Isométries de l'espace

Ces exercices servent à vous approprier les méthodes pour déterminer une isométrie de $\mathbb{R}^3$ dont on connaît la matrice. La stratégie est dans mes documents *Méthodes*, section 6. Je vous suggère de faire les simplifications que Python ne fait pas – quotients de la forme $\frac{\sqrt{a}}{a}$ notamment –, ou de mettre en facteur de la matrice une fraction convenable – sans oublier de la prendre en compte dans les calculs de produits scalaires et de vecteurs invariants –, pour minimiser les calculs avec des racines carrées et des quotients ; je le ferais volontiers si je maîtrisais Python.

Remarque sur la rédaction des corrigés. Je ne fais pas mention du produit mixte, qui n'est pas officiellement au programme de toutes les filières des classes préparatoires (cependant je l'utilise sans le dire). Si vous le connaissez, reconnaissez-le et utilisez-le.

Convention. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et on appelle $\mathcal{B}$ sa base canonique. On oriente $\mathbb{R}^3$ de sorte que $\mathcal{B}$ soit *directe*.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 18

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{21} & \frac{16}{21} & -\frac{4}{21} \\ \frac{16}{21} & -\frac{11}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{19}{21} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 18

$$A = \begin{pmatrix} \frac{69}{101} & \frac{16}{101} & -\frac{72}{101} \\ \frac{16}{101} & \frac{93}{101} & \frac{36}{101} \\ -\frac{72}{101} & \frac{36}{101} & -\frac{61}{101} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 18

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{212}{433}\sqrt{2} - \frac{9}{433} & -\frac{9}{433}\sqrt{433}\sqrt{2} - \frac{15}{433}\sqrt{2} + \frac{30}{433} & \frac{5}{433}\sqrt{433}\sqrt{2} - \frac{27}{433}\sqrt{2} + \frac{54}{433} \\ \frac{9}{433}\sqrt{433}\sqrt{2} - \frac{15}{433}\sqrt{2} + \frac{30}{433} & -\frac{333}{866}\sqrt{2} - \frac{100}{433} & \frac{3}{866}\sqrt{433}\sqrt{2} + \frac{90}{433}\sqrt{2} - \frac{180}{433} \\ -\frac{5}{433}\sqrt{433}\sqrt{2} - \frac{27}{433}\sqrt{2} + \frac{54}{433} & -\frac{3}{866}\sqrt{433}\sqrt{2} + \frac{90}{433}\sqrt{2} - \frac{180}{433} & -\frac{109}{866}\sqrt{2} - \frac{324}{433} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 19

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{113}{194} & \frac{9}{194}\sqrt{97}\sqrt{3} & -\frac{18}{97} \\ -\frac{9}{194}\sqrt{97}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{97}\sqrt{97}\sqrt{3} \\ -\frac{18}{97} & -\frac{2}{97}\sqrt{97}\sqrt{3} & -\frac{89}{97} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 20

$$A = \begin{pmatrix} \frac{139}{157} & \frac{72}{157} & -\frac{12}{157} \\ \frac{72}{157} & -\frac{131}{157} & \frac{48}{157} \\ -\frac{12}{157} & \frac{48}{157} & \frac{149}{157} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 21

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{117}{284}\sqrt{2} - \frac{25}{142} & \frac{9}{284}\sqrt{142}\sqrt{2} - \frac{15}{142}\sqrt{2} + \frac{15}{71} & \frac{3}{142}\sqrt{142}\sqrt{2} + \frac{45}{284}\sqrt{2} - \frac{45}{142} \\ -\frac{9}{284}\sqrt{142}\sqrt{2} - \frac{15}{142}\sqrt{2} + \frac{15}{71} & -\frac{53}{142}\sqrt{2} - \frac{18}{71} & \frac{5}{284}\sqrt{142}\sqrt{2} - \frac{27}{142}\sqrt{2} + \frac{27}{71} \\ -\frac{3}{142}\sqrt{142}\sqrt{2} + \frac{45}{284}\sqrt{2} - \frac{45}{142} & -\frac{5}{284}\sqrt{142}\sqrt{2} - \frac{27}{142}\sqrt{2} + \frac{27}{71} & -\frac{61}{284}\sqrt{2} - \frac{81}{142} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 22

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{58}\sqrt{2} - \frac{16}{29} & -\frac{1}{29}\sqrt{29}\sqrt{2} + \frac{6}{29}\sqrt{2} + \frac{12}{29} & -\frac{3}{58}\sqrt{29}\sqrt{2} - \frac{4}{29}\sqrt{2} - \frac{8}{29} \\ \frac{1}{29}\sqrt{29}\sqrt{2} + \frac{6}{29}\sqrt{2} + \frac{12}{29} & \frac{10}{29}\sqrt{2} - \frac{9}{29} & -\frac{2}{29}\sqrt{29}\sqrt{2} + \frac{3}{29}\sqrt{2} + \frac{6}{29} \\ \frac{3}{58}\sqrt{29}\sqrt{2} - \frac{4}{29}\sqrt{2} - \frac{8}{29} & \frac{2}{29}\sqrt{29}\sqrt{2} + \frac{3}{29}\sqrt{2} + \frac{6}{29} & \frac{25}{58}\sqrt{2} - \frac{4}{29} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 23

$$A = \begin{pmatrix} \frac{25}{68}\sqrt{2} + \frac{9}{34} & \frac{3}{68}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{3}{17}\sqrt{2} + \frac{6}{17} & -\frac{1}{17}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{9}{68}\sqrt{2} + \frac{9}{34} \\ -\frac{3}{68}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{3}{17}\sqrt{2} + \frac{6}{17} & \frac{9}{34}\sqrt{2} + \frac{8}{17} & \frac{3}{68}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{3}{17}\sqrt{2} + \frac{6}{17} \\ \frac{1}{17}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{9}{68}\sqrt{2} + \frac{9}{34} & -\frac{3}{68}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{3}{17}\sqrt{2} + \frac{6}{17} & \frac{25}{68}\sqrt{2} + \frac{9}{34} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 24

$$A = \begin{pmatrix} \frac{23}{185} & -\frac{36}{185} & \frac{36}{37} \\ -\frac{36}{185} & \frac{177}{185} & \frac{8}{37} \\ \frac{36}{37} & \frac{8}{37} & -\frac{3}{37} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 10. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 24

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 25

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 12. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 25

$$A = \begin{pmatrix} \frac{74}{157}\sqrt{2} - \frac{9}{157} & \frac{1}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} - \frac{18}{157}\sqrt{2} - \frac{36}{157} & \frac{6}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} + \frac{3}{157}\sqrt{2} + \frac{6}{157} \\ -\frac{1}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} - \frac{18}{157}\sqrt{2} - \frac{36}{157} & \frac{13}{314}\sqrt{2} - \frac{144}{157} & -\frac{3}{314}\sqrt{157}\sqrt{2} + \frac{12}{157}\sqrt{2} + \frac{24}{157} \\ -\frac{6}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} + \frac{3}{157}\sqrt{2} + \frac{6}{157} & \frac{3}{314}\sqrt{157}\sqrt{2} + \frac{12}{157}\sqrt{2} + \frac{24}{157} & \frac{153}{314}\sqrt{2} - \frac{4}{157} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 13. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 26

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{12} & \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} + \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} - \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} + \frac{1}{12} & -\frac{31}{60} & \frac{5}{12}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} + \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{12}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} - \frac{1}{6} & -\frac{5}{12}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} + \frac{1}{30} & -\frac{17}{30} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 27

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{37}\sqrt{37} & \frac{6}{37}\sqrt{37} \\ \frac{1}{37}\sqrt{37} & -\frac{36}{37} & -\frac{6}{37} \\ -\frac{6}{37}\sqrt{37} & -\frac{6}{37} & -\frac{1}{37} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 15. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 28

$$A = \begin{pmatrix} \frac{97}{196}\sqrt{3} - \frac{1}{98} & \frac{1}{49}\sqrt{3} + \frac{9}{28}\sqrt{2} + \frac{2}{49} & \frac{9}{196}\sqrt{3} - \frac{1}{7}\sqrt{2} + \frac{9}{98} \\ \frac{1}{49}\sqrt{3} - \frac{9}{28}\sqrt{2} + \frac{2}{49} & \frac{41}{98}\sqrt{3} - \frac{8}{49} & -\frac{9}{49}\sqrt{3} - \frac{1}{28}\sqrt{2} - \frac{18}{49} \\ \frac{9}{196}\sqrt{3} + \frac{1}{7}\sqrt{2} + \frac{9}{98} & -\frac{9}{49}\sqrt{3} + \frac{1}{28}\sqrt{2} - \frac{18}{49} & \frac{17}{196}\sqrt{3} - \frac{81}{98} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 16. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 29

$$A = \begin{pmatrix} \frac{38}{47} & -\frac{6}{47} & \frac{27}{47} \\ -\frac{6}{47} & \frac{43}{47} & \frac{18}{47} \\ \frac{27}{47} & \frac{18}{47} & -\frac{34}{47} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 29

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 18. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 30

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{34}\sqrt{3} - \frac{8}{17} & \frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{3}{17}\sqrt{3} + \frac{6}{17} & -\frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{3}{17}\sqrt{3} + \frac{6}{17} \\ -\frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{3}{17}\sqrt{3} + \frac{6}{17} & -\frac{25}{68}\sqrt{3} - \frac{9}{34} & -\frac{2}{17}\sqrt{\frac{17}{2}} + \frac{9}{68}\sqrt{3} - \frac{9}{34} \\ \frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{3}{17}\sqrt{3} + \frac{6}{17} & \frac{2}{17}\sqrt{\frac{17}{2}} + \frac{9}{68}\sqrt{3} - \frac{9}{34} & -\frac{25}{68}\sqrt{3} - \frac{9}{34} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 19. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 32

$$A = \begin{pmatrix} \frac{125}{242} & \frac{3}{11}\sqrt{3} + \frac{9}{121} & -\frac{9}{22}\sqrt{3} + \frac{6}{121} \\ -\frac{3}{11}\sqrt{3} + \frac{9}{121} & \frac{101}{121} & \frac{1}{11}\sqrt{3} + \frac{27}{121} \\ \frac{9}{22}\sqrt{3} + \frac{6}{121} & -\frac{1}{11}\sqrt{3} + \frac{27}{121} & \frac{157}{242} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 20. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 32

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{49} & -\frac{9}{49} & -\frac{48}{49} \\ \frac{33}{49} & \frac{36}{49} & -\frac{4}{49} \\ \frac{36}{49} & -\frac{32}{49} & \frac{9}{49} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 21. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 33

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{289}{866}\sqrt{3} + \frac{144}{433} & -\frac{4}{433}\sqrt{433} - \frac{90}{433}\sqrt{3} - \frac{180}{433} & -\frac{15}{866}\sqrt{433} + \frac{48}{433}\sqrt{3} + \frac{96}{433} \\ \frac{4}{433}\sqrt{433} - \frac{90}{433}\sqrt{3} - \frac{180}{433} & -\frac{104}{433}\sqrt{3} + \frac{225}{433} & -\frac{6}{433}\sqrt{433} - \frac{60}{433}\sqrt{3} - \frac{120}{433} \\ \frac{15}{866}\sqrt{433} + \frac{48}{433}\sqrt{3} + \frac{96}{433} & \frac{6}{433}\sqrt{433} - \frac{60}{433}\sqrt{3} - \frac{120}{433} & -\frac{369}{866}\sqrt{3} + \frac{64}{433} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 22. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 34

$$A = \begin{pmatrix} \frac{25}{27} & \frac{10}{27} & -\frac{2}{27} \\ \frac{10}{27} & -\frac{23}{27} & \frac{10}{27} \\ -\frac{2}{27} & \frac{10}{27} & \frac{25}{27} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 23. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 34

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 24. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 35

$$A = \begin{pmatrix} \frac{81}{133} & \frac{6}{133}\sqrt{133} + \frac{36}{133} & -\frac{4}{133}\sqrt{133} + \frac{54}{133} \\ -\frac{6}{133}\sqrt{133} + \frac{36}{133} & \frac{16}{133} & \frac{9}{133}\sqrt{133} + \frac{24}{133} \\ \frac{4}{133}\sqrt{133} + \frac{54}{133} & -\frac{9}{133}\sqrt{133} + \frac{24}{133} & \frac{36}{133} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 25. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 36

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{73} & \frac{72}{73} & \frac{12}{73} \\ \frac{72}{73} & \frac{1}{73} & -\frac{12}{73} \\ \frac{12}{73} & -\frac{12}{73} & \frac{71}{73} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 26. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 37

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 27. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 37

$$A = \begin{pmatrix} \frac{25}{122}\sqrt{3} - \frac{36}{61} & \frac{3}{122}\sqrt{61} - \frac{12}{61}\sqrt{3} - \frac{24}{61} & -\frac{2}{61}\sqrt{61} - \frac{9}{61}\sqrt{3} - \frac{18}{61} \\ -\frac{3}{122}\sqrt{61} - \frac{12}{61}\sqrt{3} - \frac{24}{61} & \frac{45}{122}\sqrt{3} - \frac{16}{61} & \frac{3}{61}\sqrt{61} - \frac{6}{61}\sqrt{3} - \frac{12}{61} \\ \frac{2}{61}\sqrt{61} - \frac{9}{61}\sqrt{3} - \frac{18}{61} & -\frac{3}{61}\sqrt{61} - \frac{6}{61}\sqrt{3} - \frac{12}{61} & \frac{26}{61}\sqrt{3} - \frac{9}{61} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 28. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 38

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{67}{188} & -\frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{81}{188} & \frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{9}{94} \\ \frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{81}{188} & \frac{149}{188} & \frac{3}{188}\sqrt{94}\sqrt{3} + \frac{27}{94} \\ -\frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{9}{94} & -\frac{3}{188}\sqrt{94}\sqrt{3} + \frac{27}{94} & -\frac{41}{94} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 29. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 39

$$A = \begin{pmatrix} \frac{85}{188}\sqrt{2} - \frac{9}{94} & -\frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{3}{94}\sqrt{2} - \frac{3}{47} & \frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{27}{188}\sqrt{2} - \frac{27}{94} \\ \frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{3}{94}\sqrt{2} - \frac{3}{47} & \frac{45}{94}\sqrt{2} - \frac{2}{47} & -\frac{3}{188}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{9}{94}\sqrt{2} - \frac{9}{47} \\ -\frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{27}{188}\sqrt{2} - \frac{27}{94} & \frac{3}{188}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{9}{94}\sqrt{2} - \frac{9}{47} & \frac{13}{188}\sqrt{2} - \frac{81}{94} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 30. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 40

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 31. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 40

$$A = \begin{pmatrix} \frac{26}{61}\sqrt{3} + \frac{9}{61} & -\frac{3}{61}\sqrt{61} + \frac{6}{61}\sqrt{3} - \frac{12}{61} & \frac{2}{61}\sqrt{61} + \frac{9}{61}\sqrt{3} - \frac{18}{61} \\ \frac{3}{61}\sqrt{61} + \frac{6}{61}\sqrt{3} - \frac{12}{61} & \frac{45}{122}\sqrt{3} + \frac{16}{61} & \frac{3}{122}\sqrt{61} - \frac{12}{61}\sqrt{3} + \frac{24}{61} \\ -\frac{2}{61}\sqrt{61} + \frac{9}{61}\sqrt{3} - \frac{18}{61} & -\frac{3}{122}\sqrt{61} - \frac{12}{61}\sqrt{3} + \frac{24}{61} & \frac{25}{122}\sqrt{3} + \frac{36}{61} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 32. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 41

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{13}{18} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9} & \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{2}{9} & \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9} & -\frac{13}{18} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 33. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 42

$$A = \begin{pmatrix} \frac{17}{35}\sqrt{2} + \frac{1}{35} & \frac{1}{14}\sqrt{35}\sqrt{2} + \frac{3}{70}\sqrt{2} - \frac{3}{35} & \frac{3}{70}\sqrt{35}\sqrt{2} - \frac{1}{14}\sqrt{2} + \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{14}\sqrt{35}\sqrt{2} + \frac{3}{70}\sqrt{2} - \frac{3}{35} & \frac{13}{35}\sqrt{2} + \frac{9}{35} & \frac{1}{70}\sqrt{35}\sqrt{2} + \frac{3}{14}\sqrt{2} - \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{70}\sqrt{35}\sqrt{2} - \frac{1}{14}\sqrt{2} + \frac{1}{7} & -\frac{1}{70}\sqrt{35}\sqrt{2} + \frac{3}{14}\sqrt{2} - \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\sqrt{2} + \frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 34. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 43

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 35. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 43

