Puissances matricielles calculées avec l'interpolation de Lagrange (guidé)

Ces exercices montrent comment les polynômes interpolateurs de Lagrange permettent de calculer les puissances d'une matrice diagonalisable sans expliciter de matrice de passage (si besoin : consulter mes documents *Méthodes*, section 7.1).

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 64 & 20 & 176 \\ -36 & -5 & -114 \\ -18 & -5 & -52 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 31
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(5) = 5^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 \\ 22 & 14 & 30 \\ -11 & -4 & -9 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 31
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-1) = (-1)^n, \quad Q(6) = 6^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -20 \\ -64 & -19 & 36 \\ -16 & -5 & 10 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 32
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(1) = 1, \quad Q(6) = 6^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 31 & 12 & 60 \\ -14 & 1 & -38 \\ -7 & -3 & -12 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 33

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(3) = 3^n, \quad Q(7) = 7^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 31 & 9 & 45 \\ -36 & -5 & -72 \\ -12 & -3 & -20 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 34

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(4) = 4^n, \quad Q(7) = 7^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} -28 & -14 & 54 \\ 0 & -8 & 0 \\ -9 & -7 & 17 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 35

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-1) = (-1)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 35 & 4 & 148 \\ 44 & 5 & 188 \\ -11 & -1 & -46 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 36

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(1) = 1, \quad Q(2) = 2^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} -25 & -14 & 76 \\ -51 & -47 & 219 \\ -17 & -14 & 68 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 37
$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(9) = 9^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -38 & -3 & 120 \\ 44 & 9 & -120 \\ -11 & -1 & 35 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 38
$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(5) = 5^n, \quad Q(6) = 6^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 6 \\ -44 & -19 & -32 \\ -11 & -5 & -7 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 39
$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(1) = 1, \quad Q(6) = 6^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} -41 & -12 & 208 \\ -32 & -16 & 188 \\ -8 & -3 & 43 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 40

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-4) = (-4)^n, \quad Q(-1) = (-1)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 16 \\ 16 & -3 & 44 \\ -4 & -1 & -18 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 41

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(-6) = (-6)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 66 & 4 & 212 \\ -76 & 4 & -284 \\ -19 & -1 & -63 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 42

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(8) = 8^n, \quad Q(9) = 9^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 15 & 21 & 6 \\ -16 & -22 & -6 \\ -8 & -7 & -11 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 43

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-1) = (-1)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} -44 & -8 & 172 \\ 9 & 1 & -36 \\ -9 & -2 & 35 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 44
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-1) = (-1)^n, \quad Q(1) = 1.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 \\ 30 & 22 & 54 \\ -15 & -12 & -29 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 45
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ -15 & -13 & -10 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 46
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(5) = 5^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} -33 & -20 & 152 \\ -48 & -47 & 296 \\ -12 & -10 & 67 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 47
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(3) = 3^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 26 & 15 & 69 \\ 9 & 8 & 27 \\ -9 & -5 & -24 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 48
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-1) = (-1)^n, \quad Q(3) = 3^n, \quad Q(8) = 8^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & 24 \\ -4 & -2 & 12 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 49
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(2) = 2^n, \quad Q(4) = 4^n, \quad Q(6) = 6^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 18 & 3 & 36 \\ -14 & 1 & -36 \\ -7 & -1 & -15 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 50 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(3) = 3^n, \quad Q(4) = 4^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 24 & 28 & -112 \\ -8 & -12 & 32 \\ 4 & 4 & -20 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 51 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-4) = (-4)^n, \quad Q(0) = 0.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} -27 & -15 & 132 \\ -24 & -28 & 172 \\ -6 & -5 & 35 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 52 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} -25 & -15 & -30 \\ 0 & -10 & 0 \\ 15 & 15 & 20 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 53

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(5) = 5^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 25. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 12 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 54
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(4) = 4^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 26. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -32 & -1 & 18 \\ -16 & -3 & 14 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 54
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(5) = 5^n, \quad Q(8) = 8^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 27. Soit $A = \begin{pmatrix} -33 & -12 & 188 \\ -28 & -13 & 172 \\ -7 & -3 & 42 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 55
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(-1) = (-1)^n, \quad Q(2) = 2^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 28. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 24 \\ -8 & -13 & -14 \\ -4 & -3 & -14 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 56
$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(-4) = (-4)^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 29. Soit $A = \begin{pmatrix} 31 & 12 & 120 \\ 48 & 19 & 192 \\ -12 & -4 & -45 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 57
$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(3) = 3^n, \quad Q(7) = 7^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 30. Soit $A = \begin{pmatrix} -23 & -2 & 22 \\ 42 & 9 & -30 \\ -14 & -2 & 13 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 58
$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(3) = 3^n, \quad Q(5) = 5^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 31. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -60 & -13 & 20 \\ -15 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 59

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q\left(-8\right) = \left(-8\right)^n, \quad Q\left(3\right) = 3^n, \quad Q\left(7\right) = 7^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 32. Soit $A = \begin{pmatrix} 41 & 6 & 108 \\ 32 & 11 & 100 \\ -16 & -2 & -43 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 60

$$A = P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q\left(-7\right) = \left(-7\right)^n, \quad Q\left(7\right) = 7^n, \quad Q\left(9\right) = 9^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 33. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 33 \\ 12 & 5 & 42 \\ -4 & -1 & -12 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 61

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q\left(-1\right) = \left(-1\right)^n, \quad Q\left(2\right) = 2^n, \quad Q\left(3\right) = 3^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 34. Soit $A = \begin{pmatrix} -65 & -40 & 180 \\ 45 & 30 & -120 \\ -15 & -10 & 40 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe

→ page 62

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(0) = 0, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 35. Soit $A = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 36 \\ 6 & -3 & -18 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 63
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-6) = (-6)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 36. Soit $A = \begin{pmatrix} -87 & 252 & 336 \\ -48 & 141 & 192 \\ 12 & -36 & -51 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 64
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(9) = 9^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 37. Soit $A = \begin{pmatrix} -86 & -64 & 188 \\ 57 & 41 & -132 \\ -19 & -16 & 37 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 65
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(9) = 9^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 38. Soit $A = \begin{pmatrix} 29 & 34 & -30 \\ -38 & -41 & 26 \\ -19 & -17 & 6 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 66

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 39. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 72 & 13 & 12 \\ -18 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 66

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(9) = 9^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 40. Soit $A = \begin{pmatrix} -66 & -40 & 120 \\ 56 & 34 & -104 \\ -14 & -10 & 20 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 67

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(-6) = (-6)^n, \quad Q(4) = 4^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 41. Soit $A = \begin{pmatrix} -41 & 160 & -40 \\ -10 & 39 & -10 \\ 5 & -20 & 4 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 68
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :
$$Q(-1) = (-1)^n, \quad Q(4) = 4^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 42. Soit $A = \begin{pmatrix} -63 & -36 & 180 \\ 18 & 9 & -54 \\ -18 & -12 & 51 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 69
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(9) = 9^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 43. Soit $A = \begin{pmatrix} -17 & -5 & 38 \\ -36 & -24 & 136 \\ -9 & -5 & 30 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 70
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-4) = (-4)^n, \quad Q(1) = 1.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 44. Soit $A = \begin{pmatrix} 17 & 2 & 24 \\ 32 & 12 & 76 \\ -8 & -1 & -11 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 71

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(1) = 1, \quad Q(8) = 8^n, \quad Q(9) = 9^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 45. Soit $A = \begin{pmatrix} -26 & -6 & 90 \\ -7 & -2 & 25 \\ -7 & -2 & 25 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 71
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(0) = 0, \quad Q(2) = 2^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 46. Soit $A = \begin{pmatrix} 28 & 24 & 132 \\ 72 & 46 & 288 \\ -18 & -12 & -74 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 72
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 47. Soit $A = \begin{pmatrix} -26 & 56 & 0 \\ -16 & 34 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 73
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :
$$Q(2) = 2^n, \quad Q(6) = 6^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 48. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 12 \\ -24 & -11 & -32 \\ -6 & -2 & -11 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 74 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$A = P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(-1) = (-1)^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 49. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 18 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -11 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 75 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(-4) = (-4)^n, \quad Q(-2) = (-2)^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 50. Soit $A = \begin{pmatrix} -20 & -1 & 22 \\ 52 & 9 & -40 \\ -13 & -1 & 15 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 76 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$A = P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$
(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(5) = 5^n, \quad Q(6) = 6^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 51. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 20 \\ 10 & -11 & -40 \\ -5 & 10 & 29 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 76 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :
$$Q\,(4) = 4^n, \quad Q\,(9) = 9^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 52. Soit $A = \begin{pmatrix} -26 & -3 & 81 \\ 7 & 2 & -21 \\ -7 & -1 & 22 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 77 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q\,(-5) = (-5)^n\,, \quad Q\,(1) = 1, \quad Q\,(2) = 2^n.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 53. Soit $A = \begin{pmatrix} -11 & -2 & 10 \\ 12 & 1 & -12 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 78 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :
$$Q\,(-5) = (-5)^n\,, \quad Q\,(-3) = (-3)^n\,, \quad Q\,(-2) = (-2)^n\,.$$
On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 54. Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & -24 & -96 \\ 9 & -17 & -36 \\ 3 & -3 & -20 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 79

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-5) = (-5)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 55. Soit $A = \begin{pmatrix} -57 & -20 & 180 \\ 36 & 13 & -114 \\ -12 & -5 & 36 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 80
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(3) = 3^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 56. Soit $A = \begin{pmatrix} 31 & 6 & 66 \\ 0 & 7 & 0 \\ -11 & -2 & -24 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 81
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(7) = 7^n, \quad Q(9) = 9^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 57. Soit $A = \begin{pmatrix} 54 & 16 & 164 \\ -15 & 1 & -52 \\ -15 & -4 & -47 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 82
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-6) = (-6)^n, \quad Q(5) = 5^n, \quad Q(9) = 9^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 58. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -28 & -3 & 18 \\ -14 & -3 & 12 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 82 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(3) = 3^n, \quad Q(6) = 6^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 59. Soit $A = \begin{pmatrix} 23 & 6 & 38 \\ 16 & 7 & 32 \\ -16 & -3 & -28 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 83 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(4) = 4^n, \quad Q(7) = 7^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 60. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 51 & 40 & 96 \\ -17 & -16 & -40 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 84 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(8) = 8^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 61. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 24 & 20 & 42 \\ -8 & -7 & -15 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 85
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(-1) = (-1)^n, \quad Q(6) = 6^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 62. Soit $A = \begin{pmatrix} -54 & -39 & 75 \\ 48 & 36 & -66 \\ -16 & -13 & 19 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 86
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-6) = (-6)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 63. Soit $A = \begin{pmatrix} 50 & 4 & 184 \\ 56 & 11 & 236 \\ -14 & -1 & -52 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 87
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-6) = (-6)^n, \quad Q(7) = 7^n, \quad Q(8) = 8^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 64. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & 18 \\ -10 & -9 & -16 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 88

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(2) = 2^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 65. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 18 \\ -20 & -7 & -40 \\ -5 & -1 & -13 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 89
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(-2) = (-2)^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 66. Soit $A = \begin{pmatrix} -82 & -12 & 360 \\ 0 & 5 & 0 \\ -18 & -3 & 80 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 90
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(5) = 5^n, \quad Q(8) = 8^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 67. Soit $A = \begin{pmatrix} 49 & 40 & 88 \\ -28 & -23 & -52 \\ -14 & -10 & -29 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 91
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(7) = 7^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 68. Soit $A = \begin{pmatrix} -12 & -6 & 36 \\ 20 & 14 & -36 \\ -5 & -2 & 15 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 92

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(3) = 3^n, \quad Q(6) = 6^n, \quad Q(8) = 8^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 69. Soit $A = \begin{pmatrix} -48 & -36 & 120 \\ 13 & 4 & -39 \\ -13 & -12 & 31 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 93

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(4) = 4^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 70. Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & 22 & -22 \\ -22 & -42 & 44 \\ -11 & -22 & 24 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 94

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-9) = (-9)^n, \quad Q(2) = 2^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 71. Soit $A = \begin{pmatrix} -11 & -5 & 4 \\ 14 & 8 & -4 \\ -7 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 95

$$A = P \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-4) = (-4)^n, \quad Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(3) = 3^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 72. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ -24 & -15 & 48 \\ -8 & -4 & 13 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 96

$$A = P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(1) = 1.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 73. Soit $A = \begin{pmatrix} -24 & -42 & 0 \\ 9 & 15 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 97

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-6) = (-6)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 74. Soit $A = \begin{pmatrix} -62 & -18 & 252 \\ -36 & -8 & 144 \\ -18 & -6 & 76 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 97

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(4) = 4^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 75. Soit $A = \begin{pmatrix} 23 & 24 & 78 \\ 9 & 5 & 27 \\ -9 & -8 & -30 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 98
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-4) = (-4)^n, \quad Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(5) = 5^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 76. Soit $A = \begin{pmatrix} -62 & -45 & 36 \\ 72 & 55 & -36 \\ -18 & -15 & 4 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 99
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 77. Soit $A = \begin{pmatrix} -90 & -16 & 400 \\ 0 & 6 & 0 \\ -20 & -4 & 90 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 100
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(6) = 6^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 78. Soit $A = \begin{pmatrix} 159 & 338 & -676 \\ -52 & -114 & 208 \\ 13 & 26 & -62 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 101

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(3) = 3^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 79. Soit $A = \begin{pmatrix} 29 & -96 & 24 \\ 6 & -19 & 6 \\ 3 & -12 & 8 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 102

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(5) = 5^n, \quad Q(8) = 8^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 80. Soit $A = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 42 \\ 21 & 8 & 63 \\ -7 & 0 & -13 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 103

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(1) = 1, \quad Q(8) = 8^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 81. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & -40 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 103 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q\left(0\right) = 0, \quad Q\left(10\right) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 82. Soit $A = \begin{pmatrix} 28 & 128 & 32 \\ -8 & -36 & -8 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 104 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q\left(-6\right) = \left(-6\right)^n, \quad Q\left(-4\right) = \left(-4\right)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 83. Soit $A = \begin{pmatrix} -19 & 54 & 0 \\ -9 & 26 & 0 \\ -9 & 18 & 8 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 105 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q\left(-1\right) = \left(-1\right)^n, \quad Q\left(8\right) = 8^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 84. Soit $A = \begin{pmatrix} -64 & -4 & 272 \\ 28 & 7 & -110 \\ -14 & -1 & 60 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 106

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-8) = (-8)^n, \quad Q(5) = 5^n, \quad Q(6) = 6^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 85. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 12 \\ -16 & -6 & 36 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 107
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(-1) = (-1)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 86. Soit $A = \begin{pmatrix} 50 & -120 & -120 \\ 20 & -50 & -60 \\ -5 & 15 & 25 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 107
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(5) = 5^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 87. Soit $A = \begin{pmatrix} 30 & 14 & -2 \\ -60 & -18 & -36 \\ -20 & -7 & -9 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 108
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(3) = 3^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 88. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -12 \\ -56 & -6 & 4 \\ -14 & -3 & 7 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 109 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(6) = 6^n, \quad Q(9) = 9^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 89. Soit $A = \begin{pmatrix} 28 & 12 & 132 \\ 28 & 16 & 148 \\ -7 & -3 & -33 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 110 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(4) = 4^n, \quad Q(7) = 7^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 90. Soit $A = \begin{pmatrix} 26 & 3 & 60 \\ -22 & 1 & -60 \\ -11 & -1 & -27 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 111 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(3) = 3^n, \quad Q(4) = 4^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.

