Image et noyau d'une matrice

💡 Ces exercices vous font réviser comment la méthode du pivot de Gauß permet de déterminer le noyau et l'image d'une matrice, après l'avoir échelonnée convenablement.

Exercice 1. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & -2 \\ -3 & 21 & -6 & 3 \\ 0 & 23 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 10

Exercice 2. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 10

Exercice 3. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -10 & 10 & 10 & 5 \\ -4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 11

Exercice 4. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -2 & 16 & 28 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 14 & 1 \\ 1 & -8 & -14 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 11

Exercice 5. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -18 & 16 & 22 \\ -3 & -3 & 15 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 11

Exercice 6. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -12 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & 2 & -4 \\ -14 & 3 & 3 & 4 \\ 26 & 2 & 16 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 12

Exercice 7. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -9 & -19 & 5 & -5 \\ 3 & -9 & 2 & 4 \\ 3 & -11 & 4 & 2 \\ -12 & -8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 12

Exercice 8. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 21 & 13 & 12 & -5 \\ 8 & -2 & 1 & -3 \\ -15 & -1 & -4 & 5 \\ -4 & -10 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 13

Exercice 9. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -29 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 14

Exercice 10. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 14

Exercice 11. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 7 \\ -7 & 9 & -6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 15

Exercice 12. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & -2 \\ -15 & -5 & -5 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 15

Exercice 13. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 16

Exercice 14. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 16

Exercice 15. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 11 & -11 & -11 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 16

Exercice 16. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 & -2 & 12 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & -11 \\ 2 & 4 & 2 & 8 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -7 & -6 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 17

Exercice 17. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ -15 & -2 & 0 & -13 & 17 \\ -7 & -3 & 2 & 6 & 0 \\ 10 & 3 & -2 & -3 & -3 \\ -4 & -5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 17

Exercice 18. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 18

Exercice 19. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -18 & -6 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 18

Exercice 20. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -8 & -22 & 6 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 19

Exercice 21. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 5 & -3 & 8 \\ -1 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ -5 & -14 & 19 & -17 & 12 \\ -5 & 10 & -5 & -1 & 4 \\ 7 & -3 & -8 & 5 & -9 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 20

Exercice 22. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 20

Exercice 23. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -8 & -6 \\ -3 & -9 & -9 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 21

Exercice 24. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 21

Exercice 25. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 22

Exercice 26. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 2 \\ 17 & 8 & 5 & -7 & 1 \\ -10 & -26 & -5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 22

Exercice 27. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 23

Exercice 28. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 23

Exercice 29. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 18 & -2 & 3 \\ -2 & -27 & 1 & 0 \\ 1 & 27 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 24

Exercice 30. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 & -2 \\ 6 & 12 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 24

Exercice 31. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 25

Exercice 32. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 3 & -14 & -2 \\ 0 & -12 & 2 \\ 3 & -14 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 25

Exercice 33. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 25

Exercice 34. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 5 & 7 & 3 \\ 28 & 5 & 13 & 14 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 30 & -12 & -3 & -4 & -10 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 26

Exercice 35. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 & 3 \\ -6 & -5 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 27

Exercice 36. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 27

Exercice 37. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 12 \\ -5 & 8 & -12 \\ 5 & -8 & 12 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 27

Exercice 38. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 \\ 10 & -8 & 20 \\ -2 & -20 & -4 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 28

Exercice 39. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 28

Exercice 40. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & -4 & -12 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 12 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 28

Exercice 41. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 18 & -8 & 7 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 29

Exercice 42. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 23 & 8 & -2 \\ -8 & 3 & -6 & 0 & 4 \\ 1 & -14 & -15 & -7 & 0 \\ 4 & -7 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & -27 & -26 & -15 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 29

Exercice 43. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \\ -21 & -20 & -20 & -20 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 30

Exercice 44. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -9 & -19 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 31

Exercice 45. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 31

Exercice 46. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 1 & -2 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & -7 \\ 5 & 1 & 14 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 32

Exercice 47. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & 2 & -8 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & -12 & 3 & -12 & -6 \\ -2 & -8 & 2 & -8 & -4 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 32

Exercice 48. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ -12 & -2 & 6 & -2 & 4 \\ -12 & -2 & 6 & -2 & 4 \\ 18 & 3 & -9 & 3 & -6 \\ 6 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 33

Exercice 49. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 33

Exercice 50. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 2 & -4 \\ -20 & -8 & 4 & -8 \\ -5 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 33

Exercice 51. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -8 & -5 & -5 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 34

Exercice 52. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & 1 & 4 \\ 10 & -3 & -5 & 7 & -17 \\ -4 & 21 & 3 & -17 & -13 \\ -2 & 9 & 3 & -9 & -5 \\ -6 & 0 & -8 & 8 & 12 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 34

Exercice 53. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 35

Exercice 54. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 35

Exercice 55. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -18 & -6 & 4 & 12 \\ -2 & -8 & -1 & -8 \\ 0 & -11 & -2 & -7 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 36

Exercice 56. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 5 & -20 \\ 2 & -1 & -1 & -8 \\ 25 & 28 & 28 & 8 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 36

Exercice 57. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 12 & 10 & 9 \\ -5 & 28 & -6 & -1 \\ 3 & -24 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 37

Exercice 58. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -4 & -6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 & 6 & 8 \\ -5 & 4 & 0 & 6 & -4 \\ 21 & -1 & 3 & 10 & 24 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 38

Exercice 59. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -2 \\ 8 & -12 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 38

Exercice 60. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 39

Exercice 61. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 39

Exercice 62. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ -8 & 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 39

Exercice 63. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 40

Exercice 64. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & -15 & -4 & -18 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -18 & -7 \\ 2 & -5 & 0 & 18 & 11 \\ 5 & -30 & -7 & -18 & 17 \\ 2 & -10 & -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 40

Exercice 65. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 5 & -22 & -2 & -1 & 9 \\ 4 & -23 & 2 & -2 & 15 \\ -2 & 1 & 8 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 40

Exercice 66. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -3 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 41

Exercice 67. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & -9 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 42

Exercice 68. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 42

Exercice 69. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & -15 & -2 & 0 \\ -2 & -16 & -4 & -2 \\ -5 & -9 & -4 & -3 \\ -5 & -22 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 42

Exercice 70. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 43

Exercice 71. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 44

Exercice 72. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & -17 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 44

Exercice 73. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -13 & 3 \\ -4 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ -19 & 2 & -1 & 21 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 45

Exercice 74. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -5 & -8 & 12 \\ 2 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 8 & -6 & -5 & 4 & 12 \\ 4 & -2 & -6 & 0 & 6 \\ 4 & -9 & -9 & -6 & 16 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 45

