sqrt{70}x\right)}+ce^{\left(-\sqrt{70}x\right)}.$$

Corrigé 95. ← page 20

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+56$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+56$

admet -56 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -56 donne : $3137 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f + 56\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f + 56\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\Big) \\ &= \ker(f^3 + 56\, f^2 + f + 56\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+56\, f^2+f+56\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+56\, f^2+f+56\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.

Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f + 56\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f + 56\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de $X^2 + 1$ par $X + 56$. On a en effet :

$$X^2 + 1 = (X + 56)\, Q + 3137,$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2\,(\vec{x}) + \vec{x} = (f + 56\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}) + 3137\vec{x}. \tag{†}$$

Remarquons également que l'on a : $X^3 + 56X^2 + X + 56 = (X + 56)\,(X^2 + 1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f + 56\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$:

$$f^3 + 56\, f^2 + f + 56\mathrm{Id}_E = (f + 56\mathrm{Id}_E) \circ \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big) \circ (f + 56\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

Preuve de l'égalité $E = F + G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 56\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{3137} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{3137}\vec{x}, \qquad \text{et :} \quad \vec{z} = \frac{1}{3137}\,(f + 56\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f + 56\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f + 56\mathrm{Id}_E)\,(\vec{y}) &= (f + 56\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3137} f^2\,(\vec{x}) + \frac{1}{3137}\vec{x}\right) \\ &= (f + 56\mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3137}\, f^2 + \frac{1}{3137}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x}) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3137}\Big(f^3 + 56\, f^2 + f + 56\mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{x}) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 56\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\,(\vec{z}) &= \frac{1}{3137}\Big(f^2 + \mathrm{Id}_E\Big)\,((f + 56\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{3137}\Big(f^3 + 56\, f^2 + f + 56\mathrm{Id}_E\Big)\,(Q(f)(\vec{x})) \\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f+56\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Donc : $E = \ker(f+56\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f+56\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}\in\ker(f+56\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f+56\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$, et : $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{x})=\vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $3137\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x}\in\ker(f+56\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x}=\vec{0}$.
Ayant démontré : $E=\ker(f+56\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E=\ker(f+56\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+56\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E=\ker(f+56\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x}\in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f+56\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y}\in\ker(f+56\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y})=-56\vec{y}$, et la condition $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z})+\vec{z}=\vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z})=-\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vec{x} & = & \vec{y} \quad +\vec{z} \\ f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) \quad +f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) \quad +f^2(\vec{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} \vec{x} & = & & \vec{y} & + \ \vec{z} & \\ f(\vec{x}) & = & - & 56\vec{y} & & + \ f(\vec{z}) \\ f^2(\vec{x}) & = & & 3136\vec{y} & - \ \vec{z} & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3\leftarrow L_3+L_1$, ou $L_3\leftarrow L_3-3136L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y}=\frac{1}{3137}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3137}\vec{x},\qquad \text{et :}\qquad \vec{z}=-\frac{1}{3137}f^2(\vec{x})+\frac{3136}{3137}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x}\in E$. Posons : $\vec{y}=\frac{1}{3137}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3137}\vec{x}$, et : $\vec{z}=-\frac{1}{3137}f^2(\vec{x})+\frac{3136}{3137}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ d'une part, et $\vec{y}\in\ker(f+56\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y}+\vec{z}=\vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y}\in\ker(f+56\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z}\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f+56\mathrm{Id}_E)(\vec{y})=\vec{0}$ et $(f^2+\mathrm{Id}_E)(\vec{z})=\vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f+56\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+56\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3137}f^2(\vec{x})+\frac{1}{3137}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3137}f^3(\vec{x})+\frac{1}{3137}f(\vec{x})\right)-\left(-\frac{56}{3137}f^2(\vec{x})-\frac{56}{3137}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{3137}\left(f^3(\vec{x})+56f^2(\vec{x})+f(\vec{x})+56\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3+56\,f^2+f=-56\mathrm{Id}_E$; donc $\vec{y}\in\ker(f+56\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2+\mathrm{Id}_E\right)(\vec{z})=-\frac{1}{3137}f^4(\vec{x})+\frac{3135}{3137}f^2(\vec{x})+\frac{3136}{3137}\vec{x},$$

et comme : $f^3=-56\,f^2-f-56\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4=-56\,f^3-f^2-56\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{3137}f^4(\vec{x})+\frac{3135}{3137}f^2(\vec{x})+\frac{3136}{3137}\vec{x}=\vec{0}$, donc