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{46}\sqrt{2}+\frac{18}{23} & -\frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2}-\frac{9}{46}\sqrt{2}-\frac{9}{23} & \frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2}-\frac{3}{46}\sqrt{2}-\frac{3}{23} \\ \frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2}-\frac{9}{46}\sqrt{2}-\frac{9}{23} & -\frac{37}{92}\sqrt{2}+\frac{9}{46} & \frac{3}{23}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2}+\frac{3}{92}\sqrt{2}+\frac{3}{46} \\ -\frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2}-\frac{3}{46}\sqrt{2}-\frac{3}{23} & -\frac{3}{23}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2}+\frac{3}{92}\sqrt{2}+\frac{3}{46} & -\frac{45}{92}\sqrt{2}+\frac{1}{46} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 36. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 44

$$A = \begin{pmatrix} \frac{37}{109} & \frac{36}{109} & -\frac{96}{109} \\ \frac{36}{109} & \frac{91}{109} & \frac{48}{109} \\ -\frac{96}{109} & \frac{48}{109} & -\frac{19}{109} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 37. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 45

$$A = \begin{pmatrix} \frac{11}{29} & \frac{24}{29} & -\frac{12}{29} \\ \frac{24}{29} & -\frac{3}{29} & \frac{16}{29} \\ -\frac{12}{29} & \frac{16}{29} & \frac{21}{29} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 38. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 45

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{16}{113} & \frac{4}{113}\sqrt{113}+\frac{36}{113} & \frac{9}{113}\sqrt{113}-\frac{16}{113} \\ -\frac{4}{113}\sqrt{113}+\frac{36}{113} & -\frac{81}{113} & \frac{4}{113}\sqrt{113}+\frac{36}{113} \\ -\frac{9}{113}\sqrt{113}-\frac{16}{113} & -\frac{4}{113}\sqrt{113}+\frac{36}{113} & -\frac{16}{113} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 39. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 46

$$A = \begin{pmatrix} \frac{39}{41} & \frac{12}{41} & \frac{4}{41} \\ \frac{12}{41} & -\frac{31}{41} & -\frac{24}{41} \\ \frac{4}{41} & -\frac{24}{41} & \frac{33}{41} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 40. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 47

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 41. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 47

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 42. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 48

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{36}{41} & \frac{1}{41}\sqrt{41}+\frac{12}{41} & \frac{2}{41}\sqrt{41}-\frac{6}{41} \\ -\frac{1}{41}\sqrt{41}+\frac{12}{41} & -\frac{4}{41} & \frac{6}{41}\sqrt{41}+\frac{2}{41} \\ -\frac{2}{41}\sqrt{41}-\frac{6}{41} & -\frac{6}{41}\sqrt{41}+\frac{2}{41} & -\frac{1}{41} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 43. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 49

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{6}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{6}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 44. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 50

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{34}{43} & \frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3}+\frac{15}{86} & -\frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3}+\frac{15}{86} \\ -\frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3}+\frac{15}{86} & -\frac{26}{43} & -\frac{5}{86}\sqrt{43}\sqrt{3}-\frac{9}{86} \\ \frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3}+\frac{15}{86} & \frac{5}{86}\sqrt{43}\sqrt{3}-\frac{9}{86} & -\frac{26}{43} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 45. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 51

$$A = \begin{pmatrix} \frac{37}{82}\sqrt{2}+\frac{4}{41} & -\frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{6}{41}\sqrt{2}+\frac{12}{41} & \frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{1}{41}\sqrt{2}+\frac{2}{41} \\ \frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{6}{41}\sqrt{2}+\frac{12}{41} & \frac{5}{82}\sqrt{2}+\frac{36}{41} & -\frac{1}{41}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{3}{41}\sqrt{2}+\frac{6}{41} \\ -\frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{1}{41}\sqrt{2}+\frac{2}{41} & \frac{1}{41}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{3}{41}\sqrt{2}+\frac{6}{41} & \frac{20}{41}\sqrt{2}+\frac{1}{41} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 46. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 51

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{41}{132}\sqrt{3}-\frac{25}{66} & \frac{1}{33}\sqrt{66}+\frac{25}{132}\sqrt{3}-\frac{25}{66} & \frac{5}{132}\sqrt{66}-\frac{5}{33}\sqrt{3}+\frac{10}{33} \\ -\frac{1}{33}\sqrt{66}+\frac{25}{132}\sqrt{3}-\frac{25}{66} & -\frac{41}{132}\sqrt{3}-\frac{25}{66} & -\frac{5}{132}\sqrt{66}-\frac{5}{33}\sqrt{3}+\frac{10}{33} \\ -\frac{5}{132}\sqrt{66}-\frac{5}{33}\sqrt{3}+\frac{10}{33} & \frac{5}{132}\sqrt{66}-\frac{5}{33}\sqrt{3}+\frac{10}{33} & -\frac{25}{66}\sqrt{3}-\frac{8}{33} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 47. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 52

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{27} & \frac{25}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{25}{27} & \frac{2}{27} & -\frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & -\frac{10}{27} & \frac{23}{27} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 48. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 53

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{13}\sqrt{2} + \frac{9}{13} & -\frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{2} & \frac{3}{13}\sqrt{2} - \frac{6}{13} \\ \frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{26}\sqrt{13}\sqrt{2} \\ \frac{3}{13}\sqrt{2} - \frac{6}{13} & -\frac{3}{26}\sqrt{13}\sqrt{2} & \frac{9}{26}\sqrt{2} + \frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 49. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 54

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 50. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 54

$$A = \begin{pmatrix} \frac{81}{178}\sqrt{3} - \frac{8}{89} & \frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} + \frac{9}{89}\sqrt{3} + \frac{18}{89} & -\frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} + \frac{9}{89}\sqrt{3} + \frac{18}{89} \\ -\frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} + \frac{9}{89}\sqrt{3} + \frac{18}{89} & \frac{97}{356}\sqrt{3} - \frac{81}{178} & -\frac{2}{89}\sqrt{\frac{89}{2}} - \frac{81}{356}\sqrt{3} - \frac{81}{178} \\ \frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} + \frac{9}{89}\sqrt{3} + \frac{18}{89} & \frac{2}{89}\sqrt{\frac{89}{2}} - \frac{81}{356}\sqrt{3} - \frac{81}{178} & \frac{97}{356}\sqrt{3} - \frac{81}{178} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 51. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 55

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{9}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{7}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{9}{11} & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 52. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 56

$$A = \begin{pmatrix} \frac{36}{97}\sqrt{3} - \frac{25}{97} & -\frac{3}{97}\sqrt{97} - \frac{15}{97}\sqrt{3} - \frac{30}{97} & \frac{3}{97}\sqrt{97} - \frac{15}{97}\sqrt{3} - \frac{30}{97} \\ \frac{3}{97}\sqrt{97} - \frac{15}{97}\sqrt{3} - \frac{30}{97} & \frac{61}{194}\sqrt{3} - \frac{36}{97} & -\frac{5}{194}\sqrt{97} - \frac{18}{97}\sqrt{3} - \frac{36}{97} \\ -\frac{3}{97}\sqrt{97} - \frac{15}{97}\sqrt{3} - \frac{30}{97} & \frac{5}{194}\sqrt{97} - \frac{18}{97}\sqrt{3} - \frac{36}{97} & \frac{61}{194}\sqrt{3} - \frac{36}{97} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 53. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 57

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{5}{181}\sqrt{181} & \frac{9}{362}\sqrt{181} \\ -\frac{5}{181}\sqrt{181} & -\frac{50}{181}\sqrt{3} - \frac{81}{181} & -\frac{45}{181}\sqrt{3} + \frac{90}{181} \\ -\frac{9}{362}\sqrt{181} & -\frac{45}{181}\sqrt{3} + \frac{90}{181} & -\frac{81}{362}\sqrt{3} - \frac{100}{181} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 54. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 58

$$A = \begin{pmatrix} \frac{29}{61} & -\frac{48}{61} & \frac{24}{61} \\ -\frac{48}{61} & -\frac{11}{61} & \frac{36}{61} \\ \frac{24}{61} & \frac{36}{61} & \frac{43}{61} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 55. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 58

$$A = \begin{pmatrix} \frac{25}{57} & \frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57} & -\frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57} \\ -\frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57} & \frac{16}{57} & -\frac{5}{57}\sqrt{57} + \frac{16}{57} \\ \frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57} & \frac{5}{57}\sqrt{57} + \frac{16}{57} & \frac{16}{57} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 56. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 59

$$A = \begin{pmatrix} \frac{241}{1130}\sqrt{3} - \frac{324}{565} & \frac{3}{226}\sqrt{565} - \frac{36}{565}\sqrt{3} - \frac{72}{565} & -\frac{2}{565}\sqrt{565} - \frac{27}{113}\sqrt{3} - \frac{54}{113} \\ -\frac{3}{226}\sqrt{565} - \frac{36}{565}\sqrt{3} - \frac{72}{565} & \frac{549}{1130}\sqrt{3} - \frac{16}{565} & \frac{9}{565}\sqrt{565} - \frac{6}{113}\sqrt{3} - \frac{12}{113} \\ \frac{2}{565}\sqrt{565} - \frac{27}{113}\sqrt{3} - \frac{54}{113} & -\frac{9}{565}\sqrt{565} - \frac{6}{113}\sqrt{3} - \frac{12}{113} & \frac{34}{113}\sqrt{3} - \frac{45}{113} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 57. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 60

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{161}{289} & -\frac{240}{289} \\ 0 & -\frac{240}{289} & -\frac{161}{289} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 58. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 61

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{22} & -\frac{2}{33}\sqrt{33}\sqrt{3} - \frac{2}{11} & \frac{1}{66}\sqrt{33}\sqrt{3} - \frac{8}{11} \\ \frac{2}{33}\sqrt{33}\sqrt{3} - \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{2}{33}\sqrt{33}\sqrt{3} - \frac{2}{11} \\ -\frac{1}{66}\sqrt{33}\sqrt{3} - \frac{8}{11} & \frac{2}{33}\sqrt{33}\sqrt{3} - \frac{2}{11} & -\frac{5}{22} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 59. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 62

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 60. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 62

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{13}{23} & \frac{18}{23} & -\frac{6}{23} \\ \frac{18}{23} & \frac{14}{23} & \frac{3}{23} \\ -\frac{6}{23} & \frac{3}{23} & \frac{22}{23} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 61. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 63

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 62. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 63

$$A = \begin{pmatrix} \frac{27}{173} & \frac{160}{173} & \frac{60}{173} \\ \frac{160}{173} & -\frac{45}{173} & \frac{48}{173} \\ \frac{60}{173} & \frac{48}{173} & -\frac{155}{173} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 63. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 64

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{31} & \frac{30}{31} & \frac{6}{31} \\ \frac{30}{31} & \frac{6}{31} & -\frac{5}{31} \\ \frac{6}{31} & -\frac{5}{31} & \frac{30}{31} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 64. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 65

$$A = \begin{pmatrix} \frac{65}{97} & -\frac{72}{97} & 0 \\ -\frac{72}{97} & -\frac{65}{97} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 65. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 65

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 66. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 66

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{82} & -\frac{9}{82}\sqrt{82} & \frac{9}{82} \\ \frac{9}{82}\sqrt{82} & 0 & \frac{1}{82}\sqrt{82} \\ \frac{9}{82} & -\frac{1}{82}\sqrt{82} & -\frac{81}{82} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 67. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 67

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{91}{109} & \frac{60}{109} \\ 0 & \frac{60}{109} & \frac{91}{109} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 68. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 67

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{80}{83} & -\frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{27}{166} & -\frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} - \frac{27}{166} \\ \frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{27}{166} & \frac{40}{83} & -\frac{9}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{3}{166} \\ \frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} - \frac{27}{166} & \frac{9}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{3}{166} & \frac{40}{83} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 69. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 68

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{289}{866}\sqrt{2} - \frac{144}{433} & \frac{15}{866}\sqrt{433}\sqrt{2} - \frac{48}{433}\sqrt{2} + \frac{96}{433} & \frac{4}{433}\sqrt{433}\sqrt{2} + \frac{90}{433}\sqrt{2} - \frac{180}{433} \\ -\frac{15}{866}\sqrt{433}\sqrt{2} - \frac{48}{433}\sqrt{2} + \frac{96}{433} & -\frac{369}{866}\sqrt{2} - \frac{64}{433} & \frac{6}{433}\sqrt{433}\sqrt{2} - \frac{60}{433}\sqrt{2} + \frac{120}{433} \\ -\frac{4}{433}\sqrt{433}\sqrt{2} + \frac{90}{433}\sqrt{2} - \frac{180}{433} & -\frac{6}{433}\sqrt{433}\sqrt{2} - \frac{60}{433}\sqrt{2} + \frac{120}{433} & -\frac{104}{433}\sqrt{2} - \frac{225}{433} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 70. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 69

$$A = \begin{pmatrix} \frac{36}{121} & \frac{32}{121} & \frac{111}{121} \\ \frac{76}{121} & \frac{81}{121} & -\frac{48}{121} \\ -\frac{87}{121} & \frac{84}{121} & \frac{4}{121} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 71. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 70

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{3}{14} & -\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{14} \\ -\frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{3}{14} & \frac{11}{28} & \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{28} \\ \frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{14} & -\frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{28} & -\frac{13}{28} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 72. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 71

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{6}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} + \frac{2}{13} & -\frac{2}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} - \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} + \frac{2}{13} & \frac{4}{65} & \frac{5}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} - \frac{12}{65} \\ \frac{2}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} - \frac{6}{13} & -\frac{5}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} - \frac{12}{65} & \frac{36}{65} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 73. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 72

$$A = \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{16}{29} & \frac{12}{29} \\ \frac{16}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{24}{29} \\ \frac{12}{29} & -\frac{24}{29} & \frac{11}{29} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 74. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 73

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} & -\frac{5}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{6} & \frac{1}{12}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} & -\frac{5}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 75. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 74

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{17}{33} & \frac{20}{33} & \frac{20}{33} \\ \frac{20}{33} & \frac{25}{33} & -\frac{8}{33} \\ \frac{20}{33} & -\frac{8}{33} & \frac{25}{33} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 76. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 74

$$A = \begin{pmatrix} \frac{85}{242}\sqrt{3} - \frac{36}{121} & \frac{27}{121}\sqrt{3} + \frac{43}{121} & -\frac{6}{121}\sqrt{3} - \frac{123}{242} \\ \frac{27}{121}\sqrt{3} + \frac{65}{121} & \frac{20}{121}\sqrt{3} - \frac{81}{121} & \frac{9}{121}\sqrt{3} - \frac{15}{121} \\ -\frac{6}{121}\sqrt{3} + \frac{75}{242} & \frac{9}{121}\sqrt{3} + \frac{51}{121} & \frac{117}{242}\sqrt{3} - \frac{4}{121} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 77. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 75

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{69}{106} & -\frac{1}{106}\sqrt{53}\sqrt{3} + \frac{12}{53} & \frac{3}{53}\sqrt{53}\sqrt{3} + \frac{2}{53} \\ \frac{1}{106}\sqrt{53}\sqrt{3} + \frac{12}{53} & -\frac{89}{106} & \frac{2}{53}\sqrt{53}\sqrt{3} - \frac{3}{53} \\ -\frac{3}{53}\sqrt{53}\sqrt{3} + \frac{2}{53} & -\frac{2}{53}\sqrt{53}\sqrt{3} - \frac{3}{53} & -\frac{27}{53} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 78. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 76

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 79. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 77

$$A = \begin{pmatrix} \frac{100}{217} & -\frac{6}{217}\sqrt{217} - \frac{90}{217} & -\frac{9}{217}\sqrt{217} + \frac{60}{217} \\ \frac{6}{217}\sqrt{217} - \frac{90}{217} & \frac{81}{217} & -\frac{10}{217}\sqrt{217} - \frac{54}{217} \\ \frac{9}{217}\sqrt{217} + \frac{60}{217} & \frac{10}{217}\sqrt{217} - \frac{54}{217} & \frac{36}{217} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 80. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 78

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{59} & -\frac{50}{59} & \frac{30}{59} \\ -\frac{50}{59} & \frac{9}{59} & \frac{30}{59} \\ \frac{30}{59} & \frac{30}{59} & \frac{41}{59} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 81. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 78

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{261}{530}\sqrt{2} + \frac{4}{265} & -\frac{3}{265}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{3}{53}\sqrt{2} - \frac{6}{53} & \frac{3}{106}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{6}{265}\sqrt{2} - \frac{12}{265} \\ \frac{3}{265}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{3}{53}\sqrt{2} - \frac{6}{53} & -\frac{4}{53}\sqrt{2} + \frac{45}{53} & \frac{1}{265}\sqrt{265}\sqrt{2} + \frac{9}{53}\sqrt{2} + \frac{18}{53} \\ -\frac{3}{106}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{6}{265}\sqrt{2} - \frac{12}{265} & -\frac{1}{265}\sqrt{265}\sqrt{2} + \frac{9}{53}\sqrt{2} + \frac{18}{53} & -\frac{229}{530}\sqrt{2} + \frac{36}{265} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 82. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 79