Exercice 75. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 46

Exercice 76. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -25 & -3 & 8 \\ 2 & -6 & -4 & 16 \\ -3 & -20 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 47

Exercice 77. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 47

Exercice 78. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 48

Exercice 79. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -11 & 10 & -1 \\ 11 & -10 & 1 \\ 11 & -10 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 48

Exercice 80. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 15 & 18 \\ -3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -7 & 23 & 4 \\ -1 & 10 & -29 & 27 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 48

Exercice 81. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -8 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 49

Exercice 82. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 28 \\ -3 & -3 & -28 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 49

Exercice 83. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 & -12 \\ 3 & 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 50

Exercice 84. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 1 \\ -1 & -12 & -1 \\ -2 & -24 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 50

Exercice 85. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 & 8 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & -13 \\ -1 & 3 & -3 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 14 & -6 & -2 & -2 & 12 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 50

Exercice 86. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ -3 & -2 & 11 & -2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 51

Exercice 87. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 52

Exercice 88. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -12 & -1 & 9 & -1 \\ -12 & -1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 52

Exercice 89. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 53

Exercice 90. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 10 & -25 & -5 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 53

Exercice 91. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -14 & 6 & -4 & 0 & -8 \\ -27 & 2 & -2 & -1 & -6 \\ 28 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -16 & 2 & -2 & 0 & -6 \\ 5 & 8 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 54

Exercice 92. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 54

Exercice 93. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 55

Exercice 94. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 55

Exercice 95. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 56

Exercice 96. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 56

Exercice 97. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 56

Exercice 98. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 30 & 17 \\ -11 & 3 & -15 & -17 \\ -3 & 2 & -10 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 57

Exercice 99. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & 17 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -12 & 0 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 57

Exercice 100. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 8 & 4 & -4 \\ 18 & -18 & -12 & -6 & 6 \\ 15 & -21 & -17 & -10 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 9 & 10 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, *à l'aide de la méthode du pivot.* → page 58

Corrigé 1. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 1

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 8 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 21 & -6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 21 & -6 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 23 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) && (C_4 \leftrightarrow C_1) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 21 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 23 & -14 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -22 & 4 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) && (C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 21 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -14 & 23 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -22 & -5 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) && (C_4 \leftrightarrow C_2) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -14 & 23 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -14 & 23 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) && \begin{array}{l}(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 7C_2)\end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{72}{7} \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{23}{14} \\ -5 & 4 & -14 & 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{46}{7} \end{array}\right) && (C_4 \leftarrow C_4 + \tfrac{23}{14} C_3)
\end{aligned}
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{72}{7} \\ 1 \\ \frac{23}{14} \\ \frac{46}{7} \end{pmatrix} \right).
$$

Corrigé 2. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 1

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && (C_2 \leftrightarrow C_1) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1)\end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) && (C_4 \leftrightarrow C_2) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) && \begin{array}{l}(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2)\end{array}
\end{aligned}
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-2\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 3. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 1

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\5\\2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 4. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 1

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 16 & 28 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 14 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & -14 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 8C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 14C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}8\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}14\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 5. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 1

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & 16 & 22 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & -18 & 22 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & -18 & 54 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 16 & -18 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 6. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 1

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -12 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 26 & 2 & 16 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -12 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -14 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 26 & 16 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -16 & 0 & 0 & 1 & 12 & 1 & -2 \\ 3 & 22 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 50 & 18 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 12C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -16 & 0 & 0 & 1 & 12 & -2 & 1 \\ 3 & 22 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 50 & -6 & 18 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -16 & 0 & 0 & 1 & 12 & -2 & -5 \\ 3 & 22 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 50 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 + 3C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 22 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 7. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 1

conclure :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -9 & -19 & 5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -8 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & -19 & -9 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -9 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -11 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & -12 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{7}{5} & \frac{33}{5} & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{21}{5} & \frac{51}{5} & 6 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{21}{5} & -\frac{51}{5} & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{19}{5}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{9}{5}C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{7}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{33}{7} & \frac{30}{7} \\ 4 & \frac{21}{5} & 30 & 24 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{138}{7} & \frac{121}{7} \\ 1 & -\frac{21}{5} & -30 & -24 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{33}{7}C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{30}{7}C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{7}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{30}{7} & \frac{33}{7} \\ 4 & \frac{21}{5} & 24 & 30 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{121}{7} & \frac{138}{7} \\ 1 & -\frac{21}{5} & -24 & -30 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{7}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{30}{7} & -\frac{9}{14} \\ 4 & \frac{21}{5} & 24 & 0 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{121}{7} & -\frac{53}{28} \\ 1 & -\frac{21}{5} & -24 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{5}{4}C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{5} \\ \frac{21}{5} \\ -\frac{21}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \\ -24 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{14} \\ -\frac{53}{28} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 8. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 1

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 21 & 13 & 12 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & -1 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -10 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 13 & 12 & 21 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -4 & -15 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -10 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -\frac{49}{5} & -\frac{31}{5} & -\frac{23}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 12 & 8 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{37}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{13}{5} & \frac{12}{5} & \frac{21}{5} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{13}{5}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{12}{5}C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{21}{5}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{23}{5} & -\frac{31}{5} & -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{37}{5} & 1 & \frac{21}{5} & \frac{12}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{31}{23} & -\frac{49}{23} \\ -3 & -\frac{23}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -\frac{2}{23} & -\frac{18}{23} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{20}{23} & -\frac{180}{23} & 1 & \frac{21}{5} & -\frac{75}{23} & -\frac{146}{23} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{31}{23}C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{49}{23}C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{31}{23} & 10 \\ -3 & -\frac{23}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -\frac{2}{23} & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{20}{23} & 0 & 1 & \frac{21}{5} & -\frac{75}{23} & 23 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 - 9C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-5\\-3\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\frac{23}{5}\\6\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{2}{23}\\-\frac{20}{23}\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}10\\1\\-9\\23\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 9. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 1

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & 7 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -29 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -15 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -14 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 7C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + 2C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -15 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -14 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (C_5 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{23}{5} & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -\frac{104}{5} & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{76}{5} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & \frac{104}{5} & 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{29}{5} & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (C_3 \leftarrow C_3 + \tfrac{29}{5}C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & \frac{23}{5} & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -\frac{104}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & \frac{76}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & \frac{104}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{29}{5} & 0 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -\frac{81}{5} & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -\frac{28}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{52}{5} & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{29}{5} & 0 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftarrow C_4 - \tfrac{52}{5}C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\-1\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-\frac{28}{5}\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 10. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 1

conclure :