$\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 56\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 56\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{3137}f^4(\vec{x}) + \frac{3135}{3137}f^2(\vec{x}) + \frac{3136}{3137}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{3137}X^4 + \frac{3135}{3137}X^2 + \frac{3136}{3137}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 56X^2 + X + 56$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{3137}X^4 + \frac{3135}{3137}X^2 + \frac{3136}{3137} = \left(X^3 + 56X^2 + X + 56\right) \cdot \left(-\frac{1}{3137}X + \frac{56}{3137}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3137}f^4 + \frac{3135}{3137}f^2 + \frac{3136}{3137}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 56\,f^2 + f + 56\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{3137}f + \frac{56}{3137}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 56f^2(y) + f(y) = y^{(3)} + 56y'' + y' = -56y$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 56\,f^2 + f = -56\mathrm{Id}_E$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 56\,f^2 + f + 56\mathrm{Id}_E)$), or $f^3 + 56\,f^2 + f + 56\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 56\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 56\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 56\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 56y = 0 \iff y' = -56y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 56\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -56y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-56\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 56\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + 56\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = ae^{-56\,x} + b\cos(x) + c\sin(x).$$

Corrigé 96. ← page 20

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{1, -1, -2\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X + 2)(X + 1)(X - 1)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) &= (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{1, -1, -2\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 2f^2(y) - f(y) - 2y = y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 2\,f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 2y = 0 \iff y' = -2y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-2\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $y \in E = \ker(f + 2\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+2\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-2x} + ce^{(-x)} + be^{x}.$$

Corrigé 97. ← page 20

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
   Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X+3$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X+3$ admet -3 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en -3 donne : $10 \neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f+3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f+3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3+3\,f^2+f+3\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

   Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3+3\,f^2+f+3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3+3\,f^2+f+3\mathrm{Id}_E) = E$. D'où le résultat.
   Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X+3$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X+3)\,Q + 10,$$

   avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x} \in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x}) + \vec{x} = (f+3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 10\vec{x}. \tag{†}$$

   Remarquons également que l'on a : $X^3+3X^2+X+3 = (X+3)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3+3\,f^2+f+3\mathrm{Id}_E = (f+3\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f+3\mathrm{Id}_E)\,. \tag{‡}$$

   Preuve de l'égalité $E = F+G$. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = \frac{1}{10}(f+3\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

   Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f+3\mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f+3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f+3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}\right)\\ &= (f+3\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{1}{10}\,f^2 + \frac{1}{10}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\ &\overset{(‡)}{=} \frac{1}{10}\Big(f^3+3\,f^2+f+3\mathrm{Id}_E\Big)(\vec{x})\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0},\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{10}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f + 3\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{10}\left(f^3 + 3\,f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\ &\overset{(*)}{=} \vec{0}.\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant $(\dagger)$ avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $10\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = -3\vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccll}\vec{x} &=& \vec{y} & +\vec{z}\\ f(\vec{x}) &=& f(\vec{y}) & +f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccrcrcl}\vec{x} &=& \vec{y} &+& \vec{z} & & \\ f(\vec{x}) &=& -\ 3\vec{y} & & & + & f(\vec{z})\\ f^2(\vec{x}) &=& 9\vec{y} &-& \vec{z} & & \end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{z} = -\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f + 3\mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f + 3\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{10}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{10}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{10}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{10}f(\vec{x})\right) - \left(-\frac{3}{10}f^2(\vec{x}) - \frac{3}{10}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{10}\left(f^3(\vec{x}) + 3f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) + 3\vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 + 3\,f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) + \frac{4}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = -3\,f^2 - f - 3\mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = -3\,f^3 - f^2 - 3\,f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) + \frac{4}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{10}f^4(\vec{x}) + \frac{4}{5}f^2(\vec{x}) + \frac{9}{10}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{10}X^4 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{9}{10}$ par le polynôme annulateur $X^3 + 3X^2 + X + 3$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{10}X^4 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{9}{10} = \left(X^3 + 3X^2 + X + 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{10}\,f^4 + \frac{4}{5}\,f^2 + \frac{9}{10}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 + 3\,f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(-\frac{1}{10}\,f + \frac{3}{10}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 3f^2(y) + f(y) + 3y = y^{(3)} + 3y'' + y' + 3y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 + 3\,f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 + 3\,f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 + 3\,f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_E) \iff f(y) + 3y = 0 \iff y' = -3y.$$