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{333}{698}\sqrt{2} - \frac{16}{349} & -\frac{9}{349}\sqrt{349}\sqrt{2} + \frac{6}{349}\sqrt{2} - \frac{12}{349} & -\frac{3}{698}\sqrt{349}\sqrt{2} - \frac{36}{349}\sqrt{2} + \frac{72}{349} \\ \frac{9}{349}\sqrt{349}\sqrt{2} + \frac{6}{349}\sqrt{2} - \frac{12}{349} & -\frac{170}{349}\sqrt{2} - \frac{9}{349} & \frac{2}{349}\sqrt{349}\sqrt{2} - \frac{27}{349}\sqrt{2} + \frac{54}{349} \\ \frac{3}{698}\sqrt{349}\sqrt{2} - \frac{36}{349}\sqrt{2} + \frac{72}{349} & -\frac{2}{349}\sqrt{349}\sqrt{2} - \frac{27}{349}\sqrt{2} + \frac{54}{349} & -\frac{25}{698}\sqrt{2} - \frac{324}{349} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 83. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 80

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 84. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 81

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 85. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 81

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{73}{794}\sqrt{2} - \frac{324}{397} & \frac{3}{794}\sqrt{397}\sqrt{2} - \frac{72}{397}\sqrt{2} + \frac{144}{397} & \frac{4}{397}\sqrt{397}\sqrt{2} + \frac{27}{397}\sqrt{2} - \frac{54}{397} \\ -\frac{3}{794}\sqrt{397}\sqrt{2} - \frac{72}{397}\sqrt{2} + \frac{144}{397} & -\frac{333}{794}\sqrt{2} - \frac{64}{397} & \frac{9}{397}\sqrt{397}\sqrt{2} - \frac{12}{397}\sqrt{2} + \frac{24}{397} \\ -\frac{4}{397}\sqrt{397}\sqrt{2} + \frac{27}{397}\sqrt{2} - \frac{54}{397} & -\frac{9}{397}\sqrt{397}\sqrt{2} - \frac{12}{397}\sqrt{2} + \frac{24}{397} & -\frac{194}{397}\sqrt{2} - \frac{9}{397} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 86. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 82

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 87. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 82

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11}\sqrt{2} + \frac{1}{11} & \frac{1}{22}\sqrt{11}\sqrt{2} + \frac{3}{22}\sqrt{2} + \frac{3}{11} & \frac{3}{22}\sqrt{11}\sqrt{2} - \frac{1}{22}\sqrt{2} - \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{22}\sqrt{11}\sqrt{2} + \frac{3}{22}\sqrt{2} + \frac{3}{11} & -\frac{1}{11}\sqrt{2} + \frac{9}{11} & -\frac{1}{22}\sqrt{11}\sqrt{2} - \frac{3}{22}\sqrt{2} - \frac{3}{11} \\ -\frac{3}{22}\sqrt{11}\sqrt{2} - \frac{1}{22}\sqrt{2} - \frac{1}{11} & \frac{1}{22}\sqrt{11}\sqrt{2} - \frac{3}{22}\sqrt{2} - \frac{3}{11} & -\frac{5}{11}\sqrt{2} + \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 88. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 83

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{164}\sqrt{2} + \frac{81}{82} & -\frac{9}{164}\sqrt{2} - \frac{9}{82} & -\frac{1}{164}\sqrt{82}\sqrt{2} \\ -\frac{9}{164}\sqrt{2} - \frac{9}{82} & -\frac{81}{164}\sqrt{2} + \frac{1}{82} & -\frac{9}{164}\sqrt{82}\sqrt{2} \\ \frac{1}{164}\sqrt{82}\sqrt{2} & \frac{9}{164}\sqrt{82}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 89. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 84

$$A = \begin{pmatrix} \frac{25}{122}\sqrt{2} - \frac{36}{61} & -\frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{12}{61}\sqrt{2} - \frac{24}{61} & \frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{9}{61}\sqrt{2} - \frac{18}{61} \\ \frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{12}{61}\sqrt{2} - \frac{24}{61} & \frac{45}{122}\sqrt{2} - \frac{16}{61} & -\frac{3}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{6}{61}\sqrt{2} - \frac{12}{61} \\ -\frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{9}{61}\sqrt{2} - \frac{18}{61} & \frac{3}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{6}{61}\sqrt{2} - \frac{12}{61} & \frac{26}{61}\sqrt{2} - \frac{9}{61} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 90. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 85

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{529}{770} & \frac{2}{385}\sqrt{385}\sqrt{3} + \frac{18}{77} & -\frac{3}{154}\sqrt{385}\sqrt{3} + \frac{24}{385} \\ -\frac{2}{385}\sqrt{385}\sqrt{3} + \frac{18}{77} & -\frac{61}{77} & -\frac{6}{385}\sqrt{385}\sqrt{3} - \frac{6}{77} \\ \frac{3}{154}\sqrt{385}\sqrt{3} + \frac{24}{385} & \frac{6}{385}\sqrt{385}\sqrt{3} - \frac{6}{77} & -\frac{401}{770} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 91. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 86

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{37}{82}\sqrt{2} + \frac{4}{41} & -\frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{6}{41}\sqrt{2} - \frac{12}{41} & \frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{1}{41}\sqrt{2} - \frac{2}{41} \\ \frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{6}{41}\sqrt{2} - \frac{12}{41} & -\frac{5}{82}\sqrt{2} + \frac{36}{41} & \frac{1}{41}\sqrt{41}\sqrt{2} + \frac{3}{41}\sqrt{2} + \frac{6}{41} \\ -\frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{1}{41}\sqrt{2} - \frac{2}{41} & -\frac{1}{41}\sqrt{41}\sqrt{2} + \frac{3}{41}\sqrt{2} + \frac{6}{41} & -\frac{20}{41}\sqrt{2} + \frac{1}{41} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 92. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 87

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 93. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 88

$$A = \begin{pmatrix} \frac{31}{46} & -\frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} - \frac{27}{46} & -\frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{46} \\ \frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} - \frac{27}{46} & -\frac{19}{92} & -\frac{3}{23}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{92} \\ \frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{46} & \frac{3}{23}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{92} & -\frac{43}{92} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 94. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 89

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{25}{122}\sqrt{2} - \frac{36}{61} & -\frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{9}{61}\sqrt{2} + \frac{18}{61} & -\frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2} + \frac{12}{61}\sqrt{2} - \frac{24}{61} \\ \frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{9}{61}\sqrt{2} + \frac{18}{61} & -\frac{26}{61}\sqrt{2} - \frac{9}{61} & -\frac{3}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{6}{61}\sqrt{2} + \frac{12}{61} \\ \frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2} + \frac{12}{61}\sqrt{2} - \frac{24}{61} & \frac{3}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{6}{61}\sqrt{2} + \frac{12}{61} & -\frac{45}{122}\sqrt{2} - \frac{16}{61} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 95. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 90

$$A = \begin{pmatrix} \frac{89}{169} & -\frac{6}{13}\sqrt{3} + \frac{6}{169} & \frac{2}{13}\sqrt{3} + \frac{18}{169} \\ \frac{6}{13}\sqrt{3} + \frac{6}{169} & \frac{185}{338} & -\frac{3}{26}\sqrt{3} + \frac{24}{169} \\ -\frac{2}{13}\sqrt{3} + \frac{18}{169} & \frac{3}{26}\sqrt{3} + \frac{24}{169} & \frac{313}{338} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 96. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 90

$$A = \begin{pmatrix} \frac{20}{121}\sqrt{2} + \frac{81}{121} & -\frac{16}{121}\sqrt{2} + \frac{54}{121} & \frac{42}{121}\sqrt{2} - \frac{18}{121} \\ -\frac{38}{121}\sqrt{2} + \frac{54}{121} & \frac{85}{242}\sqrt{2} + \frac{36}{121} & -\frac{87}{242}\sqrt{2} - \frac{12}{121} \\ -\frac{24}{121}\sqrt{2} - \frac{18}{121} & \frac{111}{242}\sqrt{2} - \frac{12}{121} & \frac{117}{242}\sqrt{2} + \frac{4}{121} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 97. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 91

$$A = \begin{pmatrix} \frac{41}{83}\sqrt{3} + \frac{1}{83} & -\frac{9}{166}\sqrt{83} - \frac{1}{166}\sqrt{3} + \frac{1}{83} & \frac{1}{166}\sqrt{83} - \frac{9}{166}\sqrt{3} + \frac{9}{83} \\ \frac{9}{166}\sqrt{83} - \frac{1}{166}\sqrt{3} + \frac{1}{83} & \frac{41}{83}\sqrt{3} + \frac{1}{83} & -\frac{1}{166}\sqrt{83} - \frac{9}{166}\sqrt{3} + \frac{9}{83} \\ -\frac{1}{166}\sqrt{83} - \frac{9}{166}\sqrt{3} + \frac{9}{83} & \frac{1}{166}\sqrt{83} - \frac{9}{166}\sqrt{3} + \frac{9}{83} & \frac{1}{83}\sqrt{3} + \frac{81}{83} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 98. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 92

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{14} & -\frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{14} & \frac{13}{28} & -\frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{28} \\ \frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{3}{14} & \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{28} & -\frac{11}{28} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 99. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 93

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 100. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : → page 93

$$A = \begin{pmatrix} \frac{17}{44}\sqrt{3} + \frac{5}{22} & \frac{9}{44}\sqrt{\frac{22}{5}} - \frac{1}{22}\sqrt{3} + \frac{1}{11} & \frac{1}{22}\sqrt{\frac{22}{5}} + \frac{9}{44}\sqrt{3} - \frac{9}{22} \\ -\frac{9}{44}\sqrt{\frac{22}{5}} - \frac{1}{22}\sqrt{3} + \frac{1}{11} & \frac{53}{110}\sqrt{3} + \frac{2}{55} & -\frac{5}{44}\sqrt{\frac{22}{5}} + \frac{9}{110}\sqrt{3} - \frac{9}{55} \\ -\frac{1}{22}\sqrt{\frac{22}{5}} + \frac{9}{44}\sqrt{3} - \frac{9}{22} & \frac{5}{44}\sqrt{\frac{22}{5}} + \frac{9}{110}\sqrt{3} - \frac{9}{55} & \frac{29}{220}\sqrt{3} + \frac{81}{110} \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Corrigé 1. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 1

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{13}{21}\right)^2 + \left(\frac{16}{21}\right)^2 + \left(-\frac{4}{21}\right)^2 \\ &= \left(\frac{169}{441}\right) + \left(\frac{256}{441}\right) + \left(\frac{16}{441}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0, -2), (0{,}1{,}4)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0, -2), (0{,}1{,}4)\right)$.

Corrigé 2. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 1

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{69}{101}\right)^2 + \left(\frac{16}{101}\right)^2 + \left(-\frac{72}{101}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4761}{10201}\right) + \left(\frac{256}{10201}\right) + \left(\frac{5184}{10201}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{4}{9}\right), \left(0{,}1, \frac{2}{9}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{4}{9}\right), \left(0{,}1, \frac{2}{9}\right)\right)$.

Corrigé 3. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 1

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{212}{433}\sqrt{2}-\frac{9}{433}\right)^2+\left(\frac{9}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}-\frac{15}{433}\sqrt{2}+\frac{30}{433}\right)^2+\left(-\frac{5}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}-\frac{27}{433}\sqrt{2}+\frac{54}{433}\right)^2\\ &= \left(\frac{3816}{187489}\sqrt{2}+\frac{89969}{187489}\right)+\left(\frac{540}{187489}\sqrt{433}\sqrt{2}-\frac{540}{187489}\sqrt{433}-\frac{900}{187489}\sqrt{2}+\frac{71496}{187489}\right)+\left(-\frac{540}{187489}\right.\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{10}{3}, -6\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ -\frac{10}{3},\ -6\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{212}{433}\sqrt{2}+\frac{9}{433},\ -\frac{9}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}+\frac{15}{433}\sqrt{2}-\frac{30}{433},\ \frac{5}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}+\frac{27}{433}\sqrt{2}-\frac{54}{433}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{212}{433}\sqrt{2}+\frac{9}{433}\\ -\frac{10}{3} & 0 & -\frac{9}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}+\frac{15}{433}\sqrt{2}-\frac{30}{433}\\ -6 & 0 & \frac{5}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}+\frac{27}{433}\sqrt{2}-\frac{54}{433}\end{vmatrix} = \frac{212}{1299}\sqrt{433}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{4}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ -\frac{10}{3},\ -6\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{10}{3}y - 6z = 0$.

Corrigé 4. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 1

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{113}{194}\right)^2 + \left(-\frac{9}{194}\sqrt{97}\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\frac{18}{97}\right)^2\\ &= \left(\frac{12769}{37636}\right) + \left(\frac{243}{388}\right) + \left(\frac{324}{9409}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{9}{4}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ 0,\ \frac{9}{4}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{113}{194}, \frac{9}{194}\sqrt{97}\sqrt{3}, \frac{18}{97}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{113}{194}\\ 0 & 0 & \frac{9}{194}\sqrt{97}\sqrt{3}\\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{18}{97}\end{vmatrix} = \frac{81}{776}\sqrt{97}\sqrt{3}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{3}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ 0,\ \frac{9}{4}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{4}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^\perp$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{9}{4}z = 0$.

Corrigé 5. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 1

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{139}{157}\right)^2 + \left(\frac{72}{157}\right)^2 + \left(-\frac{12}{157}\right)^2\\ &= \left(\frac{19321}{24649}\right) + \left(\frac{5184}{24649}\right) + \left(\frac{144}{24649}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{3}{2}\right), (0{,}1{,}6)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{3}{2}\right), (0{,}1{,}6)\right)$.

Corrigé 6. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 2

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{117}{284}\sqrt{2} - \frac{25}{142}\right)^2 + \left(-\frac{9}{284}\sqrt{142}\sqrt{2} - \frac{15}{142}\sqrt{2} + \frac{15}{71}\right)^2 + \left(-\frac{3}{142}\sqrt{142}\sqrt{2} + \frac{45}{284}\sqrt{2} - \frac{45}{142}\right)^2\\ &= \left(\frac{2925}{20164}\sqrt{2} + \frac{14939}{40328}\right) + \left(-\frac{135}{10082}\sqrt{142}\sqrt{2} + \frac{135}{10082}\sqrt{142} - \frac{225}{5041}\sqrt{2} + \frac{7101}{20164}\right) + \left(\frac{135}{10082}\sqrt{142}\sqrt{2} -\right.\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{6}{5},\, \frac{9}{5}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{tr}(-f) = \operatorname{tr}(-A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{117}{284}\sqrt{2} + \frac{25}{142},\, \frac{9}{284}\sqrt{142}\sqrt{2} + \frac{15}{142}\sqrt{2} - \frac{15}{71},\, \frac{3}{142}\sqrt{142}\sqrt{2} - \frac{45}{284}\sqrt{2} + \frac{45}{142}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{117}{284}\sqrt{2} + \frac{25}{142} \\ -\frac{6}{5} & 0 & \frac{9}{284}\sqrt{142}\sqrt{2} + \frac{15}{142}\sqrt{2} - \frac{15}{71} \\ \frac{9}{5} & 0 & \frac{3}{142}\sqrt{142}\sqrt{2} - \frac{45}{284}\sqrt{2} + \frac{45}{142} \end{vmatrix} = \frac{117}{1420}\sqrt{142}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{6}{5},\, \frac{9}{5}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{6}{5}y + \frac{9}{5}z = 0$.

Corrigé 7. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 2
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{13}{58}\sqrt{2} - \frac{16}{29}\right)^2 + \left(\frac{1}{29}\sqrt{29}\sqrt{2} + \frac{6}{29}\sqrt{2} + \frac{12}{29}\right)^2 + \left(\frac{3}{58}\sqrt{29}\sqrt{2} - \frac{4}{29}\sqrt{2} - \frac{8}{29}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{208}{841}\sqrt{2} + \frac{681}{1682}\right) + \left(\frac{24}{841}\sqrt{29}\sqrt{2} + \frac{24}{841}\sqrt{29} + \frac{144}{841}\sqrt{2} + \frac{274}{841}\right) + \left(-\frac{24}{841}\sqrt{29}\sqrt{2} - \frac{24}{841}\sqrt{29} + \frac{64}{84}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{3}{4},\, \frac{1}{2}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{tr}(-f) = \operatorname{tr}(-A) = -\sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{13}{58}\sqrt{2} + \frac{16}{29},\, -\frac{1}{29}\sqrt{29}\sqrt{2} - \frac{6}{29}\sqrt{2} - \frac{12}{29},\, -\frac{3}{58}\sqrt{29}\sqrt{2} + \frac{4}{29}\sqrt{2} + \frac{8}{29}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{13}{58}\sqrt{2} + \frac{16}{29} \\ -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{29}\sqrt{29}\sqrt{2} - \frac{6}{29}\sqrt{2} - \frac{12}{29} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{58}\sqrt{29}\sqrt{2} + \frac{4}{29}\sqrt{2} + \frac{8}{29} \end{vmatrix} = -\frac{13}{232}\sqrt{29}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{3}{4},\, \frac{1}{2}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}z = 0$.