3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 91. Soit $A = \begin{pmatrix} 84 & 150 & 300 \\ -15 & -21 & -60 \\ -15 & -30 & -51 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 112

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-6) = (-6)^n, \quad Q(9) = 9^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 92. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 12 \\ -6 & -2 & -12 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 113

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-2) = (-2)^n, \quad Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 93. Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

→ page 114

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 1 et tel que :

$$Q(-5) = (-5)^n, \quad Q(-4) = (-4)^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 94. Soit $A = \begin{pmatrix} 36 & 18 & 114 \\ 26 & 16 & 90 \\ -13 & -6 & -41 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe

→ page 115

$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(4) = 4^n, \quad Q(10) = 10^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 95. Soit $A = \begin{pmatrix} -14 & -2 & 50 \\ -28 & 2 & 76 \\ -7 & -1 & 25 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 115
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(6) = 6^n, \quad Q(7) = 7^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 96. Soit $A = \begin{pmatrix} -36 & -6 & 126 \\ 11 & 8 & -33 \\ -11 & -2 & 39 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 116
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-3) = (-3)^n, \quad Q(6) = 6^n, \quad Q(8) = 8^n.$$

   On donnera le résultat sous forme simplifiée.
2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 97. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -9 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe → page 117
$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(3) = 3^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 98. Soit $A = \begin{pmatrix} -19 & -3 & 24 \\ 0 & 2 & 0 \\ -12 & -3 & 17 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 118

$$A = P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(2) = 2^n, \quad Q(5) = 5^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 99. Soit $A = \begin{pmatrix} -34 & -12 & 156 \\ -18 & -16 & 108 \\ -6 & -3 & 29 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 119

$$A = P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(-10) = (-10)^n, \quad Q(-7) = (-7)^n, \quad Q(-4) = (-4)^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Exercice 100. Soit $A = \begin{pmatrix} -20 & -8 & 68 \\ 20 & 11 & -56 \\ -5 & -2 & 17 \end{pmatrix}$. On admet que A est diagonalisable. Plus précisément : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : → page 120

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(vous pouvez vous entraîner à le démontrer dans votre temps libre). Nous allons en déduire les puissances de A en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, et sans avoir à expliciter P. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer l'unique polynôme Q de degré au plus 2 et tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(3) = 3^n, \quad Q(5) = 5^n.$$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2. Justifier : $Q(A) = A^n$.
3. Calculer $Q(A)$, et en déduire une expression simple de A^n.

Corrigé 1. ← page 1

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, 5 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n L_0 + 5^n L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{90}\left(X^2 + 3X - 40\right)10^n - \frac{1}{65}\left(X^2 - 2X - 80\right)5^n + \frac{1}{234}\left(X^2 - 15X + 50\right)(-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{90}\cdot 10^n - \frac{1}{65}\cdot 5^n + \frac{1}{234}(-8)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{30}\cdot 10^n + \frac{2}{65}\cdot 5^n - \frac{5}{78}(-8)^n\right)X + \left(-\frac{4}{9}\cdot 10^n + \frac{16}{13}\cdot 5^n + \frac{25}{117}(-8)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q(5) & 0 \\ 0 & 0 & Q(10) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(5)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 208 & 300 & -168 \\ -72 & -125 & 162 \\ -36 & -75 & 106 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4\cdot 10^n - 3(-8)^n & 4\cdot 10^n - 4\cdot 5^n & 4\cdot 10^n + 8\cdot 5^n - 12(-8)^n \\ -2\cdot 10^n + 2(-8)^n & -2\cdot 10^n + 3\cdot 5^n & -2\cdot 10^n - 6\cdot 5^n + 8(-8)^n \\ -10^n + (-8)^n & -10^n + 5^n & -10^n - 2\cdot 5^n + 4(-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 2. ← page 1

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -1, 6 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-1)^n L_0 + 6^n L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{44}\left(X^2 - 5X - 6\right)10^n - \frac{1}{28}\left(X^2 - 9X - 10\right)6^n + \frac{1}{77}\left(X^2 - 16X + 60\right)(-1)^n \\ &= \left(\frac{1}{44}\cdot 10^n - \frac{1}{28}\cdot 6^n + \frac{1}{77}(-1)^n\right)X^2 + \left(-\frac{5}{44}\cdot 10^n + \frac{9}{28}\cdot 6^n - \frac{16}{77}(-1)^n\right)X + \left(-\frac{3}{22}\cdot 10^n + \frac{5}{14}\cdot 6^n + \frac{60}{77}(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 6^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} a_n - b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(6) & 0 \\ 0 & 0 & Q(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-1)$, $Q(6)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 100 & 64 & 128 \\ 198 & 164 & 326 \\ -99 & -64 & -127 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 10^n & 10^n - 6^n & 2 \cdot 10^n - 2 \cdot 6^n \\ 2 \cdot 10^n - 2\,(-1)^n & 2 \cdot 10^n - 6^n & 4 \cdot 10^n - 2 \cdot 6^n - 2\,(-1)^n \\ -10^n + (-1)^n & -10^n + 6^n & -2 \cdot 10^n + 2 \cdot 6^n + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 3. ← page 1

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, 1 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n L_0 + L_1 + 6^n L_2 \\ &= \frac{1}{80}\left(X^2 + 9\,X - 10\right)6^n + \frac{1}{176}\left(X^2 - 7\,X + 6\right)(-10)^n - \frac{1}{55}\,X^2 - \frac{4}{55}\,X + \frac{12}{11} \\ &= \left(\frac{1}{80} \cdot 6^n + \frac{1}{176}\,(-10)^n - \frac{1}{55}\right) X^2 + \left(\frac{9}{80} \cdot 6^n - \frac{7}{176}\,(-10)^n - \frac{4}{55}\right) X + \left(-\frac{1}{8} \cdot 6^n + \frac{3}{88}\,(-10)^n + \frac{12}{11}\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n + b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(6) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(1)$ et $Q(6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 36 & 35 & -140 \\ 256 & -139 & 956 \\ 64 & -35 & 240 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 6^n & 6^n - 1 & -4\cdot 6^n + 4 \\ -4\cdot 6^n + 4\,(-10)^n & -4\cdot 6^n + 5 & 16\cdot 6^n + 4\,(-10)^n - 20 \\ -6^n + (-10)^n & -6^n + 1 & 4\cdot 6^n + (-10)^n - 4 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 4. ← page 2

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels 3, 7 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 3^nL_0 + 7^nL_1 + 10^nL_2 \\ &= \frac{1}{21}\left(X^2 - 10\,X + 21\right)10^n - \frac{1}{12}\left(X^2 - 13\,X + 30\right)7^n + \frac{1}{28}\left(X^2 - 17\,X + 70\right)3^n \\ &= \left(\frac{1}{21}\cdot 10^n - \frac{1}{12}\cdot 7^n + \frac{1}{28}\cdot 3^n\right)X^2 + \left(-\frac{10}{21}\cdot 10^n + \frac{13}{12}\cdot 7^n - \frac{17}{28}\cdot 3^n\right)X + \left(10^n - \frac{5}{2}\cdot 7^n + \frac{5}{2}\cdot 3^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 7^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(3) & 0 & 0 \\ 0 & Q(7) & 0 \\ 0 & 0 & Q(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(3)$, $Q(7)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 373 & 204 & 684 \\ -182 & -53 & -422 \\ -91 & -51 & -162 \end{pmatrix}.$$
Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :
$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4\cdot 10^n - 3\cdot 3^n & 4\cdot 10^n - 4\cdot 7^n & 4\cdot 10^n + 8\cdot 7^n - 12\cdot 3^n \\ -2\cdot 10^n + 2\cdot 3^n & -2\cdot 10^n + 3\cdot 7^n & -2\cdot 10^n - 6\cdot 7^n + 8\cdot 3^n \\ -10^n + 3^n & -10^n + 7^n & -10^n - 2\cdot 7^n + 4\cdot 3^n \end{pmatrix}.$$
Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 5. ← page 2

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, 4 et 7. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n L_0 + 4^n L_1 + 7^n L_2 \\ &= \frac{1}{36}\left(X^2 + X - 20\right)7^n - \frac{1}{27}\left(X^2 - 2\,X - 35\right)4^n + \frac{1}{108}\left(X^2 - 11\,X + 28\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{36}\cdot 7^n - \frac{1}{27}\cdot 4^n + \frac{1}{108}(-5)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{36}\cdot 7^n + \frac{2}{27}\cdot 4^n - \frac{11}{108}(-5)^n\right)X + \left(-\frac{5}{9}\cdot 7^n + \frac{35}{27}\cdot 4^n + \frac{7}{27}(-5)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 7^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q(7) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(4)$ et $Q(7)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 97 & 99 & -153 \\ -72 & -83 & 180 \\ -24 & -33 & 76 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 7^n - 2\,(-5)^n & 3\cdot 7^n - 3\cdot 4^n & -3\cdot 7^n + 9\cdot 4^n - 6\,(-5)^n \\ -3\cdot 7^n + 3\,(-5)^n & -3\cdot 7^n + 4\cdot 4^n & 3\cdot 7^n - 12\cdot 4^n + 9\,(-5)^n \\ -7^n + (-5)^n & -7^n + 4^n & 7^n - 3\cdot 4^n + 3\,(-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 6. ← page 2

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, -8 et -1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n\, L_0 - L_1 - L_2 \\ &= \frac{1}{63}\left(X^2 + 18\,X + 80\right)(-1)^n - \frac{1}{14}\left(X^2 + 11\,X + 10\right)(-8)^n + \frac{1}{18}\left(X^2 + 9\,X + 8\right)(-10)^n \\ &= \left(\frac{1}{63}\,(-1)^n - \frac{1}{14}\,(-8)^n + \frac{1}{18}\,(-10)^n\right) X^2 + \left(\frac{2}{7}\,(-1)^n - \frac{11}{14}\,(-8)^n + \frac{1}{2}\,(-10)^n\right) X + \left(\frac{80}{63}\,(-1)^n - \frac{5}{7}\,(-8)^n + \frac{4}{9}\,(- \right. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n - b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-8) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-1) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(-8)$ et $Q(-1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 298 & 126 & -594 \\ 0 & 64 & 0 \\ 99 & 63 & -197 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -2\,(-1)^n + 3\,(-10)^n & -2\,(-1)^n + 2\,(-8)^n & 6\,(-1)^n - 6\,(-10)^n \\ 0 & (-8)^n & 0 \\ -\,(-1)^n + (-10)^n & -\,(-1)^n + (-8)^n & 3\,(-1)^n - 2\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 7. ← page 2

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, 1 et 2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n\,L_0 + L_1 + 2^nL_2 \\ &= \frac{1}{11}\left(X^2 + 8\,X - 9\right)2^n + \frac{1}{110}\left(X^2 - 3\,X + 2\right)(-9)^n - \frac{1}{10}\,X^2 - \frac{7}{10}\,X + \frac{9}{5} \\ &= \left(\frac{1}{11}\cdot 2^n + \frac{1}{110}\,(-9)^n - \frac{1}{10}\right)X^2 + \left(\frac{8}{11}\cdot 2^n - \frac{3}{110}\,(-9)^n - \frac{7}{10}\right)X + \left(-\frac{9}{11}\cdot 2^n + \frac{1}{55}\,(-9)^n + \frac{9}{5}\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n + b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n + 2\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(2) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(1)$ et $Q(2)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -227 & 12 & -876 \\ -308 & 13 & -1196 \\ 77 & -3 & 300 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - 3\,(-9)^n & 4 \cdot 2^n - 4 & 28 \cdot 2^n - 12\,(-9)^n - 16 \\ 4 \cdot 2^n - 4\,(-9)^n & 4 \cdot 2^n - 3 & 28 \cdot 2^n - 16\,(-9)^n - 12 \\ -2^n + (-9)^n & -2^n + 1 & -7 \cdot 2^n + 4\,(-9)^n + 4 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 8. ← page 3

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, -5 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-8)^n\,L_0 - L_1 + 9^n L_2 \\
&= \frac{1}{238}\left(X^2 + 13\,X + 40\right)9^n - \frac{1}{42}\left(X^2 - X - 72\right)(-5)^n + \frac{1}{51}\left(X^2 - 4\,X - 45\right)(-8)^n \\
&= \left(\frac{1}{238} \cdot 9^n - \frac{1}{42}\,(-5)^n + \frac{1}{51}\,(-8)^n\right) X^2 + \left(\frac{13}{238} \cdot 9^n + \frac{1}{42}\,(-5)^n - \frac{4}{51}\,(-8)^n\right) X + \Bigg(\frac{20}{119} \cdot 9^n + \frac{12}{7}\,(-5)^n - \frac{15}{17}\,(-8
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-5)^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\, a_n - 8\, b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\, a_n - 5\, b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\, a_n + 9\, b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-5) & 0 \\ 0 & 0 & Q(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(-5)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 47 & -56 & 202 \\ -51 & -143 & 723 \\ -17 & -56 & 266 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -9^n + 2\,(-8)^n & -9^n + (-5)^n & 5 \cdot 9^n - 3\,(-5)^n - 2\,(-8)^n \\ -3 \cdot 9^n + 3\,(-8)^n & -3 \cdot 9^n + 4\,(-5)^n & 15 \cdot 9^n - 12\,(-5)^n - 3\,(-8)^n \\ -9^n + (-8)^n & -9^n + (-5)^n & 5 \cdot 9^n - 3\,(-5)^n - (-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 9. ← page 3