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2)
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).
$$

Corrigé 11. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 1

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -10 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -10 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 9 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{51}{7} & -\frac{17}{7} & 1 & \frac{10}{7} & -\frac{8}{7} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{10}{7}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{8}{7}C_1) \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -\frac{17}{7} & \frac{51}{7} & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{10}{7} \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_2)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -\frac{17}{7} & 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -2 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2)
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{17}{7} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).
$$

Corrigé 12. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -15 & -5 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -15 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \end{array}
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 13. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 14. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 15. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -11 & -11 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 + C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\11\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 16. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-3 & 3 & -5 & -2 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 10 & 0 & -11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 2 & 8 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & -2 & -2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & -2 & 5 & -7 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 3 & -5 & -3 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 10 & 2 & -11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & -2 & -2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-7 & -2 & 5 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\qquad (C_4 \leftrightarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 10 & 2 & -11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 16 & -18 & -10 & 46 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & -1 & 3 & 1 & -5 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 6 \\
-7 & -\frac{25}{2} & \frac{45}{2} & \frac{19}{2} & -48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{l}
(C_2 \leftarrow C_2 + \\
(C_3 \leftarrow C_3 - \\
(C_4 \leftarrow C_4 - \\
(C_5 \leftarrow C_5 + 6
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 10 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
8 & -10 & -18 & 16 & 46 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 3 & -1 & -5 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\
-7 & \frac{19}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{25}{2} & -48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\qquad (C_4 \leftrightarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & \frac{11}{2} \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
8 & -10 & 32 & 16 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\
-7 & \frac{19}{2} & -25 & -\frac{25}{2} & \frac{17}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{l}
(C_3 \leftarrow C_3 - 5 \\
\\
(C_5 \leftarrow C_5 + \frac{11}{2}
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{2} & 0 & -5 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
8 & -10 & -9 & 16 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-2 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 5 \\
-7 & \frac{19}{2} & \frac{17}{4} & -\frac{25}{2} & -25 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\qquad (C_5 \leftrightarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{88}{9} & \frac{131}{9} \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
8 & -10 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-2 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & -\frac{5}{2} & -3 \\
-7 & \frac{19}{2} & \frac{17}{4} & -\frac{89}{18} & -\frac{89}{9} & 0 & 0 & 1 & \frac{16}{9} & \frac{32}{9}
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{l}
(C_4 \leftarrow C_4 + \frac{16}{9} \\
(C_5 \leftarrow C_5 + \frac{32}{9}
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{88}{9} & -5 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
8 & -10 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-2 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{9} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & -\frac{5}{2} & 2 \\
-7 & \frac{19}{2} & \frac{17}{4} & -\frac{89}{18} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{16}{9} & 0
\end{array}\right)
\qquad (C_5 \leftarrow C_5 - 2
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes NULLES de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\8\\-2\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-10\\1\\\frac{19}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-9\\\frac{1}{2}\\\frac{17}{4}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-\frac{1}{9}\\-\frac{89}{18}\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right).
$$

Corrigé 17. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 2

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 2 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & -2 & 0 & -13 & 17 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & -2 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ -15 & -32 & 0 & 32 & 32 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -17 & 2 & 27 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 23 & -2 & -33 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -13 & 1 & 18 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -15 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -7 & -17 & 2 & 10 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 23 & -2 & -10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -13 & 1 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_2) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -15 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -7 & -17 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 5 \\ 10 & 23 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -13 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 5C_3) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + 5C_3) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\-15\\-7\\10\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-32\\-17\\23\\-13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\-2\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\5\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 18. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 19. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 2

conclure :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 8 & -18 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & -6 & -2 \\ -5 & -\frac{37}{3} & 33 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{17}{3} & 13 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & \frac{55}{3} & -35 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{8}{3}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 6C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -6 & \frac{8}{3} \\ -5 & 7 & 33 & -\frac{37}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 13 & -\frac{17}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & -35 & \frac{55}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{24}{7} & -\frac{6}{7} \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -\frac{8}{7} & -\frac{8}{21} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & \frac{52}{7} & \frac{52}{21} & 0 & 1 & -\frac{33}{7} & \frac{37}{21} \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{33}{7}C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{37}{21}C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{6}{7} & \frac{24}{7} \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{8}{21} & -\frac{8}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & \frac{52}{21} & \frac{52}{7} & 0 & 1 & \frac{37}{21} & -\frac{33}{7} \end{array}\right) \quad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{6}{7} & 6 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -\frac{8}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & \frac{52}{21} & 0 & 0 & 1 & \frac{37}{21} & -10 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{21} \\ \frac{52}{21} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 20. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -22 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -8 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -22 & -8 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 4 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{3}{2}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & \frac{3}{2} & 4 \end{array}\right) \quad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 21. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-7 & 6 & 5 & -3 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -2 & 5 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-5 & -14 & 19 & -17 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-5 & 10 & -5 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
7 & -3 & -8 & 5 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-3 & 6 & 5 & -7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -2 & 5 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-17 & -14 & 19 & -5 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 10 & -5 & -5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
5 & -3 & -8 & 7 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\quad (C_4 \leftarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -4 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-17 & -48 & -\frac{28}{3} & \frac{104}{3} & -\frac{100}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 8 & -\frac{20}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 1 & 2 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3}\\
5 & 7 & \frac{1}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{13}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{l}
(C_2 \leftarrow C_2 + \\
(C_3 \leftarrow C_3 + \\
(C_4 \leftarrow C_4 - \\
(C_5 \leftarrow C_5 +
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-17 & -\frac{100}{3} & -\frac{28}{3} & \frac{104}{3} & -48 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & \frac{4}{3} & -\frac{20}{3} & -\frac{8}{3} & 8 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 2\\
5 & \frac{13}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{14}{3} & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\quad (C_5 \leftarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-17 & -\frac{100}{3} & -176 & -32 & 152 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 15 & 3 & -14\\
5 & \frac{13}{3} & 22 & 4 & -19 & 0 & 1 & 5 & 2 & -6
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{l}
(C_3 \leftarrow C_3 + \\
(C_4 \leftarrow C_4 + \\
(C_5 \leftarrow C_5 -
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-17 & -\frac{100}{3} & -32 & -176 & 152 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 3 & 15 & -14\\
5 & \frac{13}{3} & 4 & 22 & -19 & 0 & 1 & 2 & 5 & -6
\end{array}\right)
\quad (C_4 \leftarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{19}{4}\\
-1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-17 & -\frac{100}{3} & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4}\\
5 & \frac{13}{3} & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & \frac{7}{2}
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{l}
(C_4 \leftarrow C_4 - \\
(C_5 \leftarrow C_5 +
\end{array}
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\-1\\-17\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\-\frac{100}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{13}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-32\\0\\4\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\0\\1\\-\frac{3}{2}\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{19}{4}\\1\\0\\\frac{1}{4}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}\right).
$$