Autrement dit : $\ker(f + 3\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -3y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-3\,x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2+1=0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1=i$ et $r_2=-i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x)\,,\ \text{avec } (b,c)\in\mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f+3\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+3\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x) = ae^{-3x} + b\cos(x) + c\sin(x)\,.$$

Corrigé 98. ← page 20

1. Selon les résultats que vous connaissez, il y a plusieurs façons de traiter cette première question. Je propose donc plusieurs démonstrations, de la plus conceptuelle à la moins exigeante en termes de pré-requis (mais elle est plus calculatoire).
Démonstration avec le lemme des noyaux. On note que $X-1$ et X^2+1 sont deux polynômes sans racine (complexe) commune : on vérifie en effet immédiatement que $X-1$ admet 1 pour unique racine, mais que le second polynôme évalué en 1 donne : $2\neq 0$. Ils sont donc premiers entre eux, et par le lemme des noyaux on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E) &= \ker\Big((f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\Big)\\ &= \ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E).\end{aligned}$$

Or d'après l'égalité $(*)$ on a : $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $\ker(f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E)=E$. D'où le résultat.
Démonstration avec le lemme des noyaux, mais sans le dire. Nous procédons en deux temps, en démontrant que $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$, puis en montrant que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. Pour les deux vérifications, nous utiliserons la division euclidienne de X^2+1 par $X-1$. On a en effet :

$$X^2+1 = (X-1)\,Q+2,$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (l'expression explicite de Q n'est d'aucune utilité dans le raisonnement). En évaluant cette égalité en f, puis en appliquant l'endomorphisme ainsi obtenu en un vecteur $\vec{x}\in E$, nous obtenons :

$$f^2(\vec{x})+\vec{x} = (f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}) + 2\vec{x}. \qquad (\dagger)$$

Remarquons également que l'on a : $X^3-X^2+X-1=(X-1)(X^2+1)$. En évaluant cette égalité en f, on obtient une autre identité qui nous servira dans la démonstration de la somme $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$:

$$f^3-f^2+f-\mathrm{Id}_E = (f-\mathrm{Id}_E)\circ\Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big) = \Big(f^2+\mathrm{Id}_E\Big)\circ(f-\mathrm{Id}_E)\,. \qquad (\ddagger)$$

Preuve de l'égalité $E=F+G$. Soit $\vec{x}\in E$. On doit montrer qu'il existe $(\vec{y},\vec{z})\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)\times\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Posons pour cela :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x},\qquad\text{et :}\qquad \vec{z}=\frac{1}{2}(f-\mathrm{Id}_E)\circ Q(f)(\vec{x}).$$

Isoler $\vec{x}$ dans l'égalité (†) implique immédiatement que l'on a : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Vérifions que l'on a bien : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\
&= (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(\vec{x})\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0},
\end{aligned}$$

donc : $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$; de même, toujours grâce à l'identité $(*)$ de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) &= \frac{1}{2}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E) \circ Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)(Q(f)(\vec{x}))\\
&\overset{(*)}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