Corrigé 8. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 2
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{25}{68}\sqrt{2} + \frac{9}{34}\right)^2 + \left(-\frac{3}{68}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{3}{17}\sqrt{2} + \frac{6}{17}\right)^2 + \left(\frac{1}{17}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{9}{68}\sqrt{2} + \frac{9}{34}\right)^2 \\ &= \left(\frac{225}{1156}\sqrt{2} + \frac{787}{2312}\right) + \left(-\frac{9}{289}\sqrt{34}\sqrt{2} + \frac{9}{289}\sqrt{34} - \frac{36}{289}\sqrt{2} + \frac{369}{1156}\right) + \left(\frac{9}{289}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{9}{289}\sqrt{34} - \right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{4}{3}, 1\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, \frac{4}{3},\, 1\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{25}{68}\sqrt{2} + \frac{9}{34},\, -\frac{3}{68}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{3}{17}\sqrt{2} + \frac{6}{17},\, \frac{1}{17}\sqrt{34}\sqrt{2} - \frac{9}{68}\sqrt{2} + \frac{9}{34}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{25}{68}\sqrt{2}+\frac{9}{34} \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{3}{68}\sqrt{34}\sqrt{2}-\frac{3}{17}\sqrt{2}+\frac{6}{17} \\ 1 & 0 & \frac{1}{17}\sqrt{34}\sqrt{2}-\frac{9}{68}\sqrt{2}+\frac{9}{34} \end{vmatrix} = -\frac{25}{204}\sqrt{34}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1, \frac{4}{3}, 1\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{1}{4}\pi$.

Corrigé 9. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ← page 2

Or :

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{23}{185}\right)^2 + \left(-\frac{36}{185}\right)^2 + \left(\frac{36}{37}\right)^2 \\ &= \left(\frac{529}{34225}\right) + \left(\frac{1296}{34225}\right) + \left(\frac{1296}{1369}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,0,\frac{9}{10}\right), \left(0,1,\frac{1}{5}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,0,\frac{9}{10}\right), \left(0,1,\frac{1}{5}\right)\right)$.

Corrigé 10. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ← page 2

Or :

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= (0)^2 + (1)^2 + (0)^2 \\ &= (0) + (1) + (0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,1,0), (0,0,1))$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1{,}1{,}0), (0{,}0{,}1))$.

Corrigé 11. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 2

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{81}\right) + \left(\frac{64}{81}\right) + \left(\frac{16}{81}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1{,}0, -2), (0{,}1{,}2))$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1{,}0, -2), (0{,}1{,}2))$.

Corrigé 12. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 3

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{74}{157}\sqrt{2} - \frac{9}{157}\right)^2 + \left(-\frac{1}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} - \frac{18}{157}\sqrt{2} - \frac{36}{157}\right)^2 + \left(-\frac{6}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} + \frac{3}{157}\sqrt{2} + \frac{6}{157}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1332}{24649}\sqrt{2} + \frac{11033}{24649}\right) + \left(\frac{72}{24649}\sqrt{157}\sqrt{2} + \frac{72}{24649}\sqrt{157} + \frac{1296}{24649}\sqrt{2} + \frac{2258}{24649}\right) + \left(-\frac{72}{24649}\sqrt{157}\sqrt{}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les

méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}4, -\frac{2}{3}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ 4,\ -\frac{2}{3}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = -\sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{74}{157}\sqrt{2} + \frac{9}{157},\ \frac{1}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} + \frac{18}{157}\sqrt{2} + \frac{36}{157},\ \frac{6}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} - \frac{3}{157}\sqrt{2} - \frac{6}{157}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{74}{157}\sqrt{2} + \frac{9}{157} \\ 4 & 0 & \frac{1}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} + \frac{18}{157}\sqrt{2} + \frac{36}{157} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{6}{157}\sqrt{157}\sqrt{2} - \frac{3}{157}\sqrt{2} - \frac{6}{157} \end{vmatrix} = -\frac{74}{471}\sqrt{157}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ 4,\ -\frac{2}{3}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + 4y - \frac{2}{3}z = 0$.

Corrigé 13. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 3

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{11}{12}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} + \frac{1}{12}\right)^2 + \left(-\frac{1}{12}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} - \frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \left(\frac{121}{144}\right) + \left(-\frac{1}{36}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} + \frac{77}{720}\right) + \left(\frac{1}{36}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}} + \frac{19}{360}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les

méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f)-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d}=\left(1,\,-\frac{1}{5},\,\frac{2}{5}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f)=\mathrm{tr}(-A)=2=1+2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta)=\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u}=(1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u})=\left(\frac{11}{12},\,\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}}-\frac{1}{12},\,\frac{1}{12}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}}+\frac{1}{6}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d},\vec{u},-f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{11}{12}\\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}}-\frac{1}{12}\\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{12}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}}+\frac{1}{6}\end{vmatrix}=\frac{1}{12}\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta\equiv\frac{1}{3}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\,-\frac{1}{5},\,\frac{2}{5}\right)$ et de mesure d'angle $\theta+\pi=\frac{4}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x-\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}z=0$.

Corrigé 14. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 3

$$\begin{aligned}\langle C_1,C_1\rangle&=(0)^2+\left(\frac{1}{37}\sqrt{37}\right)^2+\left(-\frac{6}{37}\sqrt{37}\right)^2\\&=(0)+\left(\frac{1}{37}\right)+\left(\frac{36}{37}\right)\\&=1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2,C_2\rangle=\langle C_3,C_3\rangle=1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1,C_2\rangle=\langle C_1,C_3\rangle=\langle C_2,C_3\rangle=0$. On en déduit que (C_1,C_2,C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z))=(x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les

méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f)-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(0{,}1,\frac{1}{6}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d}=\left(0,\,1,\,\frac{1}{6}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f)=\mathrm{tr}(-A)=1=1+2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta)=0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u}=(1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u})=\left(0,\,-\frac{1}{37}\sqrt{37},\,\frac{6}{37}\sqrt{37}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d},\vec{u},-f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{37}\sqrt{37} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{6}{37}\sqrt{37} \end{vmatrix}=-\frac{1}{6}\sqrt{37}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta\equiv-\frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(0,\,1,\,\frac{1}{6}\right)$ et de mesure d'angle $\theta+\pi=\frac{1}{2}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $y+\frac{1}{6}z=0$.

Corrigé 15. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 3

$$\begin{aligned}\langle C_1,C_1\rangle &=\left(\frac{97}{196}\sqrt{3}-\frac{1}{98}\right)^2+\left(\frac{1}{49}\sqrt{3}-\frac{9}{28}\sqrt{2}+\frac{2}{49}\right)^2+\left(\frac{9}{196}\sqrt{3}+\frac{1}{7}\sqrt{2}+\frac{9}{98}\right)^2\\ &=\left(-\frac{97}{9604}\sqrt{3}+\frac{4033}{5488}\right)+\left(-\frac{9}{686}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{4}{2401}\sqrt{3}-\frac{9}{343}\sqrt{2}+\frac{575}{2744}\right)+\left(\frac{9}{686}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{81}{9604}\sqrt{3}+\frac{9}{34\cdots}\right.\\ &=1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2,C_2\rangle=\langle C_3,C_3\rangle=1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1,C_2\rangle=\langle C_1,C_3\rangle=\langle C_2,C_3\rangle=0$. On en déduit que (C_1,C_2,C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z))=(x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les

méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1, -4, -9)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = (1,\ -4,\ -9)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = -\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{97}{196}\sqrt{3} + \frac{1}{98},\ -\frac{1}{49}\sqrt{3} + \frac{9}{28}\sqrt{2} - \frac{2}{49},\ -\frac{9}{196}\sqrt{3} - \frac{1}{7}\sqrt{2} - \frac{9}{98}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{97}{196}\sqrt{3} + \frac{1}{98} \\ -4 & 0 & -\frac{1}{49}\sqrt{3} + \frac{9}{28}\sqrt{2} - \frac{2}{49} \\ -9 & 0 & -\frac{9}{196}\sqrt{3} - \frac{1}{7}\sqrt{2} - \frac{9}{98} \end{vmatrix} = -\frac{97}{28}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{5}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $(1,\ -4,\ -9)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^\perp$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - 4y - 9z = 0$.

Corrigé 16. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 3

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{38}{47}\right)^2 + \left(-\frac{6}{47}\right)^2 + \left(\frac{27}{47}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1444}{2209}\right) + \left(\frac{36}{2209}\right) + \left(\frac{729}{2209}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, 0, \frac{1}{3}\right), \left(0, 1, \frac{2}{9}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, 0, \frac{1}{3}\right), \left(0, 1, \frac{2}{9}\right)\right)$.

Corrigé 17. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 3

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (0)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + (0) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0{,}0{,}1)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = (0,\, 0,\, 1)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\, \frac{1}{2}\sqrt{2},\, 0\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{4}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $(0,\, 0,\, 1)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $z = 0$.

Corrigé 18. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 4

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{9}{34}\sqrt{3} - \frac{8}{17}\right)^2 + \left(-\frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{3}{17}\sqrt{3} + \frac{6}{17}\right)^2 + \left(\frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{3}{17}\sqrt{3} + \frac{6}{17}\right)^2 \\ &= \left(\frac{72}{289}\sqrt{3} + \frac{499}{1156}\right) + \left(\frac{9}{289}\sqrt{\frac{17}{2}}\sqrt{3} - \frac{18}{289}\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{36}{289}\sqrt{3} + \frac{657}{2312}\right) + \left(-\frac{9}{289}\sqrt{\frac{17}{2}}\sqrt{3} + \frac{18}{289}\sqrt{\frac{17}{2}} - \right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ -\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{9}{34}\sqrt{3} + \frac{8}{17},\ \frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} + \frac{3}{17}\sqrt{3} - \frac{6}{17},\ -\frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} + \frac{3}{17}\sqrt{3} - \frac{6}{17}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{9}{34}\sqrt{3} + \frac{8}{17} \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} + \frac{3}{17}\sqrt{3} - \frac{6}{17} \\ -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{34}\sqrt{\frac{17}{2}} + \frac{3}{17}\sqrt{3} - \frac{6}{17} \end{vmatrix} = -\frac{9}{68}\sqrt{\frac{17}{2}}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ -\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}z = 0$.

Corrigé 19. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 4

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{125}{242}\right)^2 + \left(-\frac{3}{11}\sqrt{3} + \frac{9}{121}\right)^2 + \left(\frac{9}{22}\sqrt{3} + \frac{6}{121}\right)^2\\ &= \left(\frac{15625}{58564}\right) + \left(-\frac{54}{1331}\sqrt{3} + \frac{3348}{14641}\right) + \left(\frac{54}{1331}\sqrt{3} + \frac{29547}{58564}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{9}{2}, 3\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ \frac{9}{2},\ 3\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{125}{242}, -\frac{3}{11}\sqrt{3} + \frac{9}{121}, \frac{9}{22}\sqrt{3} + \frac{6}{121}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{125}{242}\\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{11}\sqrt{3} + \frac{9}{121}\\ 3 & 0 & \frac{9}{22}\sqrt{3} + \frac{6}{121}\end{vmatrix} = -\frac{117}{44}\sqrt{3}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{3}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\ \frac{9}{2},\ 3\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{1}{3}\pi$.

Corrigé 20. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 4

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{4}{49}\right)^2 + \left(\frac{33}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2\\ &= \left(\frac{16}{2401}\right) + \left(\frac{1089}{2401}\right) + \left(\frac{1296}{2401}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}3, -\frac{3}{2}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ 3,\ -\frac{3}{2}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{4}{49}, \frac{33}{49}, \frac{36}{49}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{49} \\ 3 & 0 & \frac{33}{49} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{36}{49} \end{vmatrix} = -\frac{45}{14}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{2}\,\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\ 3,\ -\frac{3}{2}\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{1}{2}\,\pi$.

Corrigé 21. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 4

Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{289}{866}\sqrt{3} + \frac{144}{433}\right)^2 + \left(\frac{4}{433}\sqrt{433} - \frac{90}{433}\sqrt{3} - \frac{180}{433}\right)^2 + \left(\frac{15}{866}\sqrt{433} + \frac{48}{433}\sqrt{3} + \frac{96}{433}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{41616}{187489}\sqrt{3} + \frac{333507}{749956}\right) + \left(-\frac{720}{187489}\sqrt{433}\sqrt{3} - \frac{1440}{187489}\sqrt{433} + \frac{32400}{187489}\sqrt{3} + \frac{63628}{187489}\right) + \left(\frac{720}{18748}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{5}{4}, \frac{2}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{5}{4},\, \frac{2}{3}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(-\frac{289}{866}\sqrt{3} + \frac{144}{433},\, \frac{4}{433}\sqrt{433} - \frac{90}{433}\sqrt{3} - \frac{180}{433},\, \frac{15}{866}\sqrt{433} + \frac{48}{433}\sqrt{3} + \frac{96}{433}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{289}{866}\sqrt{3} + \frac{144}{433} \\ -\frac{5}{4} & 0 & \frac{4}{433}\sqrt{433} - \frac{90}{433}\sqrt{3} - \frac{180}{433} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{15}{866}\sqrt{433} + \frac{48}{433}\sqrt{3} + \frac{96}{433} \end{vmatrix} = \frac{289}{10392}\sqrt{433}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{5}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\, -\frac{5}{4},\, \frac{2}{3}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{5}{6}\pi$.

Corrigé 22. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 4

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{25}{27}\right)^2 + \left(\frac{10}{27}\right)^2 + \left(-\frac{2}{27}\right)^2 \\ &= \left(\frac{625}{729}\right) + \left(\frac{100}{729}\right) + \left(\frac{4}{729}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}-1), (0{,}1{,}5)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}-1), (0{,}1{,}5)\right)$.

Corrigé 23. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 4

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{25}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{9}{25}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0, -2)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = (1,\ 0,\ -2)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3},\ -\frac{3}{5}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}\\ -2 & 0 & -\frac{3}{5}\end{vmatrix} = \frac{2}{5}\sqrt{5}\sqrt{3}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $(1,\ 0,\ -2)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - 2z = 0$.

Corrigé 24. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 5
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{81}{133}\right)^2 + \left(-\frac{6}{133}\sqrt{133} + \frac{36}{133}\right)^2 + \left(\frac{4}{133}\sqrt{133} + \frac{54}{133}\right)^2\\ &= \left(\frac{6561}{17689}\right) + \left(-\frac{432}{17689}\sqrt{133} + \frac{6084}{17689}\right) + \left(\frac{432}{17689}\sqrt{133} + \frac{5044}{17689}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f

est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ \frac{4}{9},\ \frac{2}{3}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{81}{133}, -\frac{6}{133}\sqrt{133} + \frac{36}{133}, \frac{4}{133}\sqrt{133} + \frac{54}{133}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{81}{133} \\ \frac{4}{9} & 0 & -\frac{6}{133}\sqrt{133} + \frac{36}{133} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{133}\sqrt{133} + \frac{54}{133} \end{vmatrix} = -\frac{52}{1197}\sqrt{133}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\ \frac{4}{9},\ \frac{2}{3}\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{1}{2}\pi$.

Corrigé 25. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 5

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{1}{73}\right)^2 + \left(\frac{72}{73}\right)^2 + \left(\frac{12}{73}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{5329}\right) + \left(\frac{5184}{5329}\right) + \left(\frac{144}{5329}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}6), (0{,}1, -6)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,0,6), (0,1,-6))$.

Corrigé 26. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 5

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,2,-1))$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = (1,\ 2,\ -1)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -1$. Donc $\theta \equiv \pi \bmod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $(1,\ 2,\ -1)$ et de mesure d'angle π.