Corrigé 22. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
-1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
-1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{l}
(C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1)\\
(C_3 \leftarrow C_3 + 6C_1)
\end{array}
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que*

les colonnes NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 23. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 2

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & -10 & -8 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-3 & -9 & -9 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
3 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
-6 & -10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-3 & -9 & -9 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-3 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) & (C_4 \leftrightarrow C_1)\\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-3 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-3 & 4 & 5 & 3 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 0
\end{array}\right) & \begin{matrix}(C_2 \leftarrow C_2 - \frac{5}{3}C_1)\\ (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{4}{3}C_1)\end{matrix}\\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-3 & -3 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0\\
-3 & 3 & 5 & 4 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3}
\end{array}\right) & (C_4 \leftrightarrow C_2)\\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3}\\
-3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3}
\end{array}\right) & \begin{matrix}(C_3 \leftarrow C_3 - \frac{5}{3}C_2)\\ (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{4}{3}C_2)\end{matrix}
\end{aligned}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-6\\-3\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\-1\\3\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\0\\1\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\1\\0\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 24. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 2 & -5 & -1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2 & -1 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & -3 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -2 & 4 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
&\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 1 & 10\\
2 & -5 & 10 & 0 & 25 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -2 & 4 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) & \begin{matrix}(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)\\ (C_3 \leftarrow C_3 + 5C_1)\\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_1)\\ (C_5 \leftarrow C_5 + 10C_1)\end{matrix}\\
&\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\
2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5\\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) & \begin{matrix}(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2)\\ \\ (C_5 \leftarrow C_5 + 5C_2)\end{matrix}
\end{aligned}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que*

les colonnes NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\\-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 25. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 9 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{7} & 1 \\ 1 & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{41}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - \frac{9}{7}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{5}{7}\\-\frac{41}{7}\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 26. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & -1 & -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 8 & 5 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -26 & -5 & -2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 7 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -14 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & -9 & -63 & 27 & 18 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -16 & 35 & -22 & -17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - \\ (C_3 \leftarrow C_3 - \\ (C_4 \leftarrow C_4 + \\ (C_5 \leftarrow C_5 + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{15}{2} & 4 & \frac{5}{2} \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -\frac{21}{2} & 5 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & -9 & -\frac{189}{2} & 45 & \frac{63}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -16 & -21 & 10 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + \\ (C_4 \leftarrow C_4 - \\ (C_5 \leftarrow C_5 - \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{5}{2} & 4 & -\frac{15}{2} \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ 3 & 1 & \frac{7}{2} & 5 & -\frac{21}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 17 & -9 & \frac{63}{2} & 45 & -\frac{189}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -16 & 7 & 10 & -21 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_5 \leftarrow$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{7} & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{7} & -1 \\ 3 & 1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 17 & -9 & \frac{63}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -16 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_4 \leftarrow C_4 - \\ (C_5 \leftarrow C_5 + 3 \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\\17\\-10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\-9\\-16\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{7}{2}\\\frac{63}{2}\\7\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{1}{7}\\0\\1\\-\frac{10}{7}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 27. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -7 & 3 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -7 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} & 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} &(C_2 \leftarrow C_2 + \tfrac{7}{3}C_1) \\ &(C_3 \leftarrow C_3 + \tfrac{4}{3}C_1) \\ &(C_4 \leftarrow C_4 + \tfrac{4}{3}C_1) \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{13}{3} & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} &(C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\ &(C_4 \leftarrow C_4 - C_2) \end{aligned}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 28. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -4 & -4 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & -4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 10 & -5 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} &(C_2 \leftarrow C_2 - \tfrac{4}{3}C_1) \\ &(C_3 \leftarrow C_3 - \tfrac{4}{3}C_1) \\ &(C_4 \leftarrow C_4 + \tfrac{4}{3}C_1) \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -2 \\ -3 & -1 & 5 & -3 & 1 & -\frac{4}{3} & -8 & 4 \\ 3 & -2 & -10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} &(C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2) \\ &(C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2) \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & -3 & 5 & 1 & -\frac{4}{3} & 4 & -8 \\ 3 & -2 & 6 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{3} \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 4 & -\frac{4}{3} \\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 + \tfrac{5}{3}C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que*

les colonnes NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\-1\\-3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-3\\6\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 29. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 18 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -27 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 27 & -5 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -18 & 2 & -3\\ -2 & 9 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 9 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad \begin{array}{r}(C_2 \leftarrow C_2 - 18C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)\\(C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1)\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -18 & -3\\ -2 & -3 & 9 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 9 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -12 & 1\\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad \begin{array}{r}(C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2)\\(C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\-3\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-12\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 30. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 4 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 12 & -6 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 8 & -4 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 4 & -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 12 & -6 & 6 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 8 & -4 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -4 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad \begin{array}{r}(C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)\\(C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1)\\(C_5 \leftarrow C_5 + 2C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 31. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 9C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + 8C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_2) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\8\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 32. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -14 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -14 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -14 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -14 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -26 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -7 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 7C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{3}{2}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -26 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -7 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{3} \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 6 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + \tfrac{26}{3}C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{26}{3}\\1\\6\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 33. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 3

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 34. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 3

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 7 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 5 & 13 & 14 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & -12 & -3 & -4 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 7 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 28 & 13 & 14 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 30 & -3 & -4 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 54 & 12 & 14 & -4 & 1 & 7 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 63 & 18 & 19 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 42 & 8 & 10 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -54 & -15 & -16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 7 \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C \\ (C_5 \leftarrow C_5 - C \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -4 & 12 & 14 & 54 & 1 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 18 & 19 & 63 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 10 & 42 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 2 & -15 & -16 & -54 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_5 \leftrightarrow$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} \\ 5 & -2 & 12 & 12 & 36 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & -4 & -4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 2 & -9 & -9 & -27 & 0 & 1 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{27}{2} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + 3C \\ (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{7}{2}C \\ (C_5 \leftarrow C_5 + \frac{27}{2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 2 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_4 \leftarrow C_4 - C \\ (C_5 \leftarrow C_5 - 3 \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 35. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -6 & -3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & -6 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & -4 & -4 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_2) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\-5\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 36. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 37. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -8 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -12 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} & -\frac{12}{5} \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{8}{5}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{12}{5}C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que*

les colonnes NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 38. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 18 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -8 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -20 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 10 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -8 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 39. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -4 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -8 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 40. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 4