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, 5 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n L_0 + 5^n L_1 + 6^n L_2 \\ &= \frac{1}{11}\left(X^2 - 25\right)6^n - \frac{1}{10}\left(X^2 - X - 30\right)5^n + \frac{1}{110}\left(X^2 - 11\,X + 30\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{11} \cdot 6^n - \frac{1}{10} \cdot 5^n + \frac{1}{110}\,(-5)^n\right) X^2 + \left(\frac{1}{10} \cdot 5^n - \frac{1}{10}\,(-5)^n\right) X + \left(-\frac{25}{11} \cdot 6^n + 3 \cdot 5^n + \frac{3}{11}\,(-5)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(5) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(6) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(5)$ et $Q(6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -8 & -33 & 0 \\ 44 & 69 & 0 \\ -11 & -11 & 25 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3 \cdot 6^n + 4\,(-5)^n & -3 \cdot 6^n + 3 \cdot 5^n & 12 \cdot 5^n - 12\,(-5)^n \\ 4 \cdot 6^n - 4\,(-5)^n & 4 \cdot 6^n - 3 \cdot 5^n & -12 \cdot 5^n + 12\,(-5)^n \\ -6^n + (-5)^n & -6^n + 5^n & 4 \cdot 5^n - 3\,(-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 10. ← page 3

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, 1 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n\,L_0 + L_1 + 6^n\,L_2 \\ &= \frac{1}{55}\left(X^2 + 4\,X - 5\right)6^n + \frac{1}{66}\left(X^2 - 7\,X + 6\right)(-5)^n - \frac{1}{30}\,X^2 + \frac{1}{30}\,X + 1 \\ &= \left(\frac{1}{55} \cdot 6^n + \frac{1}{66}\,(-5)^n - \frac{1}{30}\right) X^2 + \left(\frac{4}{55} \cdot 6^n - \frac{7}{66}\,(-5)^n + \frac{1}{30}\right) X + \left(-\frac{1}{11} \cdot 6^n + \frac{1}{11}\,(-5)^n + 1\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n + b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(6) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(1)$ et $Q(6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 58 & 105 & -354 \\ -44 & -139 & 568 \\ -11 & -35 & 143 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6^n - 2\,(-5)^n & 3 \cdot 6^n - 3 & -6 \cdot 6^n - 6\,(-5)^n + 12 \\ -4 \cdot 6^n + 4\,(-5)^n & -4 \cdot 6^n + 5 & 8 \cdot 6^n + 12\,(-5)^n - 20 \\ -6^n + (-5)^n & -6^n + 1 & 2 \cdot 6^n + 3\,(-5)^n - 4 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 11. ← page 4

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -4 et -1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n\,L_0 - L_1 - L_2 \\ &= \frac{1}{24}\left(X^2 + 13\,X + 36\right)(-1)^n - \frac{1}{15}\left(X^2 + 10\,X + 9\right)(-4)^n + \frac{1}{40}\left(X^2 + 5\,X + 4\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{24}\,(-1)^n - \frac{1}{15}\,(-4)^n + \frac{1}{40}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{13}{24}\,(-1)^n - \frac{2}{3}\,(-4)^n + \frac{1}{8}\,(-9)^n\right)X + \Bigg(\frac{3}{2}\,(-1)^n - \frac{3}{5}\,(-4)^n + \frac{1}{10}\,(-9 \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n - 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n - b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-4) & 0 \\ 0 & 0 & Q(-1) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-4)$ et $Q(-1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 401 & 60 & -1840 \\ 320 & 76 & -1580 \\ 80 & 15 & -379 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\,(-1)^n + 5\,(-9)^n & -4\,(-1)^n + 4\,(-4)^n & 36\,(-1)^n - 16\,(-4)^n - 20\,(-9)^n \\ -4\,(-1)^n + 4\,(-9)^n & -4\,(-1)^n + 5\,(-4)^n & 36\,(-1)^n - 20\,(-4)^n - 16\,(-9)^n \\ -(-1)^n + (-9)^n & -(-1)^n + (-4)^n & 9\,(-1)^n - 4\,(-4)^n - 4\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 12. ← page 4

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, -7 et -6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n\,L_0 - L_1 - L_2 \\ &= \frac{1}{4}\left(X^2 + 17\,X + 70\right)(-6)^n - \frac{1}{3}\left(X^2 + 16\,X + 60\right)(-7)^n + \frac{1}{12}\left(X^2 + 13\,X + 42\right)(-10)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\,(-6)^n - \frac{1}{3}\,(-7)^n + \frac{1}{12}\,(-10)^n\right)X^2 + \left(\frac{17}{4}\,(-6)^n - \frac{16}{3}\,(-7)^n + \frac{13}{12}\,(-10)^n\right)X + \left(\frac{35}{2}\,(-6)^n - 20\,(-7)^n + \frac{7}{2}\,(- \right. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-6)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n - 6\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-7) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-6) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-6)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(-7)$ et $Q(-6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -28 & -26 & -232 \\ -256 & -3 & -668 \\ 64 & 13 & 216 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2\,(-6)^n - (-10)^n & 2\,(-6)^n - 2\,(-7)^n & 10\,(-6)^n - 8\,(-7)^n - 2\,(-10)^n \\ 4\,(-6)^n - 4\,(-10)^n & 4\,(-6)^n - 3\,(-7)^n & 20\,(-6)^n - 12\,(-7)^n - 8\,(-10)^n \\ -(-6)^n + (-10)^n & -(-6)^n + (-7)^n & -5\,(-6)^n + 4\,(-7)^n + 2\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 13. ← page 4

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, 8 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n\,L_0 + 8^nL_1 + 9^nL_2 \\ &= \frac{1}{19}\left(X^2 + 2\,X - 80\right)9^n - \frac{1}{18}\left(X^2 + X - 90\right)8^n + \frac{1}{342}\left(X^2 - 17\,X + 72\right)(-10)^n \\ &= \left(\frac{1}{19}\cdot 9^n - \frac{1}{18}\cdot 8^n + \frac{1}{342}\,(-10)^n\right)X^2 + \left(\frac{2}{19}\cdot 9^n - \frac{1}{18}\cdot 8^n - \frac{17}{342}\,(-10)^n\right)X + \left(-\frac{80}{19}\cdot 9^n + 5\cdot 8^n + \frac{4}{19}\,(-10)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & 8^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(8) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(9) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(8)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 68 & -500 \\ 76 & -4 & 644 \\ 19 & -17 & 225 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4\cdot 9^n - 3\,(-10)^n & 4\cdot 9^n - 4\cdot 8^n & -4\cdot 9^n + 16\cdot 8^n - 12\,(-10)^n \\ -4\cdot 9^n + 4\,(-10)^n & -4\cdot 9^n + 5\cdot 8^n & 4\cdot 9^n - 20\cdot 8^n + 16\,(-10)^n \\ -9^n + (-10)^n & -9^n + 8^n & 9^n - 4\cdot 8^n + 4\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 14. ← page 4

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -8 et -1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n\,L_0 - L_1 - L_2 \\ &= \frac{1}{56}\left(X^2 + 17\,X + 72\right)(-1)^n - \frac{1}{7}\left(X^2 + 10\,X + 9\right)(-8)^n + \frac{1}{8}\left(X^2 + 9\,X + 8\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{56}\,(-1)^n - \frac{1}{7}\,(-8)^n + \frac{1}{8}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{17}{56}\,(-1)^n - \frac{10}{7}\,(-8)^n + \frac{9}{8}\,(-9)^n\right)X + \left(\frac{9}{7}\,(-1)^n - \frac{9}{7}\,(-8)^n + (-9)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n - b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-8) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-1) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-8)$ et $Q(-1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -159 & -189 & -102 \\ 160 & 190 & 102 \\ 80 & 63 & 115 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\,(-1)^n - 2\,(-9)^n & 3\,(-1)^n - 3\,(-8)^n & 6\,(-8)^n - 6\,(-9)^n \\ -2\,(-1)^n + 2\,(-9)^n & -2\,(-1)^n + 3\,(-8)^n & -6\,(-8)^n + 6\,(-9)^n \\ -(-1)^n + (-9)^n & -(-1)^n + (-8)^n & -2\,(-8)^n + 3\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 15. ← page 5

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, -1 et 1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n\,L_0 - L_1 + L_2 \\ &= -\frac{1}{14}\left(X^2 + 7\,X - 8\right)(-1)^n + \frac{1}{63}\left(X^2 - 1\right)(-8)^n + \frac{1}{18}\,X^2 + \frac{1}{2}\,X + \frac{4}{9} \\ &= \left(-\frac{1}{14}\,(-1)^n + \frac{1}{63}\,(-8)^n + \frac{1}{18}\right)X^2 + \left(-\frac{1}{2}\,(-1)^n + \frac{1}{2}\right)X + \left(\frac{4}{7}\,(-1)^n - \frac{1}{63}\,(-8)^n + \frac{4}{9}\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n - b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n + b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-1) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(1) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(-1)$ et $Q(1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 316 & 0 & -1260 \\ -63 & 1 & 252 \\ 63 & 0 & -251 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 5\,(-8)^n - 4 & 4\,(-1)^n - 4 & 4\,(-1)^n - 20\,(-8)^n + 16 \\ -\,(-8)^n + 1 & 1 & 4\,(-8)^n - 4 \\ (-8)^n - 1 & (-1)^n - 1 & (-1)^n - 4\,(-8)^n + 4 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 16. ← page 5

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, -2 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n\,L_0 - L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{180}\left(X^2 + 7\,X + 10\right)10^n - \frac{1}{36}\left(X^2 - 5\,X - 50\right)(-2)^n + \frac{1}{45}\left(X^2 - 8\,X - 20\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{180}\cdot 10^n - \frac{1}{36}\,(-2)^n + \frac{1}{45}\,(-5)^n\right)X^2 + \left(\frac{7}{180}\cdot 10^n + \frac{5}{36}\,(-2)^n - \frac{8}{45}\,(-5)^n\right)X + \left(\frac{1}{18}\cdot 10^n + \frac{25}{18}\,(-2)^n - \frac{4}{9}\,(-5 \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$
\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 4\,a_n - 2\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-2) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}
$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(-2)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 100 & 96 & 192 \\ 150 & 196 & 342 \\ -75 & -96 & -167 \end{pmatrix}.
$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$
Q(A) = \begin{pmatrix} 10^n & 10^n - (-2)^n & 2 \cdot 10^n - 2\,(-2)^n \\ 2 \cdot 10^n - 2\,(-5)^n & 2 \cdot 10^n - (-2)^n & 4 \cdot 10^n - 2\,(-2)^n - 2\,(-5)^n \\ -10^n + (-5)^n & -10^n + (-2)^n & -2 \cdot 10^n + 2\,(-2)^n + (-5)^n \end{pmatrix}.
$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 17. ← page 5

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, -8 et 5. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
Q &= (-10)^n\,L_0 - L_1 + 5^nL_2 \\
&= \frac{1}{195}\left(X^2 + 18\,X + 80\right)5^n - \frac{1}{26}\left(X^2 + 5\,X - 50\right)(-8)^n + \frac{1}{30}\left(X^2 + 3\,X - 40\right)(-10)^n \\
&= \left(\frac{1}{195} \cdot 5^n - \frac{1}{26}\,(-8)^n + \frac{1}{30}\,(-10)^n\right)X^2 + \left(\frac{6}{65} \cdot 5^n - \frac{5}{26}\,(-8)^n + \frac{1}{10}\,(-10)^n\right)X + \left(\frac{16}{39} \cdot 5^n + \frac{25}{13}\,(-8)^n - \frac{4}{3}\,(-10)
\end{aligned}
$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-8) & 0 \\ 0 & 0 & Q(5) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(-8)$ et $Q(5)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 25 & -39 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 75 & 39 & 100 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 5^n & 5^n - (-8)^n & 0 \\ 0 & (-8)^n & 0 \\ -5^n + (-10)^n & -5^n + (-8)^n & (-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 18. ← page 6

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -7 et 3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n L_0 - L_1 + 3^n L_2 \\ &= \frac{1}{120}\left(X^2 + 16\,X + 63\right)3^n - \frac{1}{20}\left(X^2 + 6\,X - 27\right)(-7)^n + \frac{1}{24}\left(X^2 + 4\,X - 21\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{120}\cdot 3^n - \frac{1}{20}(-7)^n + \frac{1}{24}(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{2}{15}\cdot 3^n - \frac{3}{10}(-7)^n + \frac{1}{6}(-9)^n\right)X + \left(\frac{21}{40}\cdot 3^n + \frac{27}{20}(-7)^n - \frac{7}{8}(-9)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-7) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(3) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-7)$ et $Q(3)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 225 & 80 & -752 \\ 288 & 209 & -1376 \\ 72 & 40 & -295 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3^n + 3\,(-9)^n & -2 \cdot 3^n + 2\,(-7)^n & 14 \cdot 3^n - 8\,(-7)^n - 6\,(-9)^n \\ -4 \cdot 3^n + 4\,(-9)^n & -4 \cdot 3^n + 5\,(-7)^n & 28 \cdot 3^n - 20\,(-7)^n - 8\,(-9)^n \\ -3^n + (-9)^n & -3^n + (-7)^n & 7 \cdot 3^n - 4\,(-7)^n - 2\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 19. ← page 6

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -1, 3 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-1)^n\,L_0 + 3^nL_1 + 8^nL_2 \\ &= \frac{1}{45}\left(X^2 - 2\,X - 3\right)8^n - \frac{1}{20}\left(X^2 - 7\,X - 8\right)3^n + \frac{1}{36}\left(X^2 - 11\,X + 24\right)(-1)^n \\ &= \left(\frac{1}{45} \cdot 8^n - \frac{1}{20} \cdot 3^n + \frac{1}{36}\,(-1)^n\right)X^2 + \left(-\frac{2}{45} \cdot 8^n + \frac{7}{20} \cdot 3^n - \frac{11}{36}\,(-1)^n\right)X + \left(-\frac{1}{15} \cdot 8^n + \frac{2}{5} \cdot 3^n + \frac{2}{3}\,(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} a_n - b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q(8) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-1)$, $Q(3)$ et $Q(8)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 190 & 165 & 543 \\ 63 & 64 & 189 \\ -63 & -55 & -180 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 8^n - 2\,(-1)^n & 3\cdot 8^n - 3\cdot 3^n & 9\cdot 8^n - 3\cdot 3^n - 6\,(-1)^n \\ 8^n - (-1)^n & 8^n & 3\cdot 8^n - 3\,(-1)^n \\ -8^n + (-1)^n & -8^n + 3^n & -3\cdot 8^n + 3^n + 3\,(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 20. ← page 6