Corrigé 27. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 5

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{25}{122}\sqrt{3} - \frac{36}{61}\right)^2 + \left(-\frac{3}{122}\sqrt{61} - \frac{12}{61}\sqrt{3} - \frac{24}{61}\right)^2 + \left(\frac{2}{61}\sqrt{61} - \frac{9}{61}\sqrt{3} - \frac{18}{61}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{900}{3721}\sqrt{3} + \frac{7059}{14884}\right) + \left(\frac{36}{3721}\sqrt{61}\sqrt{3} + \frac{72}{3721}\sqrt{61} + \frac{576}{3721}\sqrt{3} + \frac{4581}{14884}\right) + \left(-\frac{36}{3721}\sqrt{61}\sqrt{3} - \frac{72}{3721}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, \frac{2}{3},\, \frac{1}{2}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{tr}(-f) = \operatorname{tr}(-A) = -\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{25}{122}\sqrt{3} + \frac{36}{61},\ \frac{3}{122}\sqrt{61} + \frac{12}{61}\sqrt{3} + \frac{24}{61},\ -\frac{2}{61}\sqrt{61} + \frac{9}{61}\sqrt{3} + \frac{18}{61}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{25}{122}\sqrt{3} + \frac{36}{61} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{122}\sqrt{61} + \frac{12}{61}\sqrt{3} + \frac{24}{61} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{61}\sqrt{61} + \frac{9}{61}\sqrt{3} + \frac{18}{61} \end{vmatrix} = \frac{25}{732}\sqrt{61}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{5}{6}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, \frac{2}{3},\, \frac{1}{2}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{11}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^\perp$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = 0$.

Corrigé 28. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 5

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{67}{188}\right)^2 + \left(\frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{81}{188}\right)^2 + \left(-\frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{9}{94}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4489}{35344}\right) + \left(-\frac{81}{8836}\sqrt{94}\sqrt{3} + \frac{7689}{35344}\right) + \left(\frac{81}{8836}\sqrt{94}\sqrt{3} + \frac{11583}{17672}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -3, -\frac{2}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ -3,\ -\frac{2}{3}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(-\frac{67}{188},\ \frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{81}{188},\ -\frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{9}{94}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{67}{188} \\ -3 & 0 & \frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{81}{188} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{3} - \frac{9}{94} \end{vmatrix} = -\frac{85}{564}\sqrt{94}\sqrt{3}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{2}{3}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\ -3,\ -\frac{2}{3}\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{2}{3}\pi$.

Corrigé 29. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 5

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{85}{188}\sqrt{2} - \frac{9}{94}\right)^2 + \left(\frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{3}{94}\sqrt{2} - \frac{3}{47}\right)^2 + \left(-\frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{27}{188}\sqrt{2} - \frac{27}{94}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{765}{8836}\sqrt{2} + \frac{7387}{17672}\right) + \left(-\frac{27}{4418}\sqrt{94}\sqrt{2} - \frac{27}{4418}\sqrt{94} + \frac{9}{2209}\sqrt{2} + \frac{3861}{8836}\right) + \left(\frac{27}{4418}\sqrt{94}\sqrt{2} + \frac{27}{4418}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{2}{3}, 3\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ \frac{2}{3},\ 3\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{tr}(-f) = \operatorname{tr}(-A) = -\sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{85}{188}\sqrt{2} + \frac{9}{94},\ -\frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{2} + \frac{3}{94}\sqrt{2} + \frac{3}{47},\ \frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{2} + \frac{27}{188}\sqrt{2} + \frac{27}{94}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{85}{188}\sqrt{2} + \frac{9}{94} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{9}{188}\sqrt{94}\sqrt{2} + \frac{3}{94}\sqrt{2} + \frac{3}{47} \\ 3 & 0 & \frac{1}{94}\sqrt{94}\sqrt{2} + \frac{27}{188}\sqrt{2} + \frac{27}{94} \end{vmatrix} = -\frac{85}{564}\sqrt{94}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ \frac{2}{3},\ 3\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{2}{3}y + 3z = 0$.

Corrigé 30. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 6

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0{,}\frac{1}{2}\right), \left(0{,}1{,}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0{,}\frac{1}{2}\right), \left(0{,}1{,}-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Corrigé 31. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 6

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{26}{61}\sqrt{3} + \frac{9}{61}\right)^2 + \left(\frac{3}{61}\sqrt{61} + \frac{6}{61}\sqrt{3} - \frac{12}{61}\right)^2 + \left(-\frac{2}{61}\sqrt{61} + \frac{9}{61}\sqrt{3} - \frac{18}{61}\right)^2 \\ &= \left(\frac{468}{3721}\sqrt{3} + \frac{2109}{3721}\right) + \left(\frac{36}{3721}\sqrt{61}\sqrt{3} - \frac{72}{3721}\sqrt{61} - \frac{144}{3721}\sqrt{3} + \frac{801}{3721}\right) + \left(-\frac{36}{3721}\sqrt{61}\sqrt{3} + \frac{72}{3721}\sqrt{6 \right. \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{4}{3}, -2\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{4}{3},\, -2\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{26}{61}\sqrt{3} + \frac{9}{61}, \frac{3}{61}\sqrt{61} + \frac{6}{61}\sqrt{3} - \frac{12}{61}, -\frac{2}{61}\sqrt{61} + \frac{9}{61}\sqrt{3} - \frac{18}{61}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{26}{61}\sqrt{3} + \frac{9}{61} \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{3}{61}\sqrt{61} + \frac{6}{61}\sqrt{3} - \frac{12}{61} \\ -2 & 0 & -\frac{2}{61}\sqrt{61} + \frac{9}{61}\sqrt{3} - \frac{18}{61} \end{vmatrix} = -\frac{26}{183}\sqrt{61}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\, -\frac{4}{3},\, -2\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{1}{6}\pi$.

Corrigé 32. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 6

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{13}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{2}{9}\right)^2 \\ &= \left(\frac{169}{324}\right) + \left(-\frac{2}{27}\sqrt{3} + \frac{28}{81}\right) + \left(\frac{2}{27}\sqrt{3} + \frac{43}{324}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, \frac{1}{2},\, 1\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{13}{18},\, -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9},\, \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{2}{9}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{13}{18} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9} \\ 1 & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{2}{9} \end{vmatrix} = -\frac{5}{12}\sqrt{3}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{3}\pi \bmod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, \frac{1}{2},\, 1\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{2}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + z = 0$.

Corrigé 33. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 6

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{17}{35}\sqrt{2} + \frac{1}{35}\right)^2 + \left(-\frac{1}{14}\sqrt{35}\sqrt{2} + \frac{3}{70}\sqrt{2} - \frac{3}{35}\right)^2 + \left(-\frac{3}{70}\sqrt{35}\sqrt{2} - \frac{1}{14}\sqrt{2} + \frac{1}{7}\right)^2 \\ &= \left(\frac{34}{1225}\sqrt{2} + \frac{579}{1225}\right) + \left(\frac{3}{245}\sqrt{35}\sqrt{2} - \frac{3}{245}\sqrt{35} - \frac{9}{1225}\sqrt{2} + \frac{451}{1225}\right) + \left(-\frac{3}{245}\sqrt{35}\sqrt{2} + \frac{3}{245}\sqrt{35} - \right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1, -3, 5)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = (1,\ -3,\ 5)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{17}{35}\sqrt{2} + \frac{1}{35},\ -\frac{1}{14}\sqrt{35}\sqrt{2} + \frac{3}{70}\sqrt{2} - \frac{3}{35},\ -\frac{3}{70}\sqrt{35}\sqrt{2} - \frac{1}{14}\sqrt{2} + \frac{1}{7}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{17}{35}\sqrt{2} + \frac{1}{35} \\ -3 & 0 & -\frac{1}{14}\sqrt{35}\sqrt{2} + \frac{3}{70}\sqrt{2} - \frac{3}{35} \\ 5 & 0 & -\frac{3}{70}\sqrt{35}\sqrt{2} - \frac{1}{14}\sqrt{2} + \frac{1}{7} \end{vmatrix} = -\frac{17}{35}\sqrt{35}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{4}\pi \bmod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $(1,\ -3,\ 5)$ et de mesure d'angle $-\frac{1}{4}\pi$.

Corrigé 34. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 6

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + (0)^2 \\ &= \left(\frac{16}{25}\right) + \left(\frac{9}{25}\right) + (0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{1}{3}, 0\right), (0, 0, 1)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{1}{3}, 0\right), (0, 0, 1)\right)$.

Corrigé 35. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 6

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{5}{46}\sqrt{2} + \frac{18}{23}\right)^2 + \left(\frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2} - \frac{9}{46}\sqrt{2} - \frac{9}{23}\right)^2 + \left(-\frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2} - \frac{3}{46}\sqrt{2} - \frac{3}{23}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{90}{529}\sqrt{2} + \frac{673}{1058}\right) + \left(-\frac{9}{529}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2} - \frac{9}{529}\sqrt{\frac{23}{2}} + \frac{81}{529}\sqrt{2} + \frac{509}{2116}\right) + \left(\frac{9}{529}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2} + \frac{9}{529}\sqrt{\frac{23}{2}} + \right. \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -\sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(-\frac{5}{46}\sqrt{2} + \frac{18}{23}, \frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2} - \frac{9}{46}\sqrt{2} - \frac{9}{23}, -\frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2} - \frac{3}{46}\sqrt{2} - \frac{3}{23}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{46}\sqrt{2} + \frac{18}{23} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2} - \frac{9}{46}\sqrt{2} - \frac{9}{23} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2} - \frac{3}{46}\sqrt{2} - \frac{3}{23} \end{vmatrix} = -\frac{5}{138}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{3}{4}\pi$.

Corrigé 36. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ← page 7
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{37}{109}\right)^2 + \left(\frac{36}{109}\right)^2 + \left(-\frac{96}{109}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1369}{11881}\right) + \left(\frac{1296}{11881}\right) + \left(\frac{9216}{11881}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{3}{4}\right), \left(0{,}1, \frac{3}{8}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{3}{4}\right), \left(0{,}1, \frac{3}{8}\right)\right)$.

Corrigé 37. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 7

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{11}{29}\right)^2 + \left(\frac{24}{29}\right)^2 + \left(-\frac{12}{29}\right)^2\\ &= \left(\frac{121}{841}\right) + \left(\frac{576}{841}\right) + \left(\frac{144}{841}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{3}{2}\right), (0{,}1{,}2)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{3}{2}\right), (0{,}1{,}2)\right)$.

Corrigé 38. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 7

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{16}{113}\right)^2 + \left(-\frac{4}{113}\sqrt{113} + \frac{36}{113}\right)^2 + \left(-\frac{9}{113}\sqrt{113} - \frac{16}{113}\right)^2\\ &= \left(\frac{256}{12769}\right) + \left(-\frac{288}{12769}\sqrt{113} + \frac{3104}{12769}\right) + \left(\frac{288}{12769}\sqrt{113} + \frac{9409}{12769}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{9}{4}, 1\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{9}{4},\, 1\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{16}{113}, \frac{4}{113}\sqrt{113} - \frac{36}{113}, \frac{9}{113}\sqrt{113} + \frac{16}{113}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{16}{113} \\ -\frac{9}{4} & 0 & \frac{4}{113}\sqrt{113} - \frac{36}{113} \\ 1 & 0 & \frac{9}{113}\sqrt{113} + \frac{16}{113} \end{vmatrix} = \frac{97}{452}\sqrt{113}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{9}{4},\, 1\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{3}{2}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{9}{4}y + z = 0$.

Corrigé 39. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ← page 7

Or :

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{39}{41}\right)^2 + \left(\frac{12}{41}\right)^2 + \left(\frac{4}{41}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1521}{1681}\right) + \left(\frac{144}{1681}\right) + \left(\frac{16}{1681}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, 0, \frac{1}{2}\right), (0, 1, -3)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{1}{2}\right), (0{,}1, -3)\right)$.

Corrigé 40. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 7

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= (0)^2 + (0)^2 + (1)^2 \\ &= (0) + (0) + (1) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1{,}1{,}1))$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = (1,\ 1,\ 1)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = (0,\ 0,\ 1)\,.$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{2}{3}\,\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $(1,\ 1,\ 1)$ et de mesure d'angle $-\frac{2}{3}\,\pi$.

Corrigé 41. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 7

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{19}{36}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker ((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\left(1, -\frac{1}{2}, -1 \right) \right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{1}{2},\, -1\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{1}{6},\, -\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3},\, \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{2}{3} \right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{12}\sqrt{3}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{2}{3}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{1}{2},\, -1\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{1}{2}y - z = 0$.

Corrigé 42. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 8

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{36}{41}\right)^2 + \left(-\frac{1}{41}\sqrt{41} + \frac{12}{41}\right)^2 + \left(-\frac{2}{41}\sqrt{41} - \frac{6}{41}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1296}{1681}\right) + \left(-\frac{24}{1681}\sqrt{41} + \frac{185}{1681}\right) + \left(\frac{24}{1681}\sqrt{41} + \frac{200}{1681}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f

est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{1}{3},\, \frac{1}{6}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{36}{41}, \frac{1}{41}\sqrt{41} - \frac{12}{41}, \frac{2}{41}\sqrt{41} + \frac{6}{41}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{36}{41} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{41}\sqrt{41} - \frac{12}{41} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{41}\sqrt{41} + \frac{6}{41} \end{vmatrix} = \frac{5}{246}\sqrt{41}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{1}{3},\, \frac{1}{6}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{3}{2}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z = 0$.

Corrigé 43. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 8

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(-\frac{6}{11}\right)^2 + \left(-\frac{2}{11}\right)^2 \\ &= \left(\frac{81}{121}\right) + \left(\frac{36}{121}\right) + \left(\frac{4}{121}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0,-1),(0{,}1,-3)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0,-1),(0{,}1,-3)\right)$.

Corrigé 44. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 8

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{34}{43}\right)^2 + \left(-\frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3} + \frac{15}{86}\right)^2 + \left(\frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3} + \frac{15}{86}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1156}{1849}\right) + \left(-\frac{45}{3698}\sqrt{43}\sqrt{3} + \frac{693}{3698}\right) + \left(\frac{45}{3698}\sqrt{43}\sqrt{3} + \frac{693}{3698}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ -\frac{3}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{34}{43}, \frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3} - \frac{15}{86}, -\frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3} - \frac{15}{86}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{34}{43} \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3} - \frac{15}{86} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{3}{86}\sqrt{43}\sqrt{3} - \frac{15}{86} \end{vmatrix} = -\frac{9}{215}\sqrt{43}\sqrt{3}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{3}\,\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\,-\frac{3}{5},\,-\frac{3}{5}\right)$ et de mesure d'angle $\theta+\pi=\frac{2}{3}\,\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x-\frac{3}{5}y-\frac{3}{5}z=0$.

Corrigé 45. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 8
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1,C_1\rangle &= \left(\frac{37}{82}\sqrt{2}+\frac{4}{41}\right)^2+\left(\frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{6}{41}\sqrt{2}+\frac{12}{41}\right)^2+\left(-\frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{1}{41}\sqrt{2}+\frac{2}{41}\right)^2\\ &= \left(\frac{148}{1681}\sqrt{2}+\frac{1401}{3362}\right)+\left(\frac{12}{1681}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{12}{1681}\sqrt{41}-\frac{144}{1681}\sqrt{2}+\frac{473}{3362}\right)+\left(-\frac{12}{1681}\sqrt{41}\sqrt{2}+\frac{12}{1681}\sqrt{4\right.\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2,C_2\rangle=\langle C_3,C_3\rangle=1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1,C_2\rangle=\langle C_1,C_3\rangle=\langle C_2,C_3\rangle=0$. On en déduit que (C_1,C_2,C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z))=(x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}3,\,\frac{1}{2}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D=\ker(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d}=\left(1,\,3,\,\frac{1}{2}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta\in\mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f)=\mathrm{tr}(A)=\sqrt{2}+1=1+2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u}=(1,\,0,\,0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u})=\left(\frac{37}{82}\sqrt{2}+\frac{4}{41},\ \frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{6}{41}\sqrt{2}+\frac{12}{41},\ -\frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{1}{41}\sqrt{2}+\frac{2}{41}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d},\vec{u},f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \frac{37}{82}\sqrt{2}+\frac{4}{41}\\ 3 & 0 & \frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{6}{41}\sqrt{2}+\frac{12}{41}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2}-\frac{1}{41}\sqrt{2}+\frac{2}{41}\end{vmatrix}=\frac{37}{164}\sqrt{41}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta\equiv\frac{1}{4}\,\pi\mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\,3,\,\frac{1}{2}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{1}{4}\,\pi$.