donc : $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien démontré que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Preuve que la somme est directe. Montrons : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$, et : $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}$. En considérant (†) avec ce vecteur $\vec{x}$, on a donc : $2\vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d'où le résultat : on a montré que si $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.
Ayant démontré : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et que les deux sous-espaces sont en somme directe, on peut conclure : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Démonstration très terre-à-terre sans le lemme des noyaux. Nous allons démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un *unique* couple $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ (l'existence du couple montre que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et l'unicité montre qu'ils sont en somme directe). Pour cela, nous allons procéder par analyse et synthèse (l'analyse démontrera en même temps qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui conviennent, ce qui montrera l'unicité).
Analyse. Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y}, \vec{z}) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Pour déterminer $\vec{y}$ et $\vec{z}$, nous faisons le constat habituel suivant : nous avons deux inconnues pour une seule équation. C'est insuffisant. Nous devons trouver une autre équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$; pour cela, appliquons f à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, autant de fois que nécessaire pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Pour voir où aboutir, notons que du fait que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, on a : $f(\vec{y}) = \vec{y}$, et la condition $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ implique : $f^2(\vec{z}) + \vec{z} = \vec{0}$, puis : $f^2(\vec{z}) = -\vec{z}$. Par conséquent, appliquer f deux fois à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ suffit, puisque cela nous donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & +\vec{z} \\
f(\vec{x}) & = & f(\vec{y}) & +f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & f^2(\vec{y}) & +f^2(\vec{z})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc}
\vec{x} & = & \vec{y} & + & \vec{z} & \\
f(\vec{x}) & = & \vec{y} & & & + \ f(\vec{z}) \\
f^2(\vec{x}) & = & \vec{y} & - & \vec{z} &
\end{array}\right.$$

Nous avons là un système à trois équations, avec trois inconnues ($\vec{y}$, $\vec{z}$, et $f(\vec{z})$ qui ne nous intéresse pas) : nous savons résoudre. Il suffit même de faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, pour avoir immédiatement que si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent, alors :

$$\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}, \quad \text{et :} \quad \vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$. Posons : $\vec{y} = \frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, et : $\vec{z} = -\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$. Vérifions qu'on a bien $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ d'une part, et $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ d'autre part. La première vérification est immédiate, étant donné que par un calcul direct : $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$. Vérifions donc que $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$: cela revient à démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) = \vec{0}$ et $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(\vec{z}) = \vec{0}$. Or :

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)(\vec{y}) &= (f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}f^3(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{2}f^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f^3(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \vec{x}\right)\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'énoncé : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$; donc $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Par un argument analogue :

$$\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)(\vec{z}) = -\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x},$$

et comme : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$, on a aussi : $f^4 = f^3 - f^2 + f$, ce qui permet de simplifier l'égalité précédente pour en déduire : $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
Ceci achève de démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{z} \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ uniques tels que : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Donc : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Pour simplifier $-\frac{1}{2}f^4(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}$, une démarche plus méthodique aurait été d'effectuer la division euclidienne de $-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}$ par le polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1$, pour remarquer que :

$$-\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2} = \left(X^3 - X^2 + X - 1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$$

(le reste est nul), de sorte que trivialement :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E &= \left(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E\right)\circ\left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\ &= 0_{\mathrm{L}(E)}.\end{aligned}$$

Plus généralement, la connaissance d'un polynôme annulateur permet de simplifier TOUT polynôme d'endomorphisme de degré supérieur, c'est déjà l'idée à la base de la méthode de calcul de puissances matricielles par la division euclidienne (c'est justement le principe de cette division).

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) + f(y) - y = y^{(3)} - y'' + y' - y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une application dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces deux sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(y) - y = 0 \iff y' = y.$$

Autrement dit : $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \iff f^2(y) + y = 0 \iff y'' + y = 0.$$

Autrement dit : $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$. Elle admet immédiatement pour solutions complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ (j'ose espérer que vous n'avez pas besoin de calculer un discriminant pour vous en rendre compte). La théorie des équations différentielles linéaires du second ordre nous permet d'en déduire que les applications vérifiant la relation ci-dessus sont celles de la forme :

$$y : x \mapsto b\cos(x) + c\sin(x), \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluons. On a $y \in E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = ae^x + b\cos(x) + c\sin(x).$$

Corrigé 99. ← page 20

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{4, -2, -1\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $(X+2)(X+1)(X-4)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - (4)\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - (-2)\,\mathrm{Id}_E) &= (f + \mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2f - 8\mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 - f^2 - 10f - 8\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\{4, -2, -1\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) - f^2(y) - 10f(y) - 8y = y^{(3)} - y'' - 10y' - 8y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3 - f^2 - 10\,f - 8\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E = \ker(f^3 - f^2 - 10\,f - 8\mathrm{Id}_E)$, or $f^3 - f^2 - 10\,f - 8\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E) \subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y \in E$, on a :

$$y \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \iff f(y) + y = 0 \iff y' = -y.$$