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels 2, 4 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 2^nL_0 + 4^nL_1 + 6^nL_2 \\ &= \frac{1}{8}\left(X^2 - 6\,X + 8\right)6^n - \frac{1}{4}\left(X^2 - 8\,X + 12\right)4^n + \frac{1}{8}\left(X^2 - 10\,X + 24\right)2^n \\ &= \left(\frac{1}{8}\cdot 6^n - \frac{1}{4}\cdot 4^n + \frac{1}{8}\cdot 2^n\right)X^2 + \left(-\frac{3}{4}\cdot 6^n + 2\cdot 4^n - \frac{5}{4}\cdot 2^n\right)X + \left(6^n - 3\cdot 4^n + 3\cdot 2^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 4\,a_n + 2\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(2) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(6) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(2)$, $Q(4)$ et $Q(6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -96 & -44 & 240 \\ -32 & -20 & 96 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ -3 \cdot 6^n + 3 \cdot 2^n & -3 \cdot 6^n + 4 \cdot 4^n & 12 \cdot 6^n - 12 \cdot 4^n \\ -6^n + 2^n & -6^n + 4^n & 4 \cdot 6^n - 3 \cdot 4^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 21. ← page 7

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -3, 3 et 4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-3)^n\,L_0 + 3^nL_1 + 4^nL_2 \\ &= \frac{1}{7}\left(X^2 - 9\right)4^n - \frac{1}{6}\left(X^2 - X - 12\right)3^n + \frac{1}{42}\left(X^2 - 7\,X + 12\right)(-3)^n \\ &= \left(\frac{1}{7} \cdot 4^n - \frac{1}{6} \cdot 3^n + \frac{1}{42}\,(-3)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{6}\,(-3)^n\right)X + \left(-\frac{9}{7} \cdot 4^n + 2 \cdot 3^n + \frac{2}{7}\,(-3)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-3) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(4) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-3)$, $Q(3)$ et $Q(4)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 30 & 21 & 0 \\ -14 & -5 & 0 \\ -7 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4^n - 2\,(-3)^n & 3 \cdot 4^n - 3 \cdot 3^n & 6 \cdot 3^n - 6\,(-3)^n \\ -2 \cdot 4^n + 2\,(-3)^n & -2 \cdot 4^n + 3 \cdot 3^n & -6 \cdot 3^n + 6\,(-3)^n \\ -4^n + (-3)^n & -4^n + 3^n & -2 \cdot 3^n + 3\,(-3)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 22. ← page 7

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -4 et 0. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-4)^n\, L_0 \\ &= -\frac{1}{4}\,(-4)^n\, X \\ &= \left(-\frac{1}{4}\,(-4)^n\right) X + (0)\,. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et : $A^0 =$

$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}-4\,a_n+b_n&0&0\\0&-4\,a_n+b_n&0\\0&0&b_n\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}Q\,(-4)&0&0\\0&Q\,(-4)&0\\0&0&Q\,(0)\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}(-4)^n&0&0\\0&(-4)^n&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix}-6\,(-4)^n & -7\,(-4)^n & 28\,(-4)^n\\ 2\,(-4)^n & 3\,(-4)^n & -8\,(-4)^n\\ -\,(-4)^n & -\,(-4)^n & 5\,(-4)^n\end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 23. ← page 7

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -8 et -3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-9)^n\,L_0 - L_1 - L_2\\
&= \frac{1}{30}\left(X^2+17\,X+72\right)(-3)^n - \frac{1}{5}\left(X^2+12\,X+27\right)(-8)^n + \frac{1}{6}\left(X^2+11\,X+24\right)(-9)^n\\
&= \left(\frac{1}{30}\,(-3)^n - \frac{1}{5}\,(-8)^n + \frac{1}{6}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{17}{30}\,(-3)^n - \frac{12}{5}\,(-8)^n + \frac{11}{6}\,(-9)^n\right)X + \left(\frac{12}{5}\,(-3)^n - \frac{27}{5}\,(-8)^n + 4\,(-9
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix}(-9)^k&0&0\\0&(-8)^k&0\\0&0&(-3)^k\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix}81&0&0\\0&64&0\\0&0&9\end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix}-9&0&0\\0&-8&0\\0&0&-3\end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}81\,a_n-9\,b_n+c_n&0&0\\0&64\,a_n-8\,b_n+c_n&0\\0&0&9\,a_n-3\,b_n+c_n\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}Q\,(-9)&0&0\\0&Q\,(-8)&0\\0&0&Q\,(-3)\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}(-9)^n&0&0\\0&(-8)^n&0\\0&0&(-3)^n\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-8)$ et $Q(-3)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 297 & 165 & -1524 \\ 288 & 284 & -1964 \\ 72 & 55 & -427 \end{pmatrix}.$$
Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :
$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3\,(-3)^n + 4\,(-9)^n & -3\,(-3)^n + 3\,(-8)^n & 24\,(-3)^n - 12\,(-8)^n - 12\,(-9)^n \\ -4\,(-3)^n + 4\,(-9)^n & -4\,(-3)^n + 5\,(-8)^n & 32\,(-3)^n - 20\,(-8)^n - 12\,(-9)^n \\ -(-3)^n + (-9)^n & -(-3)^n + (-8)^n & 8\,(-3)^n - 4\,(-8)^n - 3\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$
Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 24. ← page 7

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -10 et 5. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :
$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n\,L_0 + 5^n L_1 \\ &= \frac{1}{15}\cdot 5^n(X+10) - \frac{1}{15}\,(-10)^n\,(X-5) \\ &= \left(\frac{1}{15}\cdot 5^n - \frac{1}{15}\,(-10)^n\right) X + \left(\frac{2}{3}\cdot 5^n + \frac{1}{3}\,(-10)^n\right). \end{aligned}$$
Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-10)^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :
$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 = a_n P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} -10\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -10\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 5\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-10) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(5) \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-10)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = A^n, \end{aligned}$$
d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :
$$Q(A) = \begin{pmatrix} -5^n + 2\,(-10)^n & -5^n + (-10)^n & -2\cdot 5^n + 2\,(-10)^n \\ 0 & (-10)^n & 0 \\ 5^n - (-10)^n & 5^n - (-10)^n & 2\cdot 5^n - (-10)^n \end{pmatrix}.$$
Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 25. ← page 8

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -2 et 4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-2)^n\, L_0 + 4^n L_1 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 4^n (X+2) - \frac{1}{6}\, (-2)^n\, (X-4) \\ &= \left(\frac{1}{6} \cdot 4^n - \frac{1}{6}\, (-2)^n\right) X + \left(\frac{1}{3} \cdot 4^n + \frac{2}{3}\, (-2)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -2\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 4\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-2) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(4) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 2 \cdot 4^n - 2\,(-2)^n & 4^n & 2 \cdot 4^n - 2\,(-2)^n \\ -4^n + (-2)^n & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 26. ← page 8

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, 5 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n\, L_0 + 5^n L_1 + 8^n L_2 \\ &= \frac{1}{48}\left(X^2 + 3\,X - 40\right) 8^n - \frac{1}{39}\left(X^2 - 64\right) 5^n + \frac{1}{208}\left(X^2 - 13\,X + 40\right) (-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{48} \cdot 8^n - \frac{1}{39} \cdot 5^n + \frac{1}{208}\, (-8)^n\right) X^2 + \left(\frac{1}{16} \cdot 8^n - \frac{1}{16}\, (-8)^n\right) X + \left(-\frac{5}{6} \cdot 8^n + \frac{64}{39} \cdot 5^n + \frac{5}{26}\, (-8)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(5) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(8) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(5)$ et $Q(8)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & -53 & 234 \\ 0 & -39 & 142 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ -2\cdot 8^n + 2\,(-8)^n & -2\cdot 8^n + 3\cdot 5^n & 6\cdot 8^n - 6\cdot 5^n \\ -8^n + (-8)^n & -8^n + 5^n & 3\cdot 8^n - 2\cdot 5^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 27. ← page 8

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, -1 et 2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n\,L_0 - L_1 + 2^nL_2 \\ &= \frac{1}{21}\left(X^2 + 6\,X + 5\right)2^n - \frac{1}{12}\left(X^2 + 3\,X - 10\right)(-1)^n + \frac{1}{28}\left(X^2 - X - 2\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{21}\cdot 2^n - \frac{1}{12}\,(-1)^n + \frac{1}{28}\,(-5)^n\right)X^2 + \left(\frac{2}{7}\cdot 2^n - \frac{1}{4}\,(-1)^n - \frac{1}{28}\,(-5)^n\right)X + \left(\frac{5}{21}\cdot 2^n + \frac{5}{6}\,(-1)^n - \frac{1}{14}\,(-5)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} + b_n P\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} + c_n P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n - b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n + 2\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-1) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(2) \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(-1)$ et $Q(2)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 109 & -12 & -372 \\ 84 & -11 & -276 \\ 21 & -3 & -68 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\cdot 2^n + 5\,(-5)^n & -4\cdot 2^n + 4\,(-1)^n & 36\cdot 2^n - 16\,(-1)^n - 20\,(-5)^n \\ -4\cdot 2^n + 4\,(-5)^n & -4\cdot 2^n + 5\,(-1)^n & 36\cdot 2^n - 20\,(-1)^n - 16\,(-5)^n \\ -2^n + (-5)^n & -2^n + (-1)^n & 9\cdot 2^n - 4\,(-1)^n - 4\,(-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 28. ← page 9

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, -7 et -4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-8)^n\,L_0 - L_1 - L_2 \\
&= \frac{1}{12}\left(X^2 + 15\,X + 56\right)(-4)^n - \frac{1}{3}\left(X^2 + 12\,X + 32\right)(-7)^n + \frac{1}{4}\left(X^2 + 11\,X + 28\right)(-8)^n \\
&= \left(\frac{1}{12}\,(-4)^n - \frac{1}{3}\,(-7)^n + \frac{1}{4}\,(-8)^n\right)X^2 + \left(\frac{5}{4}\,(-4)^n - 4\,(-7)^n + \frac{11}{4}\,(-8)^n\right)X + \left(\frac{14}{3}\,(-4)^n - \frac{32}{3}\,(-7)^n + 7\,(-8)^n\right)
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 16\,a_n - 4\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-7) & 0 \\ 0 & 0 & Q(-4) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(-7)$ et $Q(-4)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -128 & -132 & -312 \\ 96 & 115 & 186 \\ 48 & 33 & 142 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4\,(-4)^n - 3\,(-8)^n & 4\,(-4)^n - 4\,(-7)^n & 4\,(-4)^n + 8\,(-7)^n - 12\,(-8)^n \\ -2\,(-4)^n + 2\,(-8)^n & -2\,(-4)^n + 3\,(-7)^n & -2\,(-4)^n - 6\,(-7)^n + 8\,(-8)^n \\ -(-4)^n + (-8)^n & -(-4)^n + (-7)^n & -(-4)^n - 2\,(-7)^n + 4\,(-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 29. ← page 9

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, 3 et 7. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n L_0 + 3^n L_1 + 7^n L_2 \\ &= \frac{1}{48}\left(X^2 + 2\,X - 15\right)7^n - \frac{1}{32}\left(X^2 - 2\,X - 35\right)3^n + \frac{1}{96}\left(X^2 - 10\,X + 21\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{48} \cdot 7^n - \frac{1}{32} \cdot 3^n + \frac{1}{96}\,(-5)^n\right) X^2 + \left(\frac{1}{24} \cdot 7^n + \frac{1}{16} \cdot 3^n - \frac{5}{48}\,(-5)^n\right) X + \left(-\frac{5}{16} \cdot 7^n + \frac{35}{32} \cdot 3^n + \frac{7}{32}\,(-5)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 7^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(7) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(3)$ et $Q(7)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 97 & 120 & 624 \\ 96 & 169 & 768 \\ -24 & -40 & -183 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 7^n - 2\,(-5)^n & 3\cdot 7^n - 3\cdot 3^n & 18\cdot 7^n - 12\cdot 3^n - 6\,(-5)^n \\ 4\cdot 7^n - 4\,(-5)^n & 4\cdot 7^n - 3\cdot 3^n & 24\cdot 7^n - 12\cdot 3^n - 12\,(-5)^n \\ -7^n + (-5)^n & -7^n + 3^n & -6\cdot 7^n + 4\cdot 3^n + 3\,(-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 30. ← page 9

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, 3 et 5. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n\,L_0 + 3^nL_1 + 5^nL_2 \\ &= \frac{1}{28}\left(X^2 + 6\,X - 27\right)5^n - \frac{1}{24}\left(X^2 + 4\,X - 45\right)3^n + \frac{1}{168}\left(X^2 - 8\,X + 15\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{28}\cdot 5^n - \frac{1}{24}\cdot 3^n + \frac{1}{168}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{3}{14}\cdot 5^n - \frac{1}{6}\cdot 3^n - \frac{1}{21}\,(-9)^n\right)X + \left(-\frac{27}{28}\cdot 5^n + \frac{15}{8}\cdot 3^n + \frac{5}{56}\,(-9)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(5) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(3)$ et $Q(5)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 137 & -16 & -160 \\ -168 & 57 & 264 \\ 56 & -16 & -79 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -5^n + 2\,(-9)^n & -5^n + 3^n & -5^n + 3 \cdot 3^n - 2\,(-9)^n \\ 3 \cdot 5^n - 3\,(-9)^n & 3 \cdot 5^n - 2 \cdot 3^n & 3 \cdot 5^n - 6 \cdot 3^n + 3\,(-9)^n \\ -5^n + (-9)^n & -5^n + 3^n & -5^n + 3 \cdot 3^n - (-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 31. ← page 10