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -2 & 1 & -2 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & -12 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 12 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & -2 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & -12 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & 12 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 6C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 41. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 18 & -8 & 7 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 7 & -8 & 18 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{8}{7} & -\frac{32}{7} & 0 & 1 & \frac{8}{7} & -\frac{18}{7} & -1 \\ -1 & \frac{6}{7} & -\frac{24}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{8}{7}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{18}{7}C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & \frac{8}{7} & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & 2 & -1 \\ -1 & \frac{6}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + 4C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 42. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 4

conclure :

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
8 & 14 & 23 & 8 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-8 & 3 & -6 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -14 & -15 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
4 & -7 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -27 & -26 & -15 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 14 & 23 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 3 & -6 & 0 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -14 & -15 & -7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -7 & -1 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -27 & -26 & -15 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\qquad (C_5 \leftarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 31 & 40 & 16 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -14 & -15 & -7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -7 & -1 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -13 & -3 & -7 & 9 & 1 & 7 & \frac{23}{2} & 4 & 4
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{l}
(C_2 \leftarrow C_2 + \\
(C_3 \leftarrow C_3 + \\
(C_4 \leftarrow C_4 + \\
(C_5 \leftarrow C_5 +
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 8 & 40 & 16 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -15 & -7 & -14 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & -1 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 9 & -3 & -7 & -13 & 1 & 4 & \frac{23}{2} & 4 & 7
\end{array}\right)
\qquad (C_5 \leftarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & -\frac{31}{8} \\
4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -20 & -9 & -\frac{143}{8} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & -21 & -12 & -\frac{45}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 9 & -48 & -25 & -\frac{383}{8} & 1 & 4 & -\frac{17}{2} & -4 & -\frac{17}{2}
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{l}
(C_3 \leftarrow C_3 - \\
(C_4 \leftarrow C_4 - \\
(C_5 \leftarrow C_5 -
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -\frac{31}{8} \\
4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -9 & -20 & -\frac{143}{8} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -12 & -21 & -\frac{45}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 9 & -25 & -48 & -\frac{383}{8} & 1 & 4 & -4 & -\frac{17}{2} & -\frac{17}{2}
\end{array}\right)
\qquad (C_4 \leftarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{9} & \frac{7}{72} \\
4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -12 & \frac{17}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{20}{9} & -\frac{143}{72} \\
2 & 9 & -25 & \frac{68}{9} & \frac{16}{9} & 1 & 4 & -4 & \frac{7}{18} & -\frac{5}{9}
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{l}
(C_4 \leftarrow C_4 - \\
(C_5 \leftarrow C_5 -
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{7}{72} & -\frac{5}{9} \\
4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 4 & -12 & \frac{4}{3} & \frac{17}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{143}{72} & -\frac{20}{9} \\
2 & 9 & -25 & \frac{16}{9} & \frac{68}{9} & 1 & 4 & -4 & -\frac{5}{9} & \frac{7}{18}
\end{array}\right)
\qquad (C_5 \leftarrow
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{7}{72} & -\frac{31}{32} \\
4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{4} \\
0 & 1 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 4 & -12 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{143}{72} & \frac{199}{32} \\
2 & 9 & -25 & \frac{16}{9} & 0 & 1 & 4 & -4 & -\frac{5}{9} & \frac{11}{4}
\end{array}\right)
\qquad (C_5 \leftarrow C_5 -
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ -12 \\ -25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -\frac{31}{32} \\ -\frac{17}{4} \\ 1 \\ \frac{199}{32} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix} \right).
$$

Corrigé 43. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 4

conclure :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & -6 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -21 & -20 & -20 & -20 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -21 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} \\ (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -21 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} \\ \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_2) \end{matrix}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -21 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Corrigé 44. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 4

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -9 & -19 & 7 & -5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & -19 & 7 & -9 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} \\ \\ \\ (C_4 \leftrightarrow C_1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{9}{5} & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{18}{5} & -\frac{9}{5} & 0 & 1 & -\frac{19}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} & -1 \\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} \\ (C_2 \leftarrow C_2 - \frac{19}{5}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{7}{5}C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{9}{5}C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - C_1) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{9}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{9}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{5} & 9 & 2 & -1 \\ 1 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} \\ \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_2) \\ \\ \end{matrix}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Corrigé 45. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1) \end{matrix}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 46. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 5

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 14 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 14 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 14 & -4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 7C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + 2C_2) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\7\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-7\\0\\1\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 47. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 5

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 4 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 2 & -8 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -12 & 3 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & 2 & -8 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - 2C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-3\\-2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 48. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 5

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & 6 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & 6 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & -9 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 6 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -12 & 6 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -12 & 6 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 18 & -9 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 6C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + 2C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 49. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -10 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 4 & -24 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - 5C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -24 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 50. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 5

conclure :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -10 & -4 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & -8 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -4 & -10 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & -20 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 5C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\4\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 51. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -5 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & -8 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{6}{5} & 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -1 \\ 2 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - \frac{8}{5}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-5\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{6}{5}\\-\frac{6}{5}\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 52. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 5

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -6 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -3 & -5 & 7 & -17 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 21 & 3 & -17 & -13 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 3 & -9 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -8 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & -1 & -4 \\ 10 & 57 & -35 & -3 & -57 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 15 & -13 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -36 & 10 & 14 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow \\ (C_3 \leftarrow \\ (C_4 \leftarrow \\ (C_5 \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 6 & -4 \\ 10 & -3 & -35 & 57 & -57 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -13 & 15 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 9 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 14 & 10 & -36 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{26}{3} & -13 & 15 \\ 10 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -13 & \frac{500}{3} & -250 & 250 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & \frac{272}{3} & -136 & 136 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & 19 & -19 \\ -6 & 14 & -\frac{460}{3} & 230 & -230 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow \\ (C_4 \leftarrow \\ (C_5 \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{26}{3} & 0 & 2 \\ 10 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -13 & \frac{500}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -7 & \frac{272}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -6 & 14 & -\frac{460}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_4 \leftarrow \\ (C_5 \leftarrow \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -13 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{500}{3} \\ \frac{272}{3} \\ -\frac{460}{3} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 53. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 13 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 54. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 5

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 12 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\6\\0\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 55. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 5