Autrement dit : $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' = -y$, qui sont de la forme $y : x \mapsto ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$.
Concluons. On a $y \in E = \ker(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f - (4)\,\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f - (-2)\,\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^{-x} + be^{(4\,x)} + ce^{(-2\,x)}.$$

Corrigé 100. ← page 21

1. D'après le critère de diagonalisation, pour que la décomposition en somme directe demandée soit vraie, il suffit de démontrer que f est diagonalisable ; de plus, les noyaux dans le membre de droite semblent indiquer que : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \left\{\sqrt{2} + 1, -22, -\sqrt{2} + 1\right\}$. D'après le critère polynomial de diagonalisation, il suffit pour cela de démontrer que le polynôme $\left(X + \sqrt{2} - 1\right)\left(X - \sqrt{2} - 1\right)(X + 22)$, qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$, est un polynôme annulateur de f. Or :

$$\begin{aligned}(f + 22\mathrm{Id}_E) \circ \left(f - \left(\sqrt{2} + 1\right)\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f - \left(-\sqrt{2} + 1\right)\mathrm{Id}_E\right) &= (f + 22\mathrm{Id}_E) \circ \left(f^2 - 2\,f - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= f^3 + 20\,f^2 - 45\,f - 22\mathrm{Id}_E \\ &\overset{(*)}{=} 0_{\mathrm{L}(E)},\end{aligned}$$

d'où le résultat : f est diagonalisable, ses valeurs propres sont dans $\left\{\sqrt{2} + 1, -22, -\sqrt{2} + 1\right\}$, et on a comme attendu : $E = \ker(f + 22\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(\sqrt{2} + 1\right)\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \left(-\sqrt{2} + 1\right)\mathrm{Id}_E)$.

2. Appelons E l'espace vectoriel des applications vérifiant (†). On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E (pour le fait que f soit bien à valeurs dans E, on donnera plus bas un argument rapide). On remarque que pour toute application y de E, on a : $f^2(y) = f(y') = (y')' = y''$, et :

$$f^3(y) = f\left(f^2(y)\right) = f(y'') = (y'')' = y^{(3)}$$

(remarquez bien que vous obtenez un résultat totalement différent si vous calculez à tort $(f(y))^2$ et $(f(y))^3$), si bien que finalement, pour toute $y \in E$:

$$f^3(y) + 20f^2(y) - 45f(y) - 22y = y^{(3)} + 20y'' - 45y' - 22y = 0$$

car y vérifie (†) par définition de E. On en déduit que l'endomorphisme f de E vérifie : $f^3+20\,f^2-45\,f-22\mathrm{Id}_E=0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette identité prouve en passant que $E=\ker(f^3+20\,f^2-45\,f-22\mathrm{Id}_E)$, or $f^3+20\,f^2-45\,f-22\mathrm{Id}_E$ commute avec f en tant que polynôme en f, donc son noyau est stable par f : ceci démontre à peu de frais ce que j'annonçai plus haut, à savoir que $f(E)\subseteq E$). Donc E et f vérifient les hypothèses de la première question de cet exercice, et on en déduit : $E=\ker(f+22\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : toute application de E (qu'on cherche justement à expliciter dans cette question) s'écrit comme somme d'une application dans $\ker(f+22\mathrm{Id}_E)$, dans $\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et dans $\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$. Or il s'avère qu'on sait expliciter ces trois sous-espaces vectoriels. En effet, pour toute application $y\in E$, on a :

$$y\in\ker(f+22\mathrm{Id}_E)\iff f\,(y)+22y=0\iff y'=-22y.$$

Autrement dit : $\ker(f+22\mathrm{Id}_E)$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'=-22y$, qui sont de la forme $y:x\mapsto ae^{-22\,x}$ avec $a\in\mathbb{R}$. On trouve de même pour les éléments de $\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$.

Concluons. On a $y\in E=\ker(f+22\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si y est somme d'un élément de $\ker(f+22\mathrm{Id}_E)$, de $\ker(f-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$ et de $\ker(f-\left(-\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Id}_E)$, si et seulement si, d'après l'explicitation ci-dessus de ces noyaux :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ae^{-22\,x}+be^{\left(x\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}+ce^{\left(-x\left(\sqrt{2}-1\right)\right)}.$$