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, 3 et 7. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n\, L_0 + 3^n L_1 + 7^n L_2 \\ &= \frac{1}{60}\left(X^2 + 5\,X - 24\right)7^n - \frac{1}{44}\left(X^2 + X - 56\right)3^n + \frac{1}{165}\left(X^2 - 10\,X + 21\right)(-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{60} \cdot 7^n - \frac{1}{44} \cdot 3^n + \frac{1}{165}\,(-8)^n\right) X^2 + \left(\frac{1}{12} \cdot 7^n - \frac{1}{44} \cdot 3^n - \frac{2}{33}\,(-8)^n\right) X + \left(-\frac{2}{5} \cdot 7^n + \frac{14}{11} \cdot 3^n + \frac{7}{55}\,(-8)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 7^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(7) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(3)$ et $Q(7)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 49 & 40 & -160 \\ 60 & -151 & 860 \\ 15 & -40 & 224 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 7^n & 7^n - 3^n & -4 \cdot 7^n + 4 \cdot 3^n \\ -4 \cdot 7^n + 4\,(-8)^n & -4 \cdot 7^n + 5 \cdot 3^n & 16 \cdot 7^n - 20 \cdot 3^n + 4\,(-8)^n \\ -7^n + (-8)^n & -7^n + 3^n & 4 \cdot 7^n - 4 \cdot 3^n + (-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 32. ← page 10

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -7, 7 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-7)^n\,L_0 + 7^n L_1 + 9^n L_2 \\ &= \frac{1}{32}\left(X^2 - 49\right)9^n - \frac{1}{28}\left(X^2 - 2\,X - 63\right)7^n + \frac{1}{224}\left(X^2 - 16\,X + 63\right)(-7)^n \\ &= \left(\frac{1}{32} \cdot 9^n - \frac{1}{28} \cdot 7^n + \frac{1}{224}\,(-7)^n\right) X^2 + \left(\frac{1}{14} \cdot 7^n - \frac{1}{14}\,(-7)^n\right) X + \left(-\frac{49}{32} \cdot 9^n + \frac{9}{4} \cdot 7^n + \frac{9}{32}\,(-7)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-7)^k & 0 & 0 \\ 0 & 7^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-7) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(7) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-7)$, $Q(7)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 145 & 96 & 384 \\ 64 & 113 & 256 \\ -32 & -32 & -79 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 9^n - 2\,(-7)^n & 3\cdot 9^n - 3\cdot 7^n & 12\cdot 9^n - 6\cdot 7^n - 6\,(-7)^n \\ 2\cdot 9^n - 2\,(-7)^n & 2\cdot 9^n - 7^n & 8\cdot 9^n - 2\cdot 7^n - 6\,(-7)^n \\ -9^n + (-7)^n & -9^n + 7^n & -4\cdot 9^n + 2\cdot 7^n + 3\,(-7)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 33. ← page 10

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -1, 2 et 3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-1)^n\,L_0 + 2^nL_1 + 3^nL_2 \\ &= \frac{1}{4}\left(X^2 - X - 2\right)3^n - \frac{1}{3}\left(X^2 - 2\,X - 3\right)2^n + \frac{1}{12}\left(X^2 - 5\,X + 6\right)(-1)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\cdot 3^n - \frac{1}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{12}\,(-1)^n\right)X^2 + \left(-\frac{1}{4}\cdot 3^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n - \frac{5}{12}\,(-1)^n\right)X + \left(-\frac{1}{2}\cdot 3^n + 2^n + \frac{1}{2}\,(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k\in\mathbb{N}$, $A^k=PD^kP^{-1}=P\begin{pmatrix}(-1)^k&0&0\\0&2^k&0\\0&0&3^k\end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}Q(A)=a_nA^2+b_nA+c_n\mathrm{I}_3&=a_nP\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}P^{-1}+b_nP\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}+c_nP\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\\&=P\begin{pmatrix}a_n-b_n+c_n&0&0\\0&4\,a_n+2\,b_n+c_n&0\\0&0&9\,a_n+3\,b_n+c_n\end{pmatrix}P^{-1}\\&=P\begin{pmatrix}Q\,(-1)&0&0\\0&Q\,(2)&0\\0&0&Q\,(3)\end{pmatrix}P^{-1}\\&=P\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}\\&=A^n,\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-1)$, $Q(2)$ et $Q(3)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A)=a_nA^2+b_nA+c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2=\begin{pmatrix}25&15&93\\24&19&102\\-8&-5&-30\end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A)=\begin{pmatrix}3\cdot3^n-2\,(-1)^n&3\cdot3^n-3\cdot2^n&15\cdot3^n-9\cdot2^n-6\,(-1)^n\\3\cdot3^n-3\,(-1)^n&3\cdot3^n-2\cdot2^n&15\cdot3^n-6\cdot2^n-9\,(-1)^n\\-3^n+(-1)^n&-3^n+2^n&-5\cdot3^n+3\cdot2^n+3\,(-1)^n\end{pmatrix}.$$

Or $A^n=Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 34. ← page 10

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0,L_1,L_2) associés aux réels -5, 0 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}Q&=(-5)^n\,L_0+10^nL_2\\&=\frac{1}{150}\left(X^2+5\,X\right)10^n+\frac{1}{75}\left(X^2-10\,X\right)(-5)^n\\&=\left(\frac{1}{150}\cdot10^n+\frac{1}{75}\,(-5)^n\right)X^2+\left(\frac{1}{30}\cdot10^n-\frac{2}{15}\,(-5)^n\right)X+(0)\,.\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q=a_nX^2+b_nX+c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $A^k=PD^kP^{-1}=P\begin{pmatrix}(-5)^k&0&0\\0&0&0\\0&0&10^k\end{pmatrix}P^{-1}$ et : $A^0=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(0) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(10) \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(0)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -275 & -400 & 300 \\ 225 & 300 & -300 \\ -75 & -100 & 100 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\cdot 10^n + 5\,(-5)^n & -4\cdot 10^n & 8\cdot 10^n - 20\,(-5)^n \\ 3\cdot 10^n - 3\,(-5)^n & 3\cdot 10^n & -6\cdot 10^n + 12\,(-5)^n \\ -10^n + (-5)^n & -10^n & 2\cdot 10^n - 4\,(-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 35. ← page 11

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -6 et -3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-6)^n\,L_0 - L_1 \\
&= \frac{1}{3}\,(-3)^n\,(X+6) - \frac{1}{3}\,(-6)^n\,(X+3) \\
&= \left(\frac{1}{3}\,(-3)^n - \frac{1}{3}\,(-6)^n\right)X + (2\,(-3)^n - (-6)^n)\,.
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-6)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -6\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -3\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & -3\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-6) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-3) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-6)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3\,(-3)^n + 4\,(-6)^n & 0 & 12\,(-3)^n - 12\,(-6)^n \\ 2\,(-3)^n - 2\,(-6)^n & (-3)^n & -6\,(-3)^n + 6\,(-6)^n \\ -(-3)^n + (-6)^n & 0 & 4\,(-3)^n - 3\,(-6)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 36. ← page 11

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -3 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-3)^n\,L_0 + 9^n L_1 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 9^n(X+3) - \frac{1}{12}\,(-3)^n\,(X-9) \\ &= \left(\frac{1}{12} \cdot 9^n - \frac{1}{12}\,(-3)^n\right) X + \left(\frac{1}{4} \cdot 9^n + \frac{3}{4}\,(-3)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -3\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -3\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 9\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-3) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -7\cdot 9^n + 8\,(-3)^n & 21\cdot 9^n - 21\,(-3)^n & 28\cdot 9^n - 28\,(-3)^n \\ -4\cdot 9^n + 4\,(-3)^n & 12\cdot 9^n - 11\,(-3)^n & 16\cdot 9^n - 16\,(-3)^n \\ 9^n - (-3)^n & -3\cdot 9^n + 3\,(-3)^n & -4\cdot 9^n + 5\,(-3)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 37. ← page 11

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, -7 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n\, L_0 - L_1 + 9^n L_2 \\ &= \frac{1}{304}\left(X^2 + 17\,X + 70\right)9^n - \frac{1}{48}\left(X^2 + X - 90\right)(-7)^n + \frac{1}{57}\left(X^2 - 2\,X - 63\right)(-10)^n \\ &= \left(\frac{1}{304}\cdot 9^n - \frac{1}{48}\,(-7)^n + \frac{1}{57}\,(-10)^n\right)X^2 + \left(\frac{17}{304}\cdot 9^n - \frac{1}{48}\,(-7)^n - \frac{2}{57}\,(-10)^n\right)X + \left(\frac{35}{152}\cdot 9^n + \frac{15}{8}\,(-7)^n - \frac{21}{19}\,(- \right. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}P^{-1} + b_n P\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1} + c_n P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-7) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(9) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(-7)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 176 & -128 & -764 \\ -57 & 145 & 420 \\ 19 & -32 & -91 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\cdot 9^n + 5\,(-10)^n & -4\cdot 9^n + 4\,(-7)^n & 8\cdot 9^n + 12\,(-7)^n - 20\,(-10)^n \\ 3\cdot 9^n - 3\,(-10)^n & 3\cdot 9^n - 2\,(-7)^n & -6\cdot 9^n - 6\,(-7)^n + 12\,(-10)^n \\ -9^n + (-10)^n & -9^n + (-7)^n & 2\cdot 9^n + 3\,(-7)^n - 4\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 38. ← page 12

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -7 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n L_0 - L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{323}\left(X^2 + 16\,X + 63\right)10^n - \frac{1}{34}\left(X^2 - X - 90\right)(-7)^n + \frac{1}{38}\left(X^2 - 3\,X - 70\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{323}\cdot 10^n - \frac{1}{34}\,(-7)^n + \frac{1}{38}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{16}{323}\cdot 10^n + \frac{1}{34}\,(-7)^n - \frac{3}{38}\,(-9)^n\right)X + \left(\frac{63}{323}\cdot 10^n + \frac{45}{17}\,(-7)^n - \frac{35}{19}\,(\right. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}P^{-1} + b_n P\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}P^{-1} + c_n P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-7) & 0 \\ 0 & 0 & Q(10) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-7)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 119 & 102 & -166 \\ -38 & -53 & 230 \\ -19 & -51 & 164 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2\cdot 10^n - (-9)^n & 2\cdot 10^n - 2\,(-7)^n & -2\cdot 10^n + 4\,(-7)^n - 2\,(-9)^n \\ -2\cdot 10^n + 2\,(-9)^n & -2\cdot 10^n + 3\,(-7)^n & 2\cdot 10^n - 6\,(-7)^n + 4\,(-9)^n \\ -10^n + (-9)^n & -10^n + (-7)^n & 10^n - 2\,(-7)^n + 2\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 39. ← page 12

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, 9 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n L_0 + 9^n L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{18}\left(X^2 - X - 72\right)10^n - \frac{1}{17}\left(X^2 - 2\,X - 80\right)9^n + \frac{1}{306}\left(X^2 - 19\,X + 90\right)(-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{18}\cdot 10^n - \frac{1}{17}\cdot 9^n + \frac{1}{306}\,(-8)^n\right)X^2 + \left(-\frac{1}{18}\cdot 10^n + \frac{2}{17}\cdot 9^n - \frac{19}{306}\,(-8)^n\right)X + \left(-4\cdot 10^n + \frac{80}{17}\cdot 9^n + \frac{5}{17}\,(-8)^n\right) \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & 9^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q(9) & 0 \\ 0 & 0 & Q(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(9)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 144 & 157 & 228 \\ -36 & -19 & 24 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 4 \cdot 10^n - 4\,(-8)^n & 4 \cdot 10^n - 3 \cdot 9^n & 12 \cdot 10^n - 12 \cdot 9^n \\ -10^n + (-8)^n & -10^n + 9^n & -3 \cdot 10^n + 4 \cdot 9^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 40. ← page 12

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, -6 et 4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n L_0 - L_1 + 4^n L_2 \\ &= \frac{1}{140}\left(X^2 + 16\,X + 60\right)4^n - \frac{1}{40}\left(X^2 + 6\,X - 40\right)(-6)^n + \frac{1}{56}\left(X^2 + 2\,X - 24\right)(-10)^n \\ &= \left(\frac{1}{140} \cdot 4^n - \frac{1}{40}\,(-6)^n + \frac{1}{56}\,(-10)^n\right) X^2 + \left(\frac{4}{35} \cdot 4^n - \frac{3}{20}\,(-6)^n + \frac{1}{28}\,(-10)^n\right) X + \left(\frac{3}{7} \cdot 4^n + (-6)^n - \frac{3}{7}\,(-10)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 36\,a_n - 6\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-6) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(-6)$ et $Q(4)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 436 & 80 & -1360 \\ -336 & -44 & 1104 \\ 84 & 20 & -240 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\cdot 4^n + 5\,(-10)^n & -4\cdot 4^n + 4\,(-6)^n & 4\cdot 4^n + 16\,(-6)^n - 20\,(-10)^n \\ 4\cdot 4^n - 4\,(-10)^n & 4\cdot 4^n - 3\,(-6)^n & -4\cdot 4^n - 12\,(-6)^n + 16\,(-10)^n \\ -4^n + (-10)^n & -4^n + (-6)^n & 4^n + 4\,(-6)^n - 4\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 41. ← page 13

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -1 et 4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-1)^n\,L_0 + 4^nL_1 \\ &= \frac{1}{5}\cdot 4^n(X+1) - \frac{1}{5}\,(-1)^n\,(X-4) \\ &= \left(\frac{1}{5}\cdot 4^n - \frac{1}{5}\,(-1)^n\right)X + \left(\frac{1}{5}\cdot 4^n + \frac{4}{5}\,(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -8 \cdot 4^n + 9\,(-1)^n & 32 \cdot 4^n - 32\,(-1)^n & -8 \cdot 4^n + 8\,(-1)^n \\ -2 \cdot 4^n + 2\,(-1)^n & 8 \cdot 4^n - 7\,(-1)^n & -2 \cdot 4^n + 2\,(-1)^n \\ 4^n - (-1)^n & -4 \cdot 4^n + 4\,(-1)^n & 4^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 42. ← page 13