Corrigé 46. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 8

Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{41}{132}\sqrt{3}-\frac{25}{66}\right)^2+\left(-\frac{1}{33}\sqrt{66}+\frac{25}{132}\sqrt{3}-\frac{25}{66}\right)^2+\left(-\frac{5}{132}\sqrt{66}-\frac{5}{33}\sqrt{3}+\frac{10}{33}\right)^2\\ &= \left(\frac{1025}{4356}\sqrt{3}+\frac{7543}{17424}\right)+\left(-\frac{25}{2178}\sqrt{66}\sqrt{3}+\frac{25}{1089}\sqrt{66}-\frac{625}{4356}\sqrt{3}+\frac{5431}{17424}\right)+\left(\frac{25}{2178}\sqrt{66}\sqrt{3}-\frac{25}{1089}\right.\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}1, -\frac{4}{5}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, 1,\, -\frac{4}{5}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{41}{132}\sqrt{3}+\frac{25}{66}, \frac{1}{33}\sqrt{66}-\frac{25}{132}\sqrt{3}+\frac{25}{66}, \frac{5}{132}\sqrt{66}+\frac{5}{33}\sqrt{3}-\frac{10}{33}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{41}{132}\sqrt{3}+\frac{25}{66} \\ 1 & 0 & \frac{1}{33}\sqrt{66}-\frac{25}{132}\sqrt{3}+\frac{25}{66} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{132}\sqrt{66}+\frac{5}{33}\sqrt{3}-\frac{10}{33}\end{vmatrix} = -\frac{41}{660}\sqrt{66}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, 1,\, -\frac{4}{5}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + y - \frac{4}{5}z = 0$.

Corrigé 47. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 8

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{2}{27}\right)^2 + \left(\frac{25}{27}\right)^2 + \left(\frac{10}{27}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{729}\right) + \left(\frac{625}{729}\right) + \left(\frac{100}{729}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{5}{2}\right), \left(0{,}1, -\frac{5}{2}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{5}{2}\right), \left(0{,}1, -\frac{5}{2}\right)\right)$.

Corrigé 48. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 9

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{2}{13}\sqrt{2} + \frac{9}{13}\right)^2 + \left(\frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\sqrt{2} - \frac{6}{13}\right)^2 \\ &= \left(\frac{36}{169}\sqrt{2} + \frac{89}{169}\right) + \left(\frac{2}{13}\right) + \left(-\frac{36}{169}\sqrt{2} + \frac{54}{169}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{2}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ 0,\ -\frac{2}{3}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\,0,\,0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{2}{13}\sqrt{2} + \frac{9}{13},\ \frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{2},\ \frac{3}{13}\sqrt{2} - \frac{6}{13}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{13}\sqrt{2} + \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{13}\sqrt{2} - \frac{6}{13} \end{vmatrix} = -\frac{2}{39}\sqrt{13}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{4}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\,0,\,-\frac{2}{3}\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{1}{4}\pi$.

Corrigé 49. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 9

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (0)^2 \\ &= \left(\frac{9}{25}\right) + \left(\frac{16}{25}\right) + (0) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,\frac{1}{2},0\right), (0,0,1)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,\frac{1}{2},0\right), (0,0,1)\right)$.

Corrigé 50. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 9

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{81}{178}\sqrt{3} - \frac{8}{89}\right)^2 + \left(-\frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} + \frac{9}{89}\sqrt{3} + \frac{18}{89}\right)^2 + \left(\frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} + \frac{9}{89}\sqrt{3} + \frac{18}{89}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{648}{7921}\sqrt{3} + \frac{19939}{31684}\right) + \left(-\frac{81}{7921}\sqrt{\frac{89}{2}}\sqrt{3} - \frac{162}{7921}\sqrt{\frac{89}{2}} + \frac{324}{7921}\sqrt{3} + \frac{11745}{63368}\right) + \left(\frac{81}{7921}\sqrt{\frac{89}{2}}\sqrt{3} + \frac{16\ldots}{79\ldots}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{9}{4}, -\frac{9}{4}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ -\frac{9}{4},\ -\frac{9}{4}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = -\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{81}{178}\sqrt{3} + \frac{8}{89},\ \frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} - \frac{9}{89}\sqrt{3} - \frac{18}{89},\ -\frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} - \frac{9}{89}\sqrt{3} - \frac{18}{89}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{81}{178}\sqrt{3} + \frac{8}{89} \\ -\frac{9}{4} & 0 & \frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} - \frac{9}{89}\sqrt{3} - \frac{18}{89} \\ -\frac{9}{4} & 0 & -\frac{9}{178}\sqrt{\frac{89}{2}} - \frac{9}{89}\sqrt{3} - \frac{18}{89} \end{vmatrix} = -\frac{81}{356}\sqrt{\frac{89}{2}}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{5}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ -\frac{9}{4},\ -\frac{9}{4}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^\perp$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{9}{4}y - \frac{9}{4}z = 0$.

Corrigé 51. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 9

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(-\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{121}\right) + \left(\frac{36}{121}\right) + \left(\frac{81}{121}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}1), \left(0{,}1, \frac{2}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}1), \left(0{,}1, \frac{2}{3}\right)\right)$.

Corrigé 52. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ← page 9
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{36}{97}\sqrt{3} - \frac{25}{97}\right)^2 + \left(\frac{3}{97}\sqrt{97} - \frac{15}{97}\sqrt{3} - \frac{30}{97}\right)^2 + \left(-\frac{3}{97}\sqrt{97} - \frac{15}{97}\sqrt{3} - \frac{30}{97}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1800}{9409}\sqrt{3} + \frac{4513}{9409}\right) + \left(-\frac{90}{9409}\sqrt{97}\sqrt{3} - \frac{180}{9409}\sqrt{97} + \frac{900}{9409}\sqrt{3} + \frac{2448}{9409}\right) + \left(\frac{90}{9409}\sqrt{97}\sqrt{3} + \frac{180}{9409}\sqrt{}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = -\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{36}{97}\sqrt{3} + \frac{25}{97}, -\frac{3}{97}\sqrt{97} + \frac{15}{97}\sqrt{3} + \frac{30}{97}, \frac{3}{97}\sqrt{97} + \frac{15}{97}\sqrt{3} + \frac{30}{97}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{36}{97}\sqrt{3}+\frac{25}{97} \\ \frac{6}{5} & 0 & -\frac{3}{97}\sqrt{97}+\frac{15}{97}\sqrt{3}+\frac{30}{97} \\ \frac{6}{5} & 0 & \frac{3}{97}\sqrt{97}+\frac{15}{97}\sqrt{3}+\frac{30}{97} \end{vmatrix} = -\frac{36}{485}\sqrt{97}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{5}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ \frac{6}{5},\ \frac{6}{5}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{6}{5}y + \frac{6}{5}z = 0$.

Corrigé 53. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 9
Or :

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{181}\sqrt{181}\right)^2 + \left(-\frac{9}{362}\sqrt{181}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{25}{181}\right) + \left(\frac{81}{724}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(0{,}1, -\frac{10}{9}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(0,\ 1,\ -\frac{10}{9}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \frac{5}{181}\sqrt{181},\ \frac{9}{362}\sqrt{181}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 & 0 & \frac{5}{181}\sqrt{181} \\ -\frac{10}{9} & 0 & \frac{9}{362}\sqrt{181} \end{vmatrix} = -\frac{1}{18}\sqrt{181}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(0,\, 1,\, -\frac{10}{9}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $y - \frac{10}{9}z = 0$.

Corrigé 54. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 10

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{29}{61}\right)^2 + \left(-\frac{48}{61}\right)^2 + \left(\frac{24}{61}\right)^2 \\ &= \left(\frac{841}{3721}\right) + \left(\frac{2304}{3721}\right) + \left(\frac{576}{3721}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{4}{3}\right), (0{,}1{,}2)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{4}{3}\right), (0{,}1{,}2)\right)$.

Corrigé 55. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 10

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{25}{57}\right)^2 + \left(-\frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57}\right)^2 + \left(\frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57}\right)^2 \\ &= \left(\frac{625}{3249}\right) + \left(\frac{160}{3249}\sqrt{57} + \frac{1312}{3249}\right) + \left(-\frac{160}{3249}\sqrt{57} + \frac{1312}{3249}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{4}{5},\, -\frac{4}{5}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{25}{57}, -\frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57}, \frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{25}{57} \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{4}{57}\sqrt{57} - \frac{20}{57} \end{vmatrix} = \frac{32}{285}\sqrt{57}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\, -\frac{4}{5},\, -\frac{4}{5}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{1}{2}\pi$.

Corrigé 56. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 10

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{241}{1130}\sqrt{3} - \frac{324}{565}\right)^2 + \left(-\frac{3}{226}\sqrt{565} - \frac{36}{565}\sqrt{3} - \frac{72}{565}\right)^2 + \left(\frac{2}{565}\sqrt{565} - \frac{27}{113}\sqrt{3} - \frac{54}{113}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{78084}{319225}\sqrt{3} + \frac{594147}{1276900}\right) + \left(\frac{108}{63845}\sqrt{565}\sqrt{3} + \frac{216}{63845}\sqrt{565} + \frac{5184}{319225}\sqrt{3} + \frac{163413}{1276900}\right) + \left(-\frac{108}{63845}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f)-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,\frac{2}{9},\frac{5}{6}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d}=\left(1,\,\frac{2}{9},\,\frac{5}{6}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f)=\mathrm{tr}(-A)=-\sqrt{3}+1=1+2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u}=(1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u})=\left(-\frac{241}{1130}\sqrt{3}+\frac{324}{565},\,\frac{3}{226}\sqrt{565}+\frac{36}{565}\sqrt{3}+\frac{72}{565},\,-\frac{2}{565}\sqrt{565}+\frac{27}{113}\sqrt{3}+\frac{54}{113}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d},\vec{u},-f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{241}{1130}\sqrt{3}+\frac{324}{565} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{3}{226}\sqrt{565}+\frac{36}{565}\sqrt{3}+\frac{72}{565} \\ \frac{5}{6} & 0 & -\frac{2}{565}\sqrt{565}+\frac{27}{113}\sqrt{3}+\frac{54}{113}\end{vmatrix}=\frac{241}{20340}\sqrt{565}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta\equiv\frac{5}{6}\pi \bmod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\,\frac{2}{9},\,\frac{5}{6}\right)$ et de mesure d'angle $\theta+\pi=\frac{11}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x+\frac{2}{9}y+\frac{5}{6}z=0$.

Corrigé 57. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 10

$$\begin{aligned}\langle C_1,C_1\rangle&=(1)^2+(0)^2+(0)^2\\&=(1)+(0)+(0)\\&=1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2,C_2\rangle=\langle C_3,C_3\rangle=1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1,C_2\rangle=\langle C_1,C_3\rangle=\langle C_2,C_3\rangle=0$. On en déduit que (C_1,C_2,C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z))=(x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}0)\,,\left(0{,}1,-\frac{8}{15}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}0)\,,\left(0{,}1,-\frac{8}{15}\right)\right)$.

Corrigé 58. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 10

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{5}{22}\right)^2 + \left(\frac{2}{33}\sqrt{33}\sqrt{3} - \frac{2}{11}\right)^2 + \left(-\frac{1}{66}\sqrt{33}\sqrt{3} - \frac{8}{11}\right)^2\\ &= \left(\frac{25}{484}\right) + \left(-\frac{8}{363}\sqrt{33}\sqrt{3} + \frac{48}{121}\right) + \left(\frac{8}{363}\sqrt{33}\sqrt{3} + \frac{267}{484}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,\frac{1}{4},1\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\,\frac{1}{4},\,1\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{5}{22},\,-\frac{2}{33}\sqrt{33}\sqrt{3} + \frac{2}{11},\,\frac{1}{66}\sqrt{33}\sqrt{3} + \frac{8}{11}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{22}\\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{2}{33}\sqrt{33}\sqrt{3} + \frac{2}{11}\\ 1 & 0 & \frac{1}{66}\sqrt{33}\sqrt{3} + \frac{8}{11}\end{vmatrix} = -\frac{17}{264}\sqrt{33}\sqrt{3}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{2}{3}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\,\frac{1}{4},\,1\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{1}{4}y + z = 0$.

Corrigé 59. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 10

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{16}{25}\right) + \left(\frac{4}{25}\right) + \left(\frac{1}{5}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{10}\sqrt{5}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{2}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y = 0$.

Corrigé 60. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 11

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{13}{23}\right)^2 + \left(\frac{18}{23}\right)^2 + \left(-\frac{6}{23}\right)^2 \\ &= \left(\frac{169}{529}\right) + \left(\frac{324}{529}\right) + \left(\frac{36}{529}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,0,-6), (0,1,3))$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,0,-6), (0,1,3))$.

Corrigé 61. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 11

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 \\ &= \left(\frac{9}{49}\right) + \left(\frac{36}{49}\right) + \left(\frac{4}{49}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,0,2), (0,1,3))$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,0,2), (0,1,3))$.

Corrigé 62. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 11

Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{27}{173}\right)^2 + \left(\frac{160}{173}\right)^2 + \left(\frac{60}{173}\right)^2\\ &= \left(\frac{729}{29929}\right) + \left(\frac{25600}{29929}\right) + \left(\frac{3600}{29929}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{4}{5}, \frac{3}{10}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1, \frac{4}{5}, \frac{3}{10}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -1$. Donc $\theta \equiv \pi \bmod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1, \frac{4}{5}, \frac{3}{10}\right)$ et de mesure d'angle π.

Corrigé 63. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ← page 11
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{5}{31}\right)^2 + \left(\frac{30}{31}\right)^2 + \left(\frac{6}{31}\right)^2\\ &= \left(\frac{25}{961}\right) + \left(\frac{900}{961}\right) + \left(\frac{36}{961}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,0,6), (0,1,-5)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1{,}0{,}6), (0{,}1,-5))$.

Corrigé 64. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 11

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{65}{97}\right)^2 + \left(-\frac{72}{97}\right)^2 + (0)^2\\ &= \left(\frac{4225}{9409}\right) + \left(\frac{5184}{9409}\right) + (0)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{4}{9}, 0\right), (0{,}0{,}1)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{4}{9}, 0\right), (0{,}0{,}1)\right)$.

Corrigé 65. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 11

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2\\ &= \left(-\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{7}{16}\right) + \left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{7}{16}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,-1,0)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = (1,\,-1,\,0)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = -\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2},\, -\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2},\, \frac{1}{4}\sqrt{2}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{5}{6}\pi \bmod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $(1,\,-1,\,0)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{11}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - y = 0$.

Corrigé 66. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 12

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{1}{82}\right)^2 + \left(\frac{9}{82}\sqrt{82}\right)^2 + \left(\frac{9}{82}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{6724}\right) + \left(\frac{81}{82}\right) + \left(\frac{81}{6724}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les

méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f)-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0,-9)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d}=(1,\,0,\,-9)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f)=\mathrm{tr}(-A)=1=1+2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta)=0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u}=(1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u})=\left(\frac{1}{82},\,-\frac{9}{82}\sqrt{82},\,-\frac{9}{82}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d},\vec{u},-f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{82} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{82}\sqrt{82} \\ -9 & 0 & -\frac{9}{82} \end{vmatrix}=\frac{81}{82}\sqrt{82}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta\equiv\frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $(1,\,0,\,-9)$ et de mesure d'angle $\theta+\pi=\frac{3}{2}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x-9z=0$.

Corrigé 67. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 12

$$\begin{aligned}\langle C_1,C_1\rangle&=(1)^2+(0)^2+(0)^2\\&=(1)+(0)+(0)\\&=1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2,C_2\rangle=\langle C_3,C_3\rangle=1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1,C_2\rangle=\langle C_1,C_3\rangle=\langle C_2,C_3\rangle=0$. On en déduit que (C_1,C_2,C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z))=(x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}0),\left(0{,}1,\frac{10}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P=\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}0),\left(0{,}1,\frac{10}{3}\right)\right)$.

Corrigé 68. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 12

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{80}{83}\right)^2 + \left(\frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{27}{166}\right)^2 + \left(\frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} - \frac{27}{166}\right)^2 \\ &= \left(\frac{6400}{6889}\right) + \left(\frac{27}{13778}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{489}{13778}\right) + \left(-\frac{27}{13778}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{489}{13778}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{9}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{80}{83}, -\frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} - \frac{27}{166}, -\frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{27}{166}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{80}{83} \\ -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} - \frac{27}{166} \\ \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{166}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{27}{166} \end{vmatrix} = -\frac{1}{747}\sqrt{83}\sqrt{3}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{2}{3}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{9}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{9}z = 0$.