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -18 & -6 & 4 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -8 & -1 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -11 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -6 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -6 & -18 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -8 & -2 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -11 & 0 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -\frac{19}{2} & -\frac{13}{2} & -5 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -14 & -9 & -1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -3\\ 2 & 5 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 + \frac{3}{2}C_1)\\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{9}{2}C_1)\\ (C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1)\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -5 & -\frac{13}{2} & -\frac{19}{2} & 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & -9 & -14 & 1 & -3 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & -\frac{77}{10} & -\frac{121}{10} & 1 & -3 & \frac{42}{5} & \frac{36}{5}\\ 2 & -2 & \frac{28}{5} & \frac{44}{5} & 0 & 1 & -\frac{13}{10} & -\frac{19}{10} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_3 \leftarrow C_3 - \frac{13}{10}C_2)\\ (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{19}{10}C_2)\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{7}\\ -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & -\frac{77}{10} & 0 & 1 & -3 & \frac{42}{5} & -6\\ 2 & -2 & \frac{28}{5} & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{10} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{11}{7}C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{77}{10}\\\frac{28}{5}\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{11}{7}\\1\\-6\\\frac{1}{7}\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 56. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 5

conclure :

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 5 & -20 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 25 & 28 & 28 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 5 & -20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 28 & 25 & 28 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -14 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 28 & -31 & 28 & 64 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1) \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{7}{2} \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{2} & -5 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 28 & -31 & \frac{267}{4} & -\frac{89}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{5}{4}C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{7}{2}C_2) \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{4} \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & \frac{5}{2} \\ -1 & 4 & 4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 28 & -31 & -\frac{89}{2} & \frac{267}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 28 & -31 & -\frac{89}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{3}{2}C_3)
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ -31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -\frac{89}{2} \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right).
$$

Corrigé 57. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 10 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 28 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -24 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 16 & 8 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -12 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 16 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_2)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_2) \end{array}
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
$$

Corrigé 58. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & -6 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 6 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 21 & -1 & 3 & 10 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 12 & 11 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & -4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 21 & -1 & 3 & 52 & 45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 12 & 11 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & -8 & -4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 21 & -1 & 5 & 52 & 45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 11 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -\frac{11}{2} \\ -5 & 4 & -8 & 44 & 35 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 21 & -1 & 5 & 22 & \frac{35}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} (C_4 \leftarrow C_4 - 6C_3) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - \frac{11}{2}C_3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 11 & 12 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{2} & -6 \\ -5 & 4 & -8 & 35 & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 21 & -1 & 5 & \frac{35}{2} & 22 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (C_5 \leftrightarrow C_4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{35} \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 11 & -\frac{64}{35} \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{32}{35} \\ -5 & 4 & -8 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 21 & -1 & 5 & \frac{35}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{44}{35} \end{array}\right) \quad (C_5 \leftarrow C_5 - \frac{44}{35}C_4)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \\ \frac{35}{2} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{26}{35} \\ -\frac{64}{35} \\ \frac{32}{35} \\ 1 \\ -\frac{44}{35} \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 59. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -12 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 12 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -12 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 6 & -4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} (C_2 \leftarrow C_2 + 6C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 60. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 61. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -7 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) && (C_3 \leftrightarrow C_1) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 2 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) && \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{7}{6}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{3}{2}C_1) \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 \end{array}\right) && (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2) \end{aligned}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 62. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -8 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && (C_3 \leftrightarrow C_1) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_1) \end{array} \end{aligned}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 63. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 64. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -15 & -4 & -18 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & -18 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 18 & 11 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 5 & -30 & -7 & -18 & 17 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -10 & -2 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{15}{2} & 2 & 9 & -\frac{5}{2}\\ -1 & -\frac{15}{2} & -3 & -27 & -\frac{9}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 10 & 4 & 36 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 5 & \frac{15}{2} & 3 & 27 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 2 & 18 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 + \frac{15}{2}C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)\\(C_4 \leftarrow C_4 + 9C_1)\\(C_5 \leftarrow C_5 - \frac{5}{2}C_1)\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{15}{2} & 9 & -\frac{5}{2}\\ -1 & -3 & -\frac{15}{2} & -27 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 10 & 36 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 3 & \frac{15}{2} & 27 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 5 & 18 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & -9 & -\frac{11}{2}\\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -9 & -\frac{3}{2}\\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_3 \leftarrow C_3 - \frac{5}{2}C_2)\\(C_4 \leftarrow C_4 - 9C_2)\\(C_5 \leftarrow C_5 - \frac{3}{2}C_2)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\4\\3\\2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\1\\-\frac{5}{2}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\0\\-9\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\0\\-\frac{3}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 65. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les ← page 6

colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure :

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
5 & -22 & -2 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
4 & -23 & 2 & -2 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-2 & 1 & 8 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 2 & -2 & -1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & -2 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-1 & -22 & -2 & 5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-2 & -23 & 2 & 4 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 8 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 2 & -2 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & -2 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
&& (C_4 \leftrightarrow C_1)\\
&\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-2 & 21 & 6 & -6 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 23 & 10 & -7 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 24 & 0 & -6 & 0 & 1 & -22 & -2 & 5 & 9\\
1 & -22 & -4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
&& \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 - 22C_1)\\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1)\\ (C_4 \leftarrow C_4 + 5C_1)\\ (C_5 \leftarrow C_5 + 9C_1)\end{array}\\
&\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-2 & -3 & 6 & -6 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & -5 & 10 & -7 & 23 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & -6 & 24 & 1 & 9 & -2 & 5 & -22\\
1 & 2 & -4 & 6 & -22 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
&& (C_5 \leftrightarrow C_2)\\
&\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & -5 & 0 & 3 & -12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & -6 & 24 & 1 & 9 & 16 & -13 & 41\\
1 & 2 & 0 & 2 & -8 & 0 & 1 & 2 & -2 & 7
\end{array}\right)
&& \begin{array}{l}(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2)\\ (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2)\\ (C_5 \leftarrow C_5 + 7C_2)\end{array}\\
&\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & -5 & 3 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 0 & -6 & 0 & 24 & 1 & 9 & -13 & 16 & 41\\
1 & 2 & 2 & 0 & -8 & 0 & 1 & -2 & 2 & 7
\end{array}\right)
&& (C_4 \leftrightarrow C_3)\\
&\sim
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & 9 & -13 & 16 & -11\\
1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1
\end{array}\right)
&& (C_5 \leftarrow C_5 + 4C_3)
\end{aligned}
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$
\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\-5\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\-6\\2\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\16\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\\-11\\-1\end{pmatrix}\right).
$$