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -3 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n\,L_0 - L_1 + 9^nL_2 \\ &= \frac{1}{216}\left(X^2 + 12\,X + 27\right)9^n - \frac{1}{72}\left(X^2 - 81\right)(-3)^n + \frac{1}{108}\left(X^2 - 6\,X - 27\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{216} \cdot 9^n - \frac{1}{72}\,(-3)^n + \frac{1}{108}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{18} \cdot 9^n - \frac{1}{18}\,(-9)^n\right)X + \left(\frac{1}{8} \cdot 9^n + \frac{9}{8}\,(-3)^n - \frac{1}{4}\,(-9)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-3)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 81 & -216 & -216 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & -72 & 9 \end{pmatrix}.$$
Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :
$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3\cdot 9^n + 4\,(-9)^n & -3\cdot 9^n + 3\,(-3)^n & 9\cdot 9^n + 3\,(-3)^n - 12\,(-9)^n \\ 9^n - (-9)^n & 9^n & -3\cdot 9^n + 3\,(-9)^n \\ -9^n + (-9)^n & -9^n + (-3)^n & 3\cdot 9^n + (-3)^n - 3\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$
Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 43. ← page 13

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, -4 et 1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :
$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n L_0 - L_1 + L_2 \\ &= -\frac{1}{20}\left(X^2 + 7X - 8\right)(-4)^n + \frac{1}{36}\left(X^2 + 3X - 4\right)(-8)^n + \frac{1}{45}X^2 + \frac{4}{15}X + \frac{32}{45} \\ &= \left(-\frac{1}{20}(-4)^n + \frac{1}{36}(-8)^n + \frac{1}{45}\right)X^2 + \left(-\frac{7}{20}(-4)^n + \frac{1}{12}(-8)^n + \frac{4}{15}\right)X + \left(\frac{2}{5}(-4)^n - \frac{1}{9}(-8)^n + \frac{32}{45}\right). \end{aligned}$$
Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :
$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n - 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n + b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-4) & 0 \\ 0 & 0 & Q(1) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$
d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(-4)$ et $Q(1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 127 & 15 & -186 \\ 252 & 76 & -552 \\ 63 & 15 & -122 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2\,(-8)^n - 1 & (-4)^n - 1 & -4\,(-4)^n - 2\,(-8)^n + 6 \\ 4\,(-8)^n - 4 & 5\,(-4)^n - 4 & -20\,(-4)^n - 4\,(-8)^n + 24 \\ (-8)^n - 1 & (-4)^n - 1 & -4\,(-4)^n - (-8)^n + 6 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 44. ← page 13

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels 1, 8 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= L_0 + 8^n L_1 + 9^n L_2 \\ &= \frac{1}{8}\left(X^2 - 9\,X + 8\right)9^n - \frac{1}{7}\left(X^2 - 10\,X + 9\right)8^n + \frac{1}{56}\,X^2 - \frac{17}{56}\,X + \frac{9}{7} \\ &= \left(\frac{1}{8}\cdot 9^n - \frac{1}{7}\cdot 8^n + \frac{1}{56}\right)X^2 + \left(-\frac{9}{8}\cdot 9^n + \frac{10}{7}\cdot 8^n - \frac{17}{56}\right)X + \left(9^n - \frac{9}{7}\cdot 8^n + \frac{9}{7}\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} a_n + b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(8) & 0 \\ 0 & 0 & Q(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(1)$, $Q(8)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 161 & 34 & 296 \\ 320 & 132 & 844 \\ -80 & -17 & -147 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2\cdot 9^n - 1 & 2\cdot 9^n - 2\cdot 8^n & 10\cdot 9^n - 8\cdot 8^n - 2 \\ 4\cdot 9^n - 4 & 4\cdot 9^n - 3\cdot 8^n & 20\cdot 9^n - 12\cdot 8^n - 8 \\ -9^n + 1 & -9^n + 8^n & -5\cdot 9^n + 4\cdot 8^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 45. ← page 14

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, 0 et 2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :
$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n L_0 + 2^n L_2 \\ &= \frac{1}{14}\left(X^2 + 5X\right)2^n + \frac{1}{35}\left(X^2 - 2X\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{14} \cdot 2^n + \frac{1}{35}(-5)^n\right)X^2 + \left(\frac{5}{14} \cdot 2^n - \frac{2}{35}(-5)^n\right)X + (0)\,. \end{aligned}$$
Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.
2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}P^{-1}$ et : $A^0 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

   On en déduit :
$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & c_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n + 2\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q(0) & 0 \\ 0 & 0 & Q(2) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$
   d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(0)$ et $Q(2)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)
3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 88 & -12 & -240 \\ 21 & -4 & -55 \\ 21 & -4 & -55 \end{pmatrix}.$$
   Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :
$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2^n + 4\,(-5)^n & -3 \cdot 2^n & 15 \cdot 2^n - 12\,(-5)^n \\ -2^n + (-5)^n & -2^n & 5 \cdot 2^n - 3\,(-5)^n \\ -2^n + (-5)^n & -2^n & 5 \cdot 2^n - 3\,(-5)^n \end{pmatrix}.$$
   Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 46. ← page 14

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, -2 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :
$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n L_0 - L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{216}\left(X^2 + 10X + 16\right)10^n - \frac{1}{72}\left(X^2 - 2X - 80\right)(-2)^n + \frac{1}{108}\left(X^2 - 8X - 20\right)(-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{216} \cdot 10^n - \frac{1}{72}(-2)^n + \frac{1}{108}(-8)^n\right)X^2 + \left(\frac{5}{108} \cdot 10^n + \frac{1}{36}(-2)^n - \frac{2}{27}(-8)^n\right)X + \left(\frac{2}{27} \cdot 10^n + \frac{10}{9}(-2)^n - \frac{5}{27}\,(\right. \end{aligned}$$
   Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 4\,a_n - 2\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-2) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(-2)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 136 & 192 & 840 \\ 144 & 388 & 1440 \\ -36 & -96 & -356 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2\cdot 10^n - (-8)^n & 2\cdot 10^n - 2\,(-2)^n & 10\cdot 10^n - 8\,(-2)^n - 2\,(-8)^n \\ 4\cdot 10^n - 4\,(-8)^n & 4\cdot 10^n - 3\,(-2)^n & 20\cdot 10^n - 12\,(-2)^n - 8\,(-8)^n \\ -10^n + (-8)^n & -10^n + (-2)^n & -5\cdot 10^n + 4\,(-2)^n + 2\,(-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 47. ← page 14

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels 2 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= 2^nL_0 + 6^nL_1 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 6^n(X-2) - \frac{1}{4}\cdot 2^n(X-6) \\
&= \left(\frac{1}{4}\cdot 6^n - \frac{1}{4}\cdot 2^n\right)X + \left(-\frac{1}{2}\cdot 6^n + \frac{3}{2}\cdot 2^n\right).
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 = a_n P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} 2\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 2\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 6\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} Q\,(2) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(2) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(6) \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -7 \cdot 6^n + 8 \cdot 2^n & 14 \cdot 6^n - 14 \cdot 2^n & 0 \\ -4 \cdot 6^n + 4 \cdot 2^n & 8 \cdot 6^n - 7 \cdot 2^n & 0 \\ 6^n - 2^n & -2 \cdot 6^n + 2 \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 48. ← page 15

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -7, -3 et -1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-7)^n\, L_0 - L_1 - L_2 \\ &= \frac{1}{12}\left(X^2 + 10\,X + 21\right)(-1)^n - \frac{1}{8}\left(X^2 + 8\,X + 7\right)(-3)^n + \frac{1}{24}\left(X^2 + 4\,X + 3\right)(-7)^n \\ &= \left(\frac{1}{12}\,(-1)^n - \frac{1}{8}\,(-3)^n + \frac{1}{24}\,(-7)^n\right) X^2 + \left(\frac{5}{6}\,(-1)^n - (-3)^n + \frac{1}{6}\,(-7)^n\right) X + \left(\frac{7}{4}\,(-1)^n - \frac{7}{8}\,(-3)^n + \frac{1}{8}\,(-7)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-7)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 = a_n P \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n - b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} Q\,(-7) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-1) \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-7)$, $Q(-3)$ et $Q(-1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} -95 & -24 & -192 \\ 192 & 41 & 416 \\ 48 & 8 & 113 \end{pmatrix}.$$
Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :
$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\,(-1)^n - 2\,(-7)^n & 3\,(-1)^n - 3\,(-3)^n & -6\,(-1)^n + 12\,(-3)^n - 6\,(-7)^n \\ -4\,(-1)^n + 4\,(-7)^n & -4\,(-1)^n + 5\,(-3)^n & 8\,(-1)^n - 20\,(-3)^n + 12\,(-7)^n \\ -(-1)^n + (-7)^n & -(-1)^n + (-3)^n & 2\,(-1)^n - 4\,(-3)^n + 3\,(-7)^n \end{pmatrix}.$$
Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 49. ← page 15

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, -4 et -2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :
$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n L_0 - L_1 - L_2 \\ &= \frac{1}{6}\left(X^2 + 9\,X + 20\right)(-2)^n - \frac{1}{2}\left(X^2 + 7\,X + 10\right)(-4)^n + \frac{1}{3}\left(X^2 + 6\,X + 8\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{6}\,(-2)^n - \frac{1}{2}\,(-4)^n + \frac{1}{3}\,(-5)^n\right)X^2 + \left(\frac{3}{2}\,(-2)^n - \frac{7}{2}\,(-4)^n + 2\,(-5)^n\right)X + \left(\frac{10}{3}\,(-2)^n - 5\,(-4)^n + \frac{8}{3}\,(-5)^n\right). \end{aligned}$$
Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :
$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n - 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n - 2\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-4) & 0 \\ 0 & 0 & Q(-2) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$
d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(-4)$ et $Q(-2)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} -38 & -36 & -126 \\ 0 & 16 & 0 \\ 21 & 12 & 67 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A)=\begin{pmatrix} 3\,(-2)^n-2\,(-5)^n & 3\,(-2)^n-3\,(-4)^n & 6\,(-2)^n-6\,(-5)^n \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ -(-2)^n+(-5)^n & -(-2)^n+(-4)^n & -2\,(-2)^n+3\,(-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n=Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 50. ← page 15

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0,L_1,L_2) associés aux réels -7, 5 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-7)^n\,L_0+5^nL_1+6^nL_2 \\ &= \frac{1}{13}\left(X^2+2\,X-35\right)6^n-\frac{1}{12}\left(X^2+X-42\right)5^n+\frac{1}{156}\left(X^2-11\,X+30\right)(-7)^n \\ &= \left(\frac{1}{13}\cdot 6^n-\frac{1}{12}\cdot 5^n+\frac{1}{156}\,(-7)^n\right)X^2+\left(\frac{2}{13}\cdot 6^n-\frac{1}{12}\cdot 5^n-\frac{11}{156}\,(-7)^n\right)X+\left(-\frac{35}{13}\cdot 6^n+\frac{7}{2}\cdot 5^n+\frac{5}{26}\,(-7)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q=a_nX^2+b_nX+c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k\in\mathbb{N},\ A^k=PD^kP^{-1}=P\begin{pmatrix} (-7)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A)=a_nA^2+b_nA+c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}P^{-1}+b_nP\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1}+c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 49\,a_n-7\,b_n+c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\,a_n+5\,b_n+c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n+6\,b_n+c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-7) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(5) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(6) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-7)$, $Q(5)$ et $Q(6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A)=a_nA^2+b_nA+c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2=\begin{pmatrix} 62 & -11 & -70 \\ -52 & 69 & 184 \\ 13 & -11 & -21 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A)=\begin{pmatrix} -6^n+2\,(-7)^n & -6^n+5^n & -2\cdot 6^n+4\cdot 5^n-2\,(-7)^n \\ 4\cdot 6^n-4\,(-7)^n & 4\cdot 6^n-3\cdot 5^n & 8\cdot 6^n-12\cdot 5^n+4\,(-7)^n \\ -6^n+(-7)^n & -6^n+5^n & -2\cdot 6^n+4\cdot 5^n-(-7)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n=Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 51. ← page 16

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels 4 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 4^n L_0 + 9^n L_1 \\ &= \frac{1}{5} \cdot 9^n (X-4) - \frac{1}{5} \cdot 4^n (X-9) \\ &= \left(\frac{1}{5} \cdot 9^n - \frac{1}{5} \cdot 4^n\right) X + \left(-\frac{4}{5} \cdot 9^n + \frac{9}{5} \cdot 4^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 9^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 = a_n P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} 4\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 9\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} Q\,(4) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(9) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4^n & 2 \cdot 9^n - 2 \cdot 4^n & 4 \cdot 9^n - 4 \cdot 4^n \\ 2 \cdot 9^n - 2 \cdot 4^n & -3 \cdot 9^n + 4 \cdot 4^n & -8 \cdot 9^n + 8 \cdot 4^n \\ -9^n + 4^n & 2 \cdot 9^n - 2 \cdot 4^n & 5 \cdot 9^n - 4 \cdot 4^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 52. ← page 16

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, 1 et 2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n L_0 + L_1 + 2^n L_2 \\ &= \frac{1}{7}\left(X^2 + 4\,X - 5\right)2^n + \frac{1}{42}\left(X^2 - 3\,X + 2\right)(-5)^n - \frac{1}{6}\,X^2 - \frac{1}{2}\,X + \frac{5}{3} \\ &= \left(\frac{1}{7} \cdot 2^n + \frac{1}{42}\,(-5)^n - \frac{1}{6}\right) X^2 + \left(\frac{4}{7} \cdot 2^n - \frac{1}{14}\,(-5)^n - \frac{1}{2}\right) X + \left(-\frac{5}{7} \cdot 2^n + \frac{1}{21}\,(-5)^n + \frac{5}{3}\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n + b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n + 2\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(2) \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(1)$ et $Q(2)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 88 & -9 & -261 \\ -21 & 4 & 63 \\ 21 & -3 & -62 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3\cdot 2^n + 4\,(-5)^n & -3\cdot 2^n + 3 & 9\cdot 2^n - 12\,(-5)^n + 3 \\ 2^n - (-5)^n & 2^n & -3\cdot 2^n + 3\,(-5)^n \\ -2^n + (-5)^n & -2^n + 1 & 3\cdot 2^n - 3\,(-5)^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 53. ← page 16