Corrigé 69. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 12

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{289}{866}\sqrt{2}-\frac{144}{433}\right)^2+\left(-\frac{15}{866}\sqrt{433}\sqrt{2}-\frac{48}{433}\sqrt{2}+\frac{96}{433}\right)^2+\left(-\frac{4}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}+\frac{90}{433}\sqrt{2}-\frac{180}{433}\right)^2\\ &= \left(\frac{41616}{187489}\sqrt{2}+\frac{124993}{374978}\right)+\left(-\frac{1440}{187489}\sqrt{433}\sqrt{2}+\frac{1440}{187489}\sqrt{433}-\frac{9216}{187489}\sqrt{2}+\frac{125073}{374978}\right)+\left(\frac{1440}{187489}\right.\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f)-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{2}{3},\, \frac{5}{4}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{2}+1 = 1+2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{289}{866}\sqrt{2}+\frac{144}{433},\ \frac{15}{866}\sqrt{433}\sqrt{2}+\frac{48}{433}\sqrt{2}-\frac{96}{433},\ \frac{4}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}-\frac{90}{433}\sqrt{2}+\frac{180}{433}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{289}{866}\sqrt{2}+\frac{144}{433}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{15}{866}\sqrt{433}\sqrt{2}+\frac{48}{433}\sqrt{2}-\frac{96}{433}\\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{4}{433}\sqrt{433}\sqrt{2}-\frac{90}{433}\sqrt{2}+\frac{180}{433}\end{vmatrix} = \frac{289}{10392}\sqrt{433}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{2}{3},\, \frac{5}{4}\right)$ et de mesure d'angle $\theta+\pi = \frac{5}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^\perp$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x-\frac{2}{3}y+\frac{5}{4}z = 0$.

Corrigé 70. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 12

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{36}{121}\right)^2 + \left(\frac{76}{121}\right)^2 + \left(-\frac{87}{121}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1296}{14641}\right) + \left(\frac{5776}{14641}\right) + \left(\frac{7569}{14641}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{36}{121}, \frac{76}{121}, -\frac{87}{121}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{36}{121} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{76}{121} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{87}{121} \end{vmatrix} = \frac{85}{66}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{1}{2}\pi$.

Corrigé 71. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 12

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{1}{14}\right)^2 + \left(-\frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{3}{14}\right)^2 + \left(\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{14}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{196}\right) + \left(\frac{9}{98}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{207}{392}\right) + \left(-\frac{9}{98}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{183}{392}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{1}{14}, \frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{3}{14}, -\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{14}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{14} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{3}{14} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{14} \end{vmatrix} = \frac{5}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{2}{3}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = 0$.

Corrigé 72. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 13

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{6}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} + \frac{2}{13}\right)^2 + \left(\frac{2}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} - \frac{6}{13}\right)^2 \\ &= \left(\frac{25}{169}\right) + \left(\frac{24}{169}\sqrt{\frac{13}{5}} + \frac{488}{845}\right) + \left(-\frac{24}{169}\sqrt{\frac{13}{5}} + \frac{232}{845}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, \frac{2}{5},\, -\frac{6}{5}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{5}{13}, \frac{6}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} + \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} - \frac{6}{13}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{6}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} + \frac{2}{13} \\ -\frac{6}{5} & 0 & \frac{2}{13}\sqrt{\frac{13}{5}} - \frac{6}{13} \end{vmatrix} = -\frac{8}{13}\sqrt{\frac{13}{5}}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\, \frac{2}{5},\, -\frac{6}{5}\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{1}{2}\pi$.

Corrigé 73. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 13

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{16}{29}\right)^2 + \left(\frac{12}{29}\right)^2 \\ &= \left(\frac{441}{841}\right) + \left(\frac{256}{841}\right) + \left(\frac{144}{841}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{2}{3}\right), \left(0{,}1, -\frac{4}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{2}{3}\right), \left(0{,}1, -\frac{4}{3}\right)\right)$.

Corrigé 74. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 13

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{19}{36}\right) + \left(-\frac{1}{18}\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{9}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{17}{72}\right) + \left(\frac{1}{18}\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9}\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{17}{72}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\end{vmatrix} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{6}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ et de mesure d'angle $\theta+\pi=\frac{7}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0$.

Corrigé 75. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 13

$$\begin{aligned}\langle C_1,C_1\rangle &= \left(-\frac{17}{33}\right)^2+\left(\frac{20}{33}\right)^2+\left(\frac{20}{33}\right)^2\\ &= \left(\frac{289}{1089}\right)+\left(\frac{400}{1089}\right)+\left(\frac{400}{1089}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2,C_2\rangle=\langle C_3,C_3\rangle=1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1,C_2\rangle=\langle C_1,C_3\rangle=\langle C_2,C_3\rangle=0$. On en déduit que (C_1,C_2,C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z))=(x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0,\frac{5}{2}\right),(0{,}1,-1)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P=\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0,\frac{5}{2}\right),(0{,}1,-1)\right)$.

Corrigé 76. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 13

$$\begin{aligned}\langle C_1,C_1\rangle &= \left(\frac{85}{242}\sqrt{3}-\frac{36}{121}\right)^2+\left(\frac{27}{121}\sqrt{3}+\frac{65}{121}\right)^2+\left(-\frac{6}{121}\sqrt{3}+\frac{75}{242}\right)^2\\ &= \left(-\frac{3060}{14641}\sqrt{3}+\frac{26859}{58564}\right)+\left(\frac{3510}{14641}\sqrt{3}+\frac{6412}{14641}\right)+\left(-\frac{450}{14641}\sqrt{3}+\frac{6057}{58564}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2,C_2\rangle=\langle C_3,C_3\rangle=1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1,C_2\rangle=\langle C_1,C_3\rangle=\langle C_2,C_3\rangle=0$. On en déduit que (C_1,C_2,C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z))=(x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{3}{2},\, \frac{1}{3}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = -\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(-\frac{85}{242}\sqrt{3} + \frac{36}{121},\, -\frac{27}{121}\sqrt{3} - \frac{65}{121},\, \frac{6}{121}\sqrt{3} - \frac{75}{242}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{85}{242}\sqrt{3} + \frac{36}{121} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{27}{121}\sqrt{3} - \frac{65}{121} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{6}{121}\sqrt{3} - \frac{75}{242} \end{vmatrix} = -\frac{85}{132}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{5}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{3}{2},\, \frac{1}{3}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{1}{6}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{3}z = 0$.

Corrigé 77. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 13

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{69}{106}\right)^2 + \left(\frac{1}{106}\sqrt{53}\sqrt{3} + \frac{12}{53}\right)^2 + \left(-\frac{3}{53}\sqrt{53}\sqrt{3} + \frac{2}{53}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4761}{11236}\right) + \left(\frac{12}{2809}\sqrt{53}\sqrt{3} + \frac{735}{11236}\right) + \left(-\frac{12}{2809}\sqrt{53}\sqrt{3} + \frac{1435}{2809}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{3}{2},\, -\frac{1}{4}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{69}{106}, -\frac{1}{106}\sqrt{53}\sqrt{3} - \frac{12}{53}, \frac{3}{53}\sqrt{53}\sqrt{3} - \frac{2}{53}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{69}{106} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{106}\sqrt{53}\sqrt{3} - \frac{12}{53} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{53}\sqrt{53}\sqrt{3} - \frac{2}{53} \end{vmatrix} = \frac{37}{424}\sqrt{53}\sqrt{3}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{3}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{3}{2},\, -\frac{1}{4}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{4}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4}z = 0$.

Corrigé 78. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ← page 14
Or :

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}1{,}1)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = (1,\,1,\,1)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{2}{3},\, \frac{2}{3},\, -\frac{1}{3}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{3}\,\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $(1,\,1,\,1)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{4}{3}\,\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Corrigé 79. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 14

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{100}{217}\right)^2 + \left(\frac{6}{217}\sqrt{217} - \frac{90}{217}\right)^2 + \left(\frac{9}{217}\sqrt{217} + \frac{60}{217}\right)^2 \\ &= \left(\frac{10000}{47089}\right) + \left(-\frac{1080}{47089}\sqrt{217} + \frac{15912}{47089}\right) + \left(\frac{1080}{47089}\sqrt{217} + \frac{21177}{47089}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{9}{10}, \frac{3}{5}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{9}{10},\, \frac{3}{5}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = 0$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{100}{217},\, \frac{6}{217}\sqrt{217} - \frac{90}{217},\, \frac{9}{217}\sqrt{217} + \frac{60}{217}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{100}{217} \\ -\frac{9}{10} & 0 & \frac{6}{217}\sqrt{217} - \frac{90}{217} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{9}{217}\sqrt{217} + \frac{60}{217} \end{vmatrix} = \frac{117}{2170}\sqrt{217}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\, -\frac{9}{10},\, \frac{3}{5}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{1}{2}\pi$.

Corrigé 80. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 14

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{9}{59}\right)^2 + \left(-\frac{50}{59}\right)^2 + \left(\frac{30}{59}\right)^2 \\ &= \left(\frac{81}{3481}\right) + \left(\frac{2500}{3481}\right) + \left(\frac{900}{3481}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0,\, \frac{5}{3}\right), \left(0{,}1,\, \frac{5}{3}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0,\, \frac{5}{3}\right), \left(0{,}1,\, \frac{5}{3}\right)\right)$.

Corrigé 81. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 14

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{261}{530}\sqrt{2} + \frac{4}{265}\right)^2 + \left(\frac{3}{265}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{3}{53}\sqrt{2} - \frac{6}{53}\right)^2 + \left(-\frac{3}{106}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{6}{265}\sqrt{2} - \frac{12}{265}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1044}{70225}\sqrt{2} + \frac{68153}{140450}\right) + \left(-\frac{36}{14045}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{36}{14045}\sqrt{265} + \frac{36}{2809}\sqrt{2} + \frac{1224}{14045}\right) + \left(\frac{36}{14045}\sqrt{265}\sqrt{}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{15}{2}, -3\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{15}{2},\, -3\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -\sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(-\frac{261}{530}\sqrt{2} + \frac{4}{265}, \frac{3}{265}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{3}{53}\sqrt{2} - \frac{6}{53}, -\frac{3}{106}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{6}{265}\sqrt{2} - \frac{12}{265}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{261}{530}\sqrt{2} + \frac{4}{265} \\ -\frac{15}{2} & 0 & \frac{3}{265}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{3}{53}\sqrt{2} - \frac{6}{53} \\ -3 & 0 & -\frac{3}{106}\sqrt{265}\sqrt{2} - \frac{6}{265}\sqrt{2} - \frac{12}{265} \end{vmatrix} = -\frac{261}{1060}\sqrt{265}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\, -\frac{15}{2},\, -3\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{3}{4}\pi$.

Corrigé 82. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 14
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{333}{698}\sqrt{2} - \frac{16}{349}\right)^2 + \left(\frac{9}{349}\sqrt{349}\sqrt{2} + \frac{6}{349}\sqrt{2} - \frac{12}{349}\right)^2 + \left(\frac{3}{698}\sqrt{349}\sqrt{2} - \frac{36}{349}\sqrt{2} + \frac{72}{349}\right)^2 \\ &= \left(\frac{5328}{121801}\sqrt{2} + \frac{111401}{243602}\right) + \left(-\frac{216}{121801}\sqrt{349}\sqrt{2} + \frac{216}{121801}\sqrt{349} - \frac{144}{121801}\sqrt{2} + \frac{56754}{121801}\right) + \left(\frac{216}{121801}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{3}{4}, -\frac{9}{2}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, \frac{3}{4},\, -\frac{9}{2}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{333}{698}\sqrt{2} + \frac{16}{349},\, -\frac{9}{349}\sqrt{349}\sqrt{2} - \frac{6}{349}\sqrt{2} + \frac{12}{349},\, -\frac{3}{698}\sqrt{349}\sqrt{2} + \frac{36}{349}\sqrt{2} - \frac{72}{349}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{333}{698}\sqrt{2} + \frac{16}{349} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{9}{349}\sqrt{349}\sqrt{2} - \frac{6}{349}\sqrt{2} + \frac{12}{349} \\ -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{698}\sqrt{349}\sqrt{2} + \frac{36}{349}\sqrt{2} - \frac{72}{349} \end{vmatrix} = \frac{333}{2792}\sqrt{349}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{4}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, \frac{3}{4},\, -\frac{9}{2}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x + \frac{3}{4}y - \frac{9}{2}z = 0$.

Corrigé 83. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 14

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{16}{25}\right) + (0) + \left(\frac{9}{25}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,0,\frac{1}{3}\right), (0,1,0)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, \frac{1}{3}\right), (0{,}1{,}0)\right)$.

Corrigé 84. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 15

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0,-1), (0{,}1,-1)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0,-1), (0{,}1,-1)\right)$.

Corrigé 85. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 15

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{73}{794}\sqrt{2} - \frac{324}{397}\right)^2 + \left(-\frac{3}{794}\sqrt{397}\sqrt{2} - \frac{72}{397}\sqrt{2} + \frac{144}{397}\right)^2 + \left(-\frac{4}{397}\sqrt{397}\sqrt{2} + \frac{27}{397}\sqrt{2} - \frac{54}{397}\right)^2 \\ &= \left(\frac{23652}{157609}\sqrt{2} + \frac{215281}{315218}\right) + \left(-\frac{432}{157609}\sqrt{397}\sqrt{2} + \frac{432}{157609}\sqrt{397} - \frac{20736}{157609}\sqrt{2} + \frac{65781}{315218}\right) + \left(\frac{432}{157609}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les

méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{4}{9}, \frac{1}{6}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\ -\frac{4}{9},\ \frac{1}{6}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{73}{794}\sqrt{2} + \frac{324}{397},\ \frac{3}{794}\sqrt{397}\sqrt{2} + \frac{72}{397}\sqrt{2} - \frac{144}{397},\ \frac{4}{397}\sqrt{397}\sqrt{2} - \frac{27}{397}\sqrt{2} + \frac{54}{397}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{73}{794}\sqrt{2} + \frac{324}{397} \\ -\frac{4}{9} & 0 & \frac{3}{794}\sqrt{397}\sqrt{2} + \frac{72}{397}\sqrt{2} - \frac{144}{397} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{4}{397}\sqrt{397}\sqrt{2} - \frac{27}{397}\sqrt{2} + \frac{54}{397} \end{vmatrix} = \frac{73}{14292}\sqrt{397}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{4}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\ -\frac{4}{9},\ \frac{1}{6}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{5}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{4}{9}y + \frac{1}{6}z = 0$.

Corrigé 86. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 15

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \\ &= \left(\frac{36}{49}\right) + \left(\frac{9}{49}\right) + \left(\frac{4}{49}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{1}{2}\right), \left(0{,}1, \frac{3}{2}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{1}{2}\right), \left(0{,}1, \frac{3}{2}\right)\right)$.

Corrigé 87. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement ← page 15

si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{5}{11}\sqrt{2}+\frac{1}{11}\right)^2+\left(-\frac{1}{22}\sqrt{11}\sqrt{2}+\frac{3}{22}\sqrt{2}+\frac{3}{11}\right)^2+\left(-\frac{3}{22}\sqrt{11}\sqrt{2}-\frac{1}{22}\sqrt{2}-\frac{1}{11}\right)^2\\ &= \left(-\frac{10}{121}\sqrt{2}+\frac{51}{121}\right)+\left(-\frac{3}{121}\sqrt{11}\sqrt{2}-\frac{3}{121}\sqrt{11}+\frac{9}{121}\sqrt{2}+\frac{19}{121}\right)+\left(\frac{3}{121}\sqrt{11}\sqrt{2}+\frac{3}{121}\sqrt{11}+\frac{1}{121}\right.\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}3, -1)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = (1,\ 3,\ -1)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -\sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(-\frac{5}{11}\sqrt{2}+\frac{1}{11}, -\frac{1}{22}\sqrt{11}\sqrt{2}+\frac{3}{22}\sqrt{2}+\frac{3}{11}, -\frac{3}{22}\sqrt{11}\sqrt{2}-\frac{1}{22}\sqrt{2}-\frac{1}{11}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{11}\sqrt{2}+\frac{1}{11} \\ 3 & 0 & -\frac{1}{22}\sqrt{11}\sqrt{2}+\frac{3}{22}\sqrt{2}+\frac{3}{11} \\ -1 & 0 & -\frac{3}{22}\sqrt{11}\sqrt{2}-\frac{1}{22}\sqrt{2}-\frac{1}{11} \end{vmatrix} = \frac{5}{11}\sqrt{11}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $(1,\ 3,\ -1)$ et de mesure d'angle $\frac{3}{4}\pi$.

Corrigé 88. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 15

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(-\frac{1}{164}\sqrt{2}+\frac{81}{82}\right)^2+\left(-\frac{9}{164}\sqrt{2}-\frac{9}{82}\right)^2+\left(\frac{1}{164}\sqrt{82}\sqrt{2}\right)^2\\ &= \left(-\frac{81}{6724}\sqrt{2}+\frac{13123}{13448}\right)+\left(\frac{81}{6724}\sqrt{2}+\frac{243}{13448}\right)+\left(\frac{1}{164}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f

est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{1}{9}, 0\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1, -\frac{1}{9}, 0\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -\sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(-\frac{1}{164}\sqrt{2} + \frac{81}{82}, -\frac{9}{164}\sqrt{2} - \frac{9}{82}, \frac{1}{164}\sqrt{82}\sqrt{2}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{164}\sqrt{2} + \frac{81}{82} \\ -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{9}{164}\sqrt{2} - \frac{9}{82} \\ 0 & 0 & \frac{1}{164}\sqrt{82}\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1476}\sqrt{82}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1, -\frac{1}{9}, 0\right)$ et de mesure d'angle $\frac{3}{4}\pi$.