Corrigé 66. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
-1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0\\
-3 & -3 & 18 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
-1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6\\
-3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)\\ (C_3 \leftarrow C_3 + 6C_1)\end{array}
$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que*

les colonnes NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 67. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -9 & 7 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ -9 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -9 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1\\ -5 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ -9 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\-9\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 68. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -4 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)\\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1)\\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 69. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 7

conclure :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -15 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -16 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -9 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -22 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{15}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -31 & -6 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{93}{2} & -9 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -\frac{119}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{15}{2}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{15}{2} \\ -2 & -2 & -6 & -31 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -9 & -\frac{93}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & -\frac{119}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{15}{2} \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 3 & -44 & 0 & 1 & -3 & -\frac{31}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{31}{2}C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{133}{6} \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{44}{3} \\ -5 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{119}{2} \end{array}\right) \quad (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{44}{3}C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{133}{6} \\ 1 \\ \frac{44}{3} \\ -\frac{119}{2} \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 70. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 6 & 12 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 13 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -13 & 1 & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 6C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 13 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -13 & -4 & 1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + 13C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 4C_2) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 71. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ (C_2 \leftarrow C_2 + C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 4C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 16 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 24 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -5 & -15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 4C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 72. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les colonnes (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -17 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -11 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ (C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1) \\ \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -10 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -11 & 1 & 17 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -10 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 2 & -11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 17C_3) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -17 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 73. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -4 & -1 & -13 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -19 & 2 & -1 & 21 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -4 & -13 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -19 & -1 & 21 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & -8 & 8 & 1 & -4 & -13 & 3 \\ 1 & -5 & -5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -27 & -27 & 27 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 13C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 3C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -8 & 0 & 0 & 1 & -4 & -9 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_2) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -5 \\ -27 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 74. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 7

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & -8 & -5 & -8 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & -5 & 4 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & -9 & -6 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & -8 & 0 & -8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & 8 & 4 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -9 & 4 & -6 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{24}{5} & 2 & \frac{6}{5} & \frac{36}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 8 & 12 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} & 0 & -\frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ -6 & \frac{38}{5} & 4 & \frac{48}{5} & -\frac{42}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & \frac{27}{5} & 4 & \frac{42}{5} & -\frac{28}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - \frac{8}{5}C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{8}{5}C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + \frac{12}{5}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{6}{5} & 2 & -\frac{24}{5} & \frac{36}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 12 & 8 & 2 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} & 0 & -\frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ -6 & \frac{48}{5} & 4 & \frac{38}{5} & -\frac{42}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & \frac{42}{5} & 4 & \frac{27}{5} & -\frac{28}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 12 & -12 & 50 & -72 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{8}{3} & -8 & 12 \\ -6 & \frac{48}{5} & -12 & 46 & -66 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 4 & -6 \\ -9 & \frac{42}{5} & -10 & 39 & -56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{5}{3}C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 4C_2) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - 6C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{25}{6} & -6 \\ 3 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 12 & -12 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{8}{3} & \frac{28}{9} & -4 \\ -6 & \frac{48}{5} & -12 & -4 & 6 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{53}{18} & 4 \\ -9 & \frac{42}{5} & -10 & -\frac{8}{3} & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{25}{6}C_3) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - 6C_3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{25}{6} & \frac{1}{4} \\ 3 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ -5 & 12 & -12 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{8}{3} & \frac{28}{9} & \frac{2}{3} \\ -6 & \frac{48}{5} & -12 & -4 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{53}{18} & -\frac{5}{12} \\ -9 & \frac{42}{5} & -10 & -\frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_5 \leftarrow C_5 + \frac{3}{2}C_4)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{5} \\ 12 \\ \frac{48}{5} \\ \frac{42}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ -12 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{12} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 75. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - \frac{3}{2}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{7}{2}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que*

les colonnes NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A)=\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}\right)\qquad\text{et :}\qquad \ker(A)=\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 76. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&1&0&-4&1&0&0&0\\2&-25&-3&8&0&1&0&0\\2&-6&-4&16&0&0&1&0\\-3&-20&1&-4&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&0&-4&0&1&0&0\\-25&2&-3&8&1&0&0&0\\-6&2&-4&16&0&0&1&0\\-20&-3&1&-4&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad(C_2\leftrightarrow C_1)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&0&0\\-25&77&-3&-92&1&-3&0&4\\-6&20&-4&-8&0&0&1&0\\-20&57&1&-84&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad\begin{array}{l}(C_2\leftarrow C_2-3C_1)\\(C_4\leftarrow C_4+4C_1)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\-25&-3&77&-92&1&0&-3&4\\-6&-4&20&-8&0&1&0&0\\-20&1&57&-84&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad(C_3\leftrightarrow C_2)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\-25&-3&0&0&1&0&-3&4\\-6&-4&-\frac{248}{3}&\frac{344}{3}&0&1&\frac{77}{3}&-\frac{92}{3}\\-20&1&\frac{248}{3}&-\frac{344}{3}&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad\begin{array}{l}(C_3\leftarrow C_3+\frac{77}{3}C_2)\\(C_4\leftarrow C_4-\frac{92}{3}C_2)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&\frac{43}{31}\\-25&-3&0&0&1&0&-3&-\frac{5}{31}\\-6&-4&-\frac{248}{3}&0&0&1&\frac{77}{3}&\frac{153}{31}\\-20&1&\frac{248}{3}&0&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad(C_4\leftarrow C_4+\tfrac{43}{31}C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A)=\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-25\\-6\\-20\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\-4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{248}{3}\\\frac{248}{3}\end{pmatrix}\right)\qquad\text{et :}\qquad \ker(A)=\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{43}{31}\\-\frac{5}{31}\\\frac{153}{31}\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 77. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\4&1&-3&2&0&0&1&0\\4&1&-3&2&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\1&4&-3&2&0&0&1&0\\1&4&-3&2&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad(C_2\leftrightarrow C_1)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&-4&3&-2\\1&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad\begin{array}{l}(C_2\leftarrow C_2-4C_1)\\(C_3\leftarrow C_3+3C_1)\\(C_4\leftarrow C_4-2C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que*

les colonnes NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 78. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2\end{array}\right) \qquad \begin{matrix}(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)\end{matrix}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 79. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 7