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, -3 et -2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-5)^n\,L_0 - L_1 - L_2 \\
&= \frac{1}{3}\left(X^2 + 8\,X + 15\right)(-2)^n - \frac{1}{2}\left(X^2 + 7\,X + 10\right)(-3)^n + \frac{1}{6}\left(X^2 + 5\,X + 6\right)(-5)^n \\
&= \left(\frac{1}{3}\,(-2)^n - \frac{1}{2}\,(-3)^n + \frac{1}{6}\,(-5)^n\right)X^2 + \left(\frac{8}{3}\,(-2)^n - \frac{7}{2}\,(-3)^n + \frac{5}{6}\,(-5)^n\right)X + \left(5\,(-2)^n - 5\,(-3)^n + (-5)^n\right).
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n - 2\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-2) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(-3)$ et $Q(-2)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 67 & 10 & -86 \\ -84 & -11 & 108 \\ 21 & 5 & -18 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -2\,(-2)^n + 3\,(-5)^n & -2\,(-2)^n + 2\,(-3)^n & -2\,(-2)^n + 8\,(-3)^n - 6\,(-5)^n \\ 4\,(-2)^n - 4\,(-5)^n & 4\,(-2)^n - 3\,(-3)^n & 4\,(-2)^n - 12\,(-3)^n + 8\,(-5)^n \\ -(-2)^n + (-5)^n & -(-2)^n + (-3)^n & -(-2)^n + 4\,(-3)^n - 2\,(-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 54. ← page 16

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -8 et -5. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-8)^n\,L_0 - L_1 \\
&= \frac{1}{3}\,(-5)^n\,(X+8) - \frac{1}{3}\,(-8)^n\,(X+5) \\
&= \left(\frac{1}{3}\,(-5)^n - \frac{1}{3}\,(-8)^n\right) X + \left(\frac{8}{3}\,(-5)^n - \frac{5}{3}\,(-8)^n\right).
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -8\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -8\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & -5\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-8) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-5) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 8\,(-5)^n - 7\,(-8)^n & -8\,(-5)^n + 8\,(-8)^n & -32\,(-5)^n + 32\,(-8)^n \\ 3\,(-5)^n - 3\,(-8)^n & -3\,(-5)^n + 4\,(-8)^n & -12\,(-5)^n + 12\,(-8)^n \\ (-5)^n - (-8)^n & -(-5)^n + (-8)^n & -4\,(-5)^n + 5\,(-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 55. ← page 17

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -2 et 3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n\,L_0 - L_1 + 3^nL_2 \\ &= \frac{1}{60}\left(X^2 + 11\,X + 18\right)3^n - \frac{1}{35}\left(X^2 + 6\,X - 27\right)(-2)^n + \frac{1}{84}\left(X^2 - X - 6\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{60} \cdot 3^n - \frac{1}{35}\,(-2)^n + \frac{1}{84}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{11}{60} \cdot 3^n - \frac{6}{35}\,(-2)^n - \frac{1}{84}\,(-9)^n\right)X + \left(\frac{3}{10} \cdot 3^n + \frac{27}{35}\,(-2)^n - \frac{1}{14}\,(-9)^n\right) \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 4\,a_n - 2\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-2) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(3) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-2)$ et $Q(3)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 369 & -20 & -1500 \\ -216 & 19 & 894 \\ 72 & -5 & -294 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\cdot 3^n + 5\,(-9)^n & -4\cdot 3^n + 4\,(-2)^n & 8\cdot 3^n + 12\,(-2)^n - 20\,(-9)^n \\ 3\cdot 3^n - 3\,(-9)^n & 3\cdot 3^n - 2\,(-2)^n & -6\cdot 3^n - 6\,(-2)^n + 12\,(-9)^n \\ -3^n + (-9)^n & -3^n + (-2)^n & 2\cdot 3^n + 3\,(-2)^n - 4\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 56. ← page 17

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -2, 7 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-2)^n L_0 + 7^n L_1 + 9^n L_2 \\ &= \frac{1}{22}\left(X^2 - 5\,X - 14\right)9^n - \frac{1}{18}\left(X^2 - 7\,X - 18\right)7^n + \frac{1}{99}\left(X^2 - 16\,X + 63\right)(-2)^n \\ &= \left(\frac{1}{22}\cdot 9^n - \frac{1}{18}\cdot 7^n + \frac{1}{99}\,(-2)^n\right)X^2 + \left(-\frac{5}{22}\cdot 9^n + \frac{7}{18}\cdot 7^n - \frac{16}{99}\,(-2)^n\right)X + \left(-\frac{7}{11}\cdot 9^n + 7^n + \frac{7}{11}\,(-2)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 7^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}P^{-1} + b_n P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1} + c_n P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 4\,a_n - 2\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(-2) & 0 & 0 \\ 0 & Q(7) & 0 \\ 0 & 0 & Q(9) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-2)$, $Q(7)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 235 & 96 & 462 \\ 0 & 49 & 0 \\ -77 & -32 & -150 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 9^n - 2\,(-2)^n & 3\cdot 9^n - 3\cdot 7^n & 6\cdot 9^n - 6\,(-2)^n \\ 0 & 7^n & 0 \\ -9^n + (-2)^n & -9^n + 7^n & -2\cdot 9^n + 3\,(-2)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 57. ← page 17

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -6, 5 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-6)^n\,L_0 + 5^n L_1 + 9^n L_2 \\ &= \frac{1}{60}\left(X^2 + X - 30\right)9^n - \frac{1}{44}\left(X^2 - 3\,X - 54\right)5^n + \frac{1}{165}\left(X^2 - 14\,X + 45\right)(-6)^n \\ &= \left(\frac{1}{60}\cdot 9^n - \frac{1}{44}\cdot 5^n + \frac{1}{165}\,(-6)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{60}\cdot 9^n + \frac{3}{44}\cdot 5^n - \frac{14}{165}\,(-6)^n\right)X + \left(-\frac{1}{2}\cdot 9^n + \frac{27}{22}\cdot 5^n + \frac{3}{11}\,(-6)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-6)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 36\,a_n - 6\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-6) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(5) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-6)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-6)$, $Q(5)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 216 & 224 & 316 \\ -45 & -31 & -68 \\ -45 & -56 & -43 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4\cdot 9^n - 3\,(-6)^n & 4\cdot 9^n - 4\cdot 5^n & 8\cdot 9^n + 4\cdot 5^n - 12\,(-6)^n \\ -9^n + (-6)^n & -9^n + 2\cdot 5^n & -2\cdot 9^n - 2\cdot 5^n + 4\,(-6)^n \\ -9^n + (-6)^n & -9^n + 5^n & -2\cdot 9^n - 5^n + 4\,(-6)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 58. ← page 18

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, 3 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n L_0 + 3^n L_1 + 6^n L_2 \\ &= \frac{1}{42}\left(X^2+5X-24\right)6^n - \frac{1}{33}\left(X^2+2X-48\right)3^n + \frac{1}{154}\left(X^2-9X+18\right)(-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{42}\cdot 6^n - \frac{1}{33}\cdot 3^n + \frac{1}{154}(-8)^n\right)X^2 + \left(\frac{5}{42}\cdot 6^n - \frac{2}{33}\cdot 3^n - \frac{9}{154}(-8)^n\right)X + \left(-\frac{4}{7}\cdot 6^n + \frac{16}{11}\cdot 3^n + \frac{9}{77}(-8)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q(6) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(3)$ et $Q(6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 56 & -45 & 162 \\ 28 & -27 & 90 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ -2\cdot 6^n + 2(-8)^n & -2\cdot 6^n + 3\cdot 3^n & 6\cdot 6^n - 6\cdot 3^n \\ -6^n + (-8)^n & -6^n + 3^n & 3\cdot 6^n - 2\cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 59. ← page 18

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, 4 et 7. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n L_0 + 4^n L_1 + 7^n L_2 \\ &= \frac{1}{48}\left(X^2+5X-36\right)7^n - \frac{1}{39}\left(X^2+2X-63\right)4^n + \frac{1}{208}\left(X^2-11X+28\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{48}\cdot 7^n - \frac{1}{39}\cdot 4^n + \frac{1}{208}(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{5}{48}\cdot 7^n - \frac{2}{39}\cdot 4^n - \frac{11}{208}(-9)^n\right)X + \left(-\frac{3}{4}\cdot 7^n + \frac{21}{13}\cdot 4^n + \frac{7}{52}(-9)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 7^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(7) \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(4)$ et $Q(7)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 66 & 2 \\ -32 & 49 & -64 \\ 32 & -33 & 80 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2\cdot 7^n - (-9)^n & 2\cdot 7^n - 2\cdot 4^n & 4\cdot 7^n - 2\cdot 4^n - 2\,(-9)^n \\ 7^n - (-9)^n & 7^n & 2\cdot 7^n - 2\,(-9)^n \\ -7^n + (-9)^n & -7^n + 4^n & -2\cdot 7^n + 4^n + 2\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 60. ← page 18

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -8 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-9)^n\,L_0 - L_1 + 8^nL_2 \\
&= \frac{1}{272}\left(X^2 + 17\,X + 72\right)8^n - \frac{1}{16}\left(X^2 + X - 72\right)(-8)^n + \frac{1}{17}\left(X^2 - 64\right)(-9)^n \\
&= \left(\frac{1}{272}\cdot 8^n - \frac{1}{16}\,(-8)^n + \frac{1}{17}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{16}\cdot 8^n - \frac{1}{16}\,(-8)^n\right)X + \left(\frac{9}{34}\cdot 8^n + \frac{9}{2}\,(-8)^n - \frac{64}{17}\,(-9)^n\right).
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-8) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(8) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-8)$ et $Q(8)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ -51 & 64 & 0 \\ 17 & 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 3 \cdot 8^n - 3\,(-9)^n & 3 \cdot 8^n - 2\,(-8)^n & 6 \cdot 8^n - 6\,(-8)^n \\ -8^n + (-9)^n & -8^n + (-8)^n & -2 \cdot 8^n + 3\,(-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 61. ← page 19

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -2, -1 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-2)^n\,L_0 - L_1 + 6^nL_2 \\ &= \frac{1}{56}\left(X^2 + 3\,X + 2\right)6^n - \frac{1}{7}\left(X^2 - 4\,X - 12\right)(-1)^n + \frac{1}{8}\left(X^2 - 5\,X - 6\right)(-2)^n \\ &= \left(\frac{1}{56} \cdot 6^n - \frac{1}{7}\,(-1)^n + \frac{1}{8}\,(-2)^n\right)X^2 + \left(\frac{3}{56} \cdot 6^n + \frac{4}{7}\,(-1)^n - \frac{5}{8}\,(-2)^n\right)X + \left(\frac{1}{28} \cdot 6^n + \frac{12}{7}\,(-1)^n - \frac{3}{4}\,(-2)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 4\,a_n - 2\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n - b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-2) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-1) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(6) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-2)$, $Q(-1)$ et $Q(6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 96 & 106 & 210 \\ -32 & -35 & -69 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 3 \cdot 6^n - 3\,(-2)^n & 3 \cdot 6^n - 2\,(-1)^n & 6 \cdot 6^n - 6\,(-1)^n \\ -6^n + (-2)^n & -6^n + (-1)^n & -2 \cdot 6^n + 3\,(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 62. ← page 19

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -6, -3 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-6)^n\,L_0 - L_1 + 10^nL_2 \\ &= \frac{1}{208}\left(X^2 + 9\,X + 18\right)10^n - \frac{1}{39}\left(X^2 - 4\,X - 60\right)(-3)^n + \frac{1}{48}\left(X^2 - 7\,X - 30\right)(-6)^n \\ &= \left(\frac{1}{208} \cdot 10^n - \frac{1}{39}\,(-3)^n + \frac{1}{48}\,(-6)^n\right)X^2 + \left(\frac{9}{208} \cdot 10^n + \frac{4}{39}\,(-3)^n - \frac{7}{48}\,(-6)^n\right)X + \left(\frac{9}{104} \cdot 10^n + \frac{20}{13}\,(-3)^n - \frac{5}{8}\,(- \right. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-6)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 36\,a_n - 6\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-6) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-6)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-6)$, $Q(-3)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -156 & -273 & -51 \\ 192 & 282 & -30 \\ -64 & -91 & 19 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3 \cdot 10^n + 4\,(-6)^n & -3 \cdot 10^n + 3\,(-3)^n & 3 \cdot 10^n + 9\,(-3)^n - 12\,(-6)^n \\ 3 \cdot 10^n - 3\,(-6)^n & 3 \cdot 10^n - 2\,(-3)^n & -3 \cdot 10^n - 6\,(-3)^n + 9\,(-6)^n \\ -10^n + (-6)^n & -10^n + (-3)^n & 10^n + 3\,(-3)^n - 3\,(-6)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 63. ← page 19

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -6, 7 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-6)^n\,L_0 + 7^nL_1 + 8^nL_2 \\
&= \frac{1}{14}\left(X^2 - X - 42\right)8^n - \frac{1}{13}\left(X^2 - 2\,X - 48\right)7^n + \frac{1}{182}\left(X^2 - 15\,X + 56\right)(-6)^n \\
&= \left(\frac{1}{14} \cdot 8^n - \frac{1}{13} \cdot 7^n + \frac{1}{182}\,(-6)^n\right)X^2 + \left(-\frac{1}{14} \cdot 8^n + \frac{2}{13} \cdot 7^n - \frac{15}{182}\,(-6)^n\right)X + \left(-3 \cdot 8^n + \frac{48}{13} \cdot 7^n + \frac{4}{13}\,(-6)^n\right).
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-6)^k & 0 & 0 \\ 0 & 7^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 36\,a_n - 6\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(-6) & 0 & 0 \\ 0 & Q(7) & 0 \\ 0 & 0 & Q(8) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-6)^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-6)$, $Q(7)$ et $Q(8)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 148 & 60 & 576 \\ 112 & 109 & 628 \\ -28 & -15 & -108 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4\cdot 8^n - 3\,(-6)^n & 4\cdot 8^n - 4\cdot 7^n & 28\cdot 8^n - 16\cdot 7^n - 12\,(-6)^n \\ 4\cdot 8^n - 4\,(-6)^n & 4\cdot 8^n - 3\cdot 7^n & 28\cdot 8^n - 12\cdot 7^n - 16\,(-6)^n \\ -8^n + (-6)^n & -8^n + 7^n & -7\cdot 8^n + 4\cdot 7^n + 4\,(-6)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 64. ← page 19