Corrigé 89. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ← page 15

Or :

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{25}{122}\sqrt{2} - \frac{36}{61}\right)^2 + \left(\frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{12}{61}\sqrt{2} - \frac{24}{61}\right)^2 + \left(-\frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{9}{61}\sqrt{2} - \frac{18}{61}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{900}{3721}\sqrt{2} + \frac{3217}{7442}\right) + \left(-\frac{72}{3721}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{72}{3721}\sqrt{61} + \frac{576}{3721}\sqrt{2} + \frac{2277}{7442}\right) + \left(\frac{72}{3721}\sqrt{61}\sqrt{2} + \frac{72}{3721}\sqrt{\right. \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f)-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1,\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d}=\left(1,\,\frac{2}{3},\,\frac{1}{2}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f)=\mathrm{tr}(-A)=-\sqrt{2}+1=1+2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u}=(1,\,0,\,0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u})=\left(-\frac{25}{122}\sqrt{2}+\frac{36}{61},\,-\frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2}+\frac{12}{61}\sqrt{2}+\frac{24}{61},\,\frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2}+\frac{9}{61}\sqrt{2}+\frac{18}{61}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d},\vec{u},-f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{25}{122}\sqrt{2}+\frac{36}{61} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2}+\frac{12}{61}\sqrt{2}+\frac{24}{61} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2}+\frac{9}{61}\sqrt{2}+\frac{18}{61} \end{vmatrix}=-\frac{25}{732}\sqrt{61}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta\equiv-\frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\,\frac{2}{3},\,\frac{1}{2}\right)$ et de mesure d'angle $\theta+\pi=\frac{1}{4}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{2}z=0$.

Corrigé 90. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 16

$$\begin{aligned}\langle C_1,C_1\rangle&=\left(-\frac{529}{770}\right)^2+\left(-\frac{2}{385}\sqrt{385}\sqrt{3}+\frac{18}{77}\right)^2+\left(\frac{3}{154}\sqrt{385}\sqrt{3}+\frac{24}{385}\right)^2\\&=\left(\frac{279841}{592900}\right)+\left(-\frac{72}{29645}\sqrt{385}\sqrt{3}+\frac{2544}{29645}\right)+\left(\frac{72}{29645}\sqrt{385}\sqrt{3}+\frac{262179}{592900}\right)\\&=1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2,C_2\rangle=\langle C_3,C_3\rangle=1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1,C_2\rangle=\langle C_1,C_3\rangle=\langle C_2,C_3\rangle=0$. On en déduit que (C_1,C_2,C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z))=(x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)=\{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{3}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{5}{4},\, -\frac{1}{3}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{529}{770},\, \frac{2}{385}\sqrt{385}\sqrt{3} - \frac{18}{77},\, -\frac{3}{154}\sqrt{385}\sqrt{3} - \frac{24}{385}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{529}{770} \\ -\frac{5}{4} & 0 & \frac{2}{385}\sqrt{385}\sqrt{3} - \frac{18}{77} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{154}\sqrt{385}\sqrt{3} - \frac{24}{385} \end{vmatrix} = -\frac{241}{9240}\sqrt{385}\sqrt{3}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{3}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{5}{4},\, -\frac{1}{3}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{2}{3}\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{5}{4}y - \frac{1}{3}z = 0$.

Corrigé 91. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 16

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{37}{82}\sqrt{2} + \frac{4}{41}\right)^2 + \left(\frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{6}{41}\sqrt{2} - \frac{12}{41}\right)^2 + \left(-\frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{1}{41}\sqrt{2} - \frac{2}{41}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{148}{1681}\sqrt{2} + \frac{1401}{3362}\right) + \left(-\frac{12}{1681}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{12}{1681}\sqrt{41} + \frac{144}{1681}\sqrt{2} + \frac{473}{3362}\right) + \left(\frac{12}{1681}\sqrt{41}\sqrt{2} + \frac{12}{1681}\sqrt{\ }\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -3, -\frac{1}{2}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ -3,\ -\frac{1}{2}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -\sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(-\frac{37}{82}\sqrt{2} + \frac{4}{41},\ \frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{6}{41}\sqrt{2} - \frac{12}{41},\ -\frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{1}{41}\sqrt{2} - \frac{2}{41}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{37}{82}\sqrt{2} + \frac{4}{41} \\ -3 & 0 & \frac{1}{82}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{6}{41}\sqrt{2} - \frac{12}{41} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{41}\sqrt{41}\sqrt{2} - \frac{1}{41}\sqrt{2} - \frac{2}{41} \end{vmatrix} = -\frac{37}{164}\sqrt{41}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\ -3,\ -\frac{1}{2}\right)$ et de mesure d'angle $-\frac{3}{4}\pi$.

Corrigé 92. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 16

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= (1)^2 + (0)^2 + (0)^2 \\ &= (1) + (0) + (0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1{,}0{,}0))$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = (1,\ 0,\ 0)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = -\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = (1,\ 0,\ 0).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{5}{6}\pi \bmod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $(1,\,0,\,0)$ et de mesure d'angle $-\frac{5}{6}\pi$.

Corrigé 93. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 16

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{31}{46}\right)^2 + \left(\frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} - \frac{27}{46}\right)^2 + \left(\frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{46}\right)^2 \\ &= \left(\frac{961}{2116}\right) + \left(-\frac{27}{1058}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} + \frac{1527}{4232}\right) + \left(\frac{27}{1058}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} + \frac{783}{4232}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x,y,z)) = (x,y,z)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{1}{2},\, \frac{1}{6}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\,0,\,0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{31}{46}, \frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} - \frac{27}{46}, \frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{46}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{31}{46} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} - \frac{27}{46} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{3}{46}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3} + \frac{9}{46} \end{vmatrix} = \frac{5}{138}\sqrt{\frac{23}{2}}\sqrt{3}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{2}{3}\,\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\, -\frac{1}{2},\, \frac{1}{6}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{2}{3}\,\pi$.

Corrigé 94. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Or : ← page 16

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{25}{122}\sqrt{2} - \frac{36}{61}\right)^2 + \left(\frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{9}{61}\sqrt{2} + \frac{18}{61}\right)^2 + \left(\frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2} + \frac{12}{61}\sqrt{2} - \frac{24}{61}\right)^2\\ &= \left(\frac{900}{3721}\sqrt{2} + \frac{3217}{7442}\right) + \left(\frac{72}{3721}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{72}{3721}\sqrt{61} - \frac{324}{3721}\sqrt{2} + \frac{974}{3721}\right) + \left(-\frac{72}{3721}\sqrt{61}\sqrt{2} + \frac{72}{3721}\sqrt{6}\right.\\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \{\vec{0}\}$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 0, on en déduit que f est une composition commutative d'une rotation et d'une réflexion. Pour les déterminer, notons que le cours nous propose de constater que $-f$ est une rotation : si on la détermine avec les méthodes classiques, on en déduit l'écriture de f comme composition aisément. Or une résolution de système linéaire nous donne :

$$\ker\left((-f) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)\right).$$

Ainsi $-f$ est une rotation d'axe qu'on oriente par $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{1}{2},\, \frac{2}{3}\right)$. Déterminons-en une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{tr}(-f) = \mathrm{tr}(-A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par $-f$ est

$$-f(\vec{u}) = \left(\frac{25}{122}\sqrt{2} + \frac{36}{61},\, -\frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} + \frac{9}{61}\sqrt{2} - \frac{18}{61},\, -\frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{12}{61}\sqrt{2} + \frac{24}{61}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de $-A$ par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, -f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{25}{122}\sqrt{2} + \frac{36}{61}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{2} + \frac{9}{61}\sqrt{2} - \frac{18}{61}\\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{3}{122}\sqrt{61}\sqrt{2} - \frac{12}{61}\sqrt{2} + \frac{24}{61}\end{vmatrix} = -\frac{25}{732}\sqrt{61}\sqrt{2}.$$

C'est négatif, et on en déduit : $\theta \equiv -\frac{1}{4}\,\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la composition commutative de la rotation d'axe D orienté par $\left(1,\, -\frac{1}{2},\, \frac{2}{3}\right)$ et de mesure d'angle $\theta + \pi = \frac{3}{4}\,\pi$, et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$, qui est le plan de vecteur normal $\vec{d}$, donc le plan d'équation $x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z = 0$.

Corrigé 95. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 16

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{89}{169}\right)^2 + \left(\frac{6}{13}\sqrt{3} + \frac{6}{169}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\sqrt{3} + \frac{18}{169}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7921}{28561}\right) + \left(\frac{72}{2197}\sqrt{3} + \frac{18288}{28561}\right) + \left(-\frac{72}{2197}\sqrt{3} + \frac{2352}{28561}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{4}{3}, 4\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ \frac{4}{3},\ 4\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{89}{169}, \frac{6}{13}\sqrt{3} + \frac{6}{169}, -\frac{2}{13}\sqrt{3} + \frac{18}{169}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{89}{169} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{6}{13}\sqrt{3} + \frac{6}{169} \\ 4 & 0 & -\frac{2}{13}\sqrt{3} + \frac{18}{169} \end{vmatrix} = \frac{80}{39}\sqrt{3}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{3}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\ \frac{4}{3},\ 4\right)$ et de mesure d'angle $\frac{1}{3}\pi$.

Corrigé 96. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 17

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{20}{121}\sqrt{2} + \frac{81}{121}\right)^2 + \left(-\frac{38}{121}\sqrt{2} + \frac{54}{121}\right)^2 + \left(-\frac{24}{121}\sqrt{2} - \frac{18}{121}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3240}{14641}\sqrt{2} + \frac{7361}{14641}\right) + \left(-\frac{4104}{14641}\sqrt{2} + \frac{5804}{14641}\right) + \left(\frac{864}{14641}\sqrt{2} + \frac{1476}{14641}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{9}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{20}{121}\sqrt{2} + \frac{81}{121},\ -\frac{38}{121}\sqrt{2} + \frac{54}{121},\ -\frac{24}{121}\sqrt{2} - \frac{18}{121}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{20}{121}\sqrt{2} + \frac{81}{121} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{38}{121}\sqrt{2} + \frac{54}{121} \\ -\frac{2}{9} & 0 & -\frac{24}{121}\sqrt{2} - \frac{18}{121} \end{vmatrix} = \frac{20}{99}\sqrt{2}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{4}\pi \bmod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{9}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{1}{4}\pi$.

Corrigé 97. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 17

Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(\frac{41}{83}\sqrt{3} + \frac{1}{83}\right)^2 + \left(\frac{9}{166}\sqrt{83} - \frac{1}{166}\sqrt{3} + \frac{1}{83}\right)^2 + \left(-\frac{1}{166}\sqrt{83} - \frac{9}{166}\sqrt{3} + \frac{9}{83}\right)^2 \\ &= \left(\frac{82}{6889}\sqrt{3} + \frac{5044}{6889}\right) + \left(-\frac{9}{13778}\sqrt{83}\sqrt{3} + \frac{9}{6889}\sqrt{83} - \frac{1}{6889}\sqrt{3} + \frac{3365}{13778}\right) + \left(\frac{9}{13778}\sqrt{83}\sqrt{3} - \frac{9}{6889}\right. \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}1{,}9)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = (1,\,1,\,9)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\,0,\,0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{41}{83}\sqrt{3} + \frac{1}{83},\ \frac{9}{166}\sqrt{83} - \frac{1}{166}\sqrt{3} + \frac{1}{83},\ -\frac{1}{166}\sqrt{83} - \frac{9}{166}\sqrt{3} + \frac{9}{83}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{41}{83}\sqrt{3} + \frac{1}{83} \\ 1 & 0 & \frac{9}{166}\sqrt{83} - \frac{1}{166}\sqrt{3} + \frac{1}{83} \\ 9 & 0 & -\frac{1}{166}\sqrt{83} - \frac{9}{166}\sqrt{3} + \frac{9}{83} \end{vmatrix} = \frac{41}{83}\sqrt{83}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{6}\pi \mod 2\pi$.
Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $(1,\,1,\,9)$ et de mesure d'angle $\frac{1}{6}\pi$.

Corrigé 98. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ← page 17
Or :

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_1\rangle &= \left(-\frac{1}{14}\right)^2 + \left(-\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{14}\right)^2 + \left(\frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{3}{14}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{196}\right) + \left(\frac{9}{98}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{183}{392}\right) + \left(-\frac{9}{98}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} + \frac{207}{392}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, -\frac{3}{2},\, -\frac{1}{2}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\,0,\,0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(-\frac{1}{14},\ -\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{14},\ \frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{3}{14}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{14} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{9}{14} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3} - \frac{3}{14} \end{vmatrix} = \frac{5}{14}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{3}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{2}{3}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{2}{3}\pi$.

Corrigé 99. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 17

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (0)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{16}{25}\right) + (0) + \left(\frac{9}{25}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{1}{3}\right), (0{,}1{,}0)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 2, on en déduit que f est une réflexion par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1{,}0, -\frac{1}{3}\right), (0{,}1{,}0)\right)$.

Corrigé 100. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On sait que f est une isométrie si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Or : ← page 17

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \left(\frac{17}{44}\sqrt{3} + \frac{5}{22}\right)^2 + \left(-\frac{9}{44}\sqrt{\frac{22}{5}} - \frac{1}{22}\sqrt{3} + \frac{1}{11}\right)^2 + \left(-\frac{1}{22}\sqrt{\frac{22}{5}} + \frac{9}{44}\sqrt{3} - \frac{9}{22}\right)^2 \\ &= \left(\frac{85}{484}\sqrt{3} + \frac{967}{1936}\right) + \left(\frac{9}{484}\sqrt{\frac{22}{5}}\sqrt{3} - \frac{9}{242}\sqrt{\frac{22}{5}} - \frac{1}{121}\sqrt{3} + \frac{961}{4840}\right) + \left(-\frac{9}{484}\sqrt{\frac{22}{5}}\sqrt{3} + \frac{9}{242}\sqrt{\frac{22}{5}} - \right. \\ &= 1, \end{aligned}$$

et de même : $\langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1$. Donc les colonnes sont unitaires. On calcule de même : $\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$. On en déduit que (C_1, C_2, C_3) est orthonormée, et donc f est une isométrie. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, nous devons trouver la dimension du sous-espace de ses points fixes. Or la résolution du système $f((x, y, z)) = (x, y, z)$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (simplifiez-vous la vie : faites les multiplications adéquates pour ne plus avoir de fractions), mène à :

$$\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(1, \frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right)\right)$$

(notez que les racines carrées éventuelles se simplifient).

La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de f étant égale à 1, on en déduit que f est une rotation, d'axe $D = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qu'on oriente par le vecteur $\vec{d} = \left(1,\, \frac{2}{5},\, -\frac{9}{5}\right)$. Déterminons une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de cette rotation : on a :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sqrt{3} + 1 = 1 + 2\cos(\theta),$$

donc : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Déterminons le signe de $\sin(\theta)$. Pour cela, on prend un vecteur indépendant de $\vec{d}$, par exemple $\vec{u} = (1,\, 0,\, 0)$. Son image par f est :

$$f(\vec{u}) = \left(\frac{17}{44}\sqrt{3} + \frac{5}{22},\, -\frac{9}{44}\sqrt{\frac{22}{5}} - \frac{1}{22}\sqrt{3} + \frac{1}{11},\, -\frac{1}{22}\sqrt{\frac{22}{5}} + \frac{9}{44}\sqrt{3} - \frac{9}{22}\right).$$

On la calcule en faisant le produit matriciel de A par $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$. Le calcul du déterminant de la famille $(\vec{d}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donne le signe de $\sin(\theta)$, or ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{17}{44}\sqrt{3} + \frac{5}{22} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{9}{44}\sqrt{\frac{22}{5}} - \frac{1}{22}\sqrt{3} + \frac{1}{11} \\ -\frac{9}{5} & 0 & -\frac{1}{22}\sqrt{\frac{22}{5}} + \frac{9}{44}\sqrt{3} - \frac{9}{22} \end{vmatrix} = \frac{17}{44}\sqrt{\frac{22}{5}}.$$

C'est positif, et on en déduit : $\theta \equiv \frac{1}{6}\pi \mod 2\pi$.

Conclusion. L'isométrie f est la rotation d'axe orienté par $\left(1,\, \frac{2}{5},\, -\frac{9}{5}\right)$ et de mesure d'angle $\frac{1}{6}\pi$.