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -11 & 10 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 11 & -10 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 11 & -10 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 10 & -11 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -10 & 11 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -10 & 11 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 10 & -11\end{array}\right) \qquad \begin{matrix}(C_2 \leftarrow C_2 + 10C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 - 11C_1)\end{matrix}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-11\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 80. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 8

conclure :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 15 & 18 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 23 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 10 & -29 & 27 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 15 & 18 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -7 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 23 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & -29 & 27 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 53 & 75 & 1 & 2 & 15 & 18 \\ -7 & -9 & -82 & -122 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 19 & 121 & 207 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 15C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 18C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{53}{5} & -15 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{31}{5} & -12 \\ -7 & -9 & \frac{67}{5} & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 19 & -\frac{402}{5} & -78 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{53}{5}C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - 15C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -15 & -\frac{53}{5} \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & -12 & -\frac{31}{5} \\ -7 & -9 & 13 & \frac{67}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 19 & -78 & -\frac{402}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -15 & \frac{316}{65} \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & -12 & \frac{401}{65} \\ -7 & -9 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 19 & -78 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{67}{65} \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 - \tfrac{67}{65}C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\4\\-7\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\-9\\19\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\13\\-78\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}\frac{316}{65}\\ \frac{401}{65}\\ 1\\ -\frac{67}{65}\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 81. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 8

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{8}{5} \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -4 & -\frac{46}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{8}{5}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{7}{10} \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{10} \\ -7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - \tfrac{23}{10}C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\5\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-\frac{7}{10}\\ -\frac{23}{10}\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 82. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 8

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 28 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -28 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{28}{3} \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{28}{3}C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{28}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 83. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 8

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 12 & 12 & -12 & 12 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 84. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 8

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -24 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -12 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 12C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 85. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 8

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & -2 & -1 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & -13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & -6 & -2 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & -2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 14 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 6 & 4 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & -10 & -8 & -21 & 1 & -2 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & -4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + 8C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -5 & 11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & -10 & 9 & -21 & 1 & 1 & 3 & -2 & 8 \\ -1 & -4 & 0 & 2 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 8 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{21}{4} \\ -1 & -4 & 6 & -3 & 3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ -2 & -4 & 14 & -7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{3}{2}C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + \frac{5}{4}C_2) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - \frac{11}{4}C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{21}{4} \\ -1 & -4 & -3 & 6 & 3 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{4} \\ -2 & -4 & -7 & 14 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -8 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{9}{2} \\ -1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_3) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + C_3) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 86. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 8

conclure :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 11 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 11 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{5}{3}C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{4}{3}C_2) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 87. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 8

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 88. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 8

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -12 & -1 & 9 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -1 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -12 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -12 & 9 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -12 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 12C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + 9C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que*

les colonnes NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-12\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\9\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 89. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 8

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -4 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -4 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -4 & -12 & -15 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -12 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1)\\(C_4 \leftarrow C_4 + C_1)\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -4 & -4 & -15 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2\\ -3 & -2 & -12 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & -1\\ -3 & -2 & -\frac{9}{2} & 3 & 0 & 1 & -\frac{15}{4} & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_3 \leftarrow C_3 - \frac{15}{4}C_2)\\(C_4 \leftarrow C_4 - 3C_2)\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}\\ -3 & -2 & 3 & -\frac{9}{2} & 0 & 1 & -3 & -\frac{15}{4} \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{5}{4}\\ -3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{33}{4} \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 + \tfrac{3}{2}C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-4\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\-\frac{5}{4}\\-\frac{33}{4}\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 90. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 8

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 10 & -25 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -5 & -25 & 10 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -5 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 - 5C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\-5\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 91. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 9

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -14 & 6 & -4 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & 2 & -2 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & 2 & -2 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & -2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 6 & -14 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -27 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 28 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -16 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 5 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -20 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{49}{2} & 1 & 3 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -9 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{3}{2}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - \frac{7}{2}C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - 2C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -20 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{67}{2} & -\frac{3}{2} & -5 \\ -2 & -1 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -88 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - 20C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - C_2) \\ (C_5 \leftarrow C_5 - 2C_2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -20 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{67}{2} & -5 \\ -2 & -1 & 1 & 11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -8 & -88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -9 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -17 & -5 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11 & 0 \\ -2 & 5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 - 11C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\\frac{3}{2}\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\\1\\-8\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-9\\-17\\-11\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 92. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 9

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 93. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 9

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & -1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 6 & -2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 10 & 1 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 6C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 8C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{7} \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 4 & 0 & -\frac{33}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & \frac{6}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftarrow C_4 - \tfrac{10}{7}C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 6 & -\frac{4}{7} & -2 \\ 0 & 4 & -\frac{33}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & \frac{6}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_4 \leftrightarrow C_3)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{33}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 94. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à ← page 9

conclure :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -11 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_2 \leftrightarrow C_1)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + C_1)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes NULLES de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-2\\7\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 95. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 9

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 + C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes NULLES de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 96. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 9

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}(C_2 \leftarrow C_2 + C_1)\\(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)\end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes NULLES de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 97. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de ← page 9

la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -9 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 9C_1) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 98. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 9

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & -6 & 30 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 3 & -15 & -17 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -10 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & -6 & -\frac{17}{5} \\ -11 & -\frac{51}{5} & 51 & \frac{102}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{8}{5} & 8 & \frac{16}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 + \frac{6}{5}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 6C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 - \frac{17}{5}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & 0 & -1 \\ -11 & -\frac{51}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & -\frac{8}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{51}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et :} \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé 99. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 9

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 17 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - \frac{17}{2}C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{3}{2}C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{17}{2} \\ -1 & -\frac{9}{2} & \frac{15}{2} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -6 \\ -1 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right) \qquad (C_3 \leftarrow C_3 + \frac{5}{3}C_2)$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right).$$

Corrigé 100. On peut déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps, si l'on échelonne selon les COLONNES (très important ! il existe aussi une approche selon les lignes, mais elle est moins directe), à l'aide de la méthode du pivot de Gauß. Nous échelonnons, puis nous rappelons comment cet échelonnement nous aide à conclure : ← page 9

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -12 & 12 & 8 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & -18 & -12 & -6 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -21 & -17 & -10 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 10 & 7 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 4 & 12 & 8 & -12 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -18 & -12 & 18 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -21 & -17 & 15 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 10 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (C_4 \leftrightarrow C_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 9 & 3 & -15 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 10 & 2 & 1 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 7 & -12 & -4 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 3C_1) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + C_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 9 & -15 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & 10 & 2 & 1 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 7 & -4 & -12 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (C_3 \leftrightarrow C_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -7 & -1 \\ 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2) \\ (C_4 \leftarrow C_4 + 5C_2) \\ (C_5 \leftarrow C_5 + C_2) \end{array}$$

La matrice est échelonnée selon les colonnes. Le cours vous enseigne alors que les colonnes *non nulles* de la matrice de gauche engendrent l'image de A, tandis que les colonnes de la matrice de droite *qui ont le même indice que les colonnes* NULLES *de celle de gauche* engendrent le noyau. On en déduit :

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et :} \qquad \ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$