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, -7 et 2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n\,L_0 - L_1 + 2^nL_2 \\ &= \frac{1}{90}\left(X^2 + 15\,X + 56\right)2^n - \frac{1}{9}\left(X^2 + 6\,X - 16\right)(-7)^n + \frac{1}{10}\left(X^2 + 5\,X - 14\right)(-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{90}\cdot 2^n - \frac{1}{9}\,(-7)^n + \frac{1}{10}\,(-8)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{6}\cdot 2^n - \frac{2}{3}\,(-7)^n + \frac{1}{2}\,(-8)^n\right)X + \left(\frac{28}{45}\cdot 2^n + \frac{16}{9}\,(-7)^n - \frac{7}{5}\,(-8)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n + 2\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-7) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(2) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(-7)$ et $Q(2)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ -120 & -41 & -90 \\ 60 & 45 & 94 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 2\cdot 2^n - 2\,(-8)^n & 2\cdot 2^n - (-7)^n & 2\cdot 2^n - 2\,(-7)^n \\ -2^n + (-8)^n & -2^n + (-7)^n & -2^n + 2\,(-7)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 65. ← page 20

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -7, -3 et -2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-7)^n\,L_0 - L_1 - L_2 \\
&= \frac{1}{5}\left(X^2 + 10\,X + 21\right)(-2)^n - \frac{1}{4}\left(X^2 + 9\,X + 14\right)(-3)^n + \frac{1}{20}\left(X^2 + 5\,X + 6\right)(-7)^n \\
&= \left(\frac{1}{5}\,(-2)^n - \frac{1}{4}\,(-3)^n + \frac{1}{20}\,(-7)^n\right)X^2 + \left(2\,(-2)^n - \frac{9}{4}\,(-3)^n + \frac{1}{4}\,(-7)^n\right)X + \left(\frac{21}{5}\,(-2)^n - \frac{7}{2}\,(-3)^n + \frac{3}{10}\,(-7)^n\right)
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-7)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 4\,a_n - 2\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-7) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q(-2) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-7)$, $Q(-3)$ et $Q(-2)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -86 & -15 & -210 \\ 180 & 29 & 440 \\ 45 & 5 & 119 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\,(-2)^n - 2\,(-7)^n & 3\,(-2)^n - 3\,(-3)^n & -6\,(-2)^n + 12\,(-3)^n - 6\,(-7)^n \\ -4\,(-2)^n + 4\,(-7)^n & -4\,(-2)^n + 5\,(-3)^n & 8\,(-2)^n - 20\,(-3)^n + 12\,(-7)^n \\ -(-2)^n + (-7)^n & -(-2)^n + (-3)^n & 2\,(-2)^n - 4\,(-3)^n + 3\,(-7)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 66. ← page 20

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, 5 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n\,L_0 + 5^nL_1 + 8^nL_2 \\ &= \frac{1}{54}\left(X^2 + 5\,X - 50\right)8^n - \frac{1}{45}\left(X^2 + 2\,X - 80\right)5^n + \frac{1}{270}\left(X^2 - 13\,X + 40\right)(-10)^n \\ &= \left(\frac{1}{54} \cdot 8^n - \frac{1}{45} \cdot 5^n + \frac{1}{270}\,(-10)^n\right)X^2 + \left(\frac{5}{54} \cdot 8^n - \frac{2}{45} \cdot 5^n - \frac{13}{270}\,(-10)^n\right)X + \left(-\frac{25}{27} \cdot 8^n + \frac{16}{9} \cdot 5^n + \frac{4}{27}\,(-10)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(5) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(8) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(5)$ et $Q(8)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 244 & -156 & -720 \\ 0 & 25 & 0 \\ 36 & -39 & -80 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4 \cdot 8^n + 5\,(-10)^n & -4 \cdot 8^n + 4 \cdot 5^n & 20 \cdot 8^n - 20\,(-10)^n \\ 0 & 5^n & 0 \\ -8^n + (-10)^n & -8^n + 5^n & 5 \cdot 8^n - 4\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 67. ← page 20

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -7, -3 et 7. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-7)^n\,L_0 - L_1 + 7^nL_2 \\ &= \frac{1}{140}\left(X^2 + 10\,X + 21\right)7^n - \frac{1}{40}\left(X^2 - 49\right)(-3)^n + \frac{1}{56}\left(X^2 - 4\,X - 21\right)(-7)^n \\ &= \left(\frac{1}{140} \cdot 7^n - \frac{1}{40}\,(-3)^n + \frac{1}{56}\,(-7)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{14} \cdot 7^n - \frac{1}{14}\,(-7)^n\right)X + \left(\frac{3}{20} \cdot 7^n + \frac{49}{40}\,(-3)^n - \frac{3}{8}\,(-7)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-7)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & 7^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-7) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(7) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-7)$, $Q(-3)$ et $Q(7)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 49 & 160 & -320 \\ 0 & -71 & 240 \\ 0 & -40 & 129 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4\cdot 7^n - 3\,(-7)^n & 4\cdot 7^n - 4\,(-3)^n & 4\cdot 7^n + 8\,(-3)^n - 12\,(-7)^n \\ -2\cdot 7^n + 2\,(-7)^n & -2\cdot 7^n + 3\,(-3)^n & -2\cdot 7^n - 6\,(-3)^n + 8\,(-7)^n \\ -7^n + (-7)^n & -7^n + (-3)^n & -7^n - 2\,(-3)^n + 4\,(-7)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 68. ← page 21

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels 3, 6 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 3^nL_0 + 6^nL_1 + 8^nL_2 \\ &= \frac{1}{10}\left(X^2 - 9\,X + 18\right)8^n - \frac{1}{6}\left(X^2 - 11\,X + 24\right)6^n + \frac{1}{15}\left(X^2 - 14\,X + 48\right)3^n \\ &= \left(\frac{1}{10}\cdot 8^n - \frac{1}{6}\cdot 6^n + \frac{1}{15}\cdot 3^n\right)X^2 + \left(-\frac{9}{10}\cdot 8^n + \frac{11}{6}\cdot 6^n - \frac{14}{15}\cdot 3^n\right)X + \left(\frac{9}{5}\cdot 8^n - 4\cdot 6^n + \frac{16}{5}\cdot 3^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 6^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(3) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(6) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(8) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(3)$, $Q(6)$ et $Q(8)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -156 & -84 & 324 \\ 220 & 148 & -324 \\ -55 & -28 & 117 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3\cdot 8^n + 4\cdot 3^n & -3\cdot 8^n + 3\cdot 6^n & 12\cdot 6^n - 12\cdot 3^n \\ 4\cdot 8^n - 4\cdot 3^n & 4\cdot 8^n - 3\cdot 6^n & -12\cdot 6^n + 12\cdot 3^n \\ -8^n + 3^n & -8^n + 6^n & 4\cdot 6^n - 3\cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 69. ← page 21

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -9, -8 et 4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n\,L_0 - L_1 + 4^nL_2 \\ &= \frac{1}{156}\left(X^2 + 17\,X + 72\right)4^n - \frac{1}{12}\left(X^2 + 5\,X - 36\right)(-8)^n + \frac{1}{13}\left(X^2 + 4\,X - 32\right)(-9)^n \\ &= \left(\frac{1}{156}\cdot 4^n - \frac{1}{12}\,(-8)^n + \frac{1}{13}\,(-9)^n\right)X^2 + \left(\frac{17}{156}\cdot 4^n - \frac{5}{12}\,(-8)^n + \frac{4}{13}\,(-9)^n\right)X + \left(\frac{6}{13}\cdot 4^n + 3\,(-8)^n - \frac{32}{13}\,(-9)^n\right) \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 81\,a_n - 9\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-8) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(4) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-8)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-9)$, $Q(-8)$ et $Q(4)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 276 & 144 & -636 \\ -65 & 16 & 195 \\ 65 & 48 & -131 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3\cdot 4^n + 4\,(-9)^n & -3\cdot 4^n + 3\,(-8)^n & 9\cdot 4^n + 3\,(-8)^n - 12\,(-9)^n \\ 4^n - (-9)^n & 4^n & -3\cdot 4^n + 3\,(-9)^n \\ -4^n + (-9)^n & -4^n + (-8)^n & 3\cdot 4^n + (-8)^n - 3\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 70. ← page 21

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -9 et 2. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-9)^n\,L_0 + 2^nL_1 \\ &= \frac{1}{11}\cdot 2^n(X+9) - \frac{1}{11}\,(-9)^n\,(X-2) \\ &= \left(\frac{1}{11}\cdot 2^n - \frac{1}{11}\,(-9)^n\right)X + \left(\frac{9}{11}\cdot 2^n + \frac{2}{11}\,(-9)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -9\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 2\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 2\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-9) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(2) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(2) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n - (-9)^n & 2\cdot 2^n - 2\,(-9)^n & -2\cdot 2^n + 2\,(-9)^n \\ -2\cdot 2^n + 2\,(-9)^n & -3\cdot 2^n + 4\,(-9)^n & 4\cdot 2^n - 4\,(-9)^n \\ -2^n + (-9)^n & -2\cdot 2^n + 2\,(-9)^n & 3\cdot 2^n - 2\,(-9)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 71. ← page 22

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -4, -2 et 3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-4)^n\,L_0 - L_1 + 3^n L_2 \\ &= \frac{1}{35}\left(X^2 + 6\,X + 8\right)3^n - \frac{1}{10}\left(X^2 + X - 12\right)(-2)^n + \frac{1}{14}\left(X^2 - X - 6\right)(-4)^n \\ &= \left(\frac{1}{35}\cdot 3^n - \frac{1}{10}\,(-2)^n + \frac{1}{14}\,(-4)^n\right)X^2 + \left(\frac{6}{35}\cdot 3^n - \frac{1}{10}\,(-2)^n - \frac{1}{14}\,(-4)^n\right)X + \left(\frac{8}{35}\cdot 3^n + \frac{6}{5}\,(-2)^n - \frac{3}{7}\,(-4)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 16\,a_n - 4\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 4\,a_n - 2\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-4) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-2) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(3) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-4)$, $Q(-2)$ et $Q(3)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 23 & -5 & -24 \\ -14 & 14 & 24 \\ 7 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$
Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :
$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3^n + 2\,(-4)^n & -3^n + (-2)^n & 2\,(-2)^n - 2\,(-4)^n \\ 2 \cdot 3^n - 2\,(-4)^n & 2 \cdot 3^n - (-2)^n & -2\,(-2)^n + 2\,(-4)^n \\ -3^n + (-4)^n & -3^n + (-2)^n & 2\,(-2)^n - (-4)^n \end{pmatrix}.$$
Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 72. ← page 22

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -7, -3 et 1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :
$$\begin{aligned} Q &= (-7)^n L_0 - L_1 + L_2 \\ &= -\frac{1}{16}\left(X^2 + 6X - 7\right)(-3)^n + \frac{1}{32}\left(X^2 + 2X - 3\right)(-7)^n + \frac{1}{32}X^2 + \frac{5}{16}X + \frac{21}{32} \\ &= \left(-\frac{1}{16}(-3)^n + \frac{1}{32}(-7)^n + \frac{1}{32}\right)X^2 + \left(-\frac{3}{8}(-3)^n + \frac{1}{16}(-7)^n + \frac{5}{16}\right)X + \left(\frac{7}{16}(-3)^n - \frac{3}{32}(-7)^n + \frac{21}{32}\right). \end{aligned}$$
Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-7)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :
$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n + b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-7) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q(1) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$
d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-7)$, $Q(-3)$ et $Q(1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 144 & 33 & -96 \\ 48 & 8 & -23 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 3\,(-7)^n - 3 & 4\,(-3)^n - 3 & -12\,(-3)^n + 12 \\ (-7)^n - 1 & (-3)^n - 1 & -3\,(-3)^n + 4 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 73. ← page 22

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -6 et -3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-6)^n\,L_0 - L_1 \\ &= \frac{1}{3}\,(-3)^n\,(X+6) - \frac{1}{3}\,(-6)^n\,(X+3) \\ &= \left(\frac{1}{3}\,(-3)^n - \frac{1}{3}\,(-6)^n\right)X + \left(2\,(-3)^n - (-6)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-6)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} -6\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -3\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & -3\,a_n + b_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-6) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-3) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-6)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -6\,(-3)^n + 7\,(-6)^n & -14\,(-3)^n + 14\,(-6)^n & 0 \\ 3\,(-3)^n - 3\,(-6)^n & 7\,(-3)^n - 6\,(-6)^n & 0 \\ -(-3)^n + (-6)^n & -2\,(-3)^n + 2\,(-6)^n & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 74. ← page 22

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, 4 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n\,L_0 + 4^nL_1 + 10^nL_2 \\ &= \frac{1}{108}\left(X^2 + 4\,X - 32\right)10^n - \frac{1}{72}\left(X^2 - 2\,X - 80\right)4^n + \frac{1}{216}\left(X^2 - 14\,X + 40\right)(-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{108}\cdot 10^n - \frac{1}{72}\cdot 4^n + \frac{1}{216}\,(-8)^n\right)X^2 + \left(\frac{1}{27}\cdot 10^n + \frac{1}{36}\cdot 4^n - \frac{7}{108}\,(-8)^n\right)X + \left(-\frac{8}{27}\cdot 10^n + \frac{10}{9}\cdot 4^n + \frac{5}{27}\,(-8)^n\right) \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(4)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -44 & -252 & 936 \\ -72 & -152 & 720 \\ -36 & -84 & 376 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3\cdot 10^n + 4\,(-8)^n & -3\cdot 10^n + 3\cdot 4^n & 18\cdot 10^n - 6\cdot 4^n - 12\,(-8)^n \\ -2\cdot 10^n + 2\,(-8)^n & -2\cdot 10^n + 3\cdot 4^n & 12\cdot 10^n - 6\cdot 4^n - 6\,(-8)^n \\ -10^n + (-8)^n & -10^n + 4^n & 6\cdot 10^n - 2\cdot 4^n - 3\,(-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 75. ← page 23

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -4, -3 et 5. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-4)^n\,L_0 - L_1 + 5^nL_2 \\ &= \frac{1}{72}\left(X^2 + 7\,X + 12\right)5^n - \frac{1}{8}\left(X^2 - X - 20\right)(-3)^n + \frac{1}{9}\left(X^2 - 2\,X - 15\right)(-4)^n \\ &= \left(\frac{1}{72}\cdot 5^n - \frac{1}{8}\,(-3)^n + \frac{1}{9}\,(-4)^n\right)X^2 + \left(\frac{7}{72}\cdot 5^n + \frac{1}{8}\,(-3)^n - \frac{2}{9}\,(-4)^n\right)X + \left(\frac{1}{6}\cdot 5^n + \frac{5}{2}\,(-3)^n - \frac{5}{3}\,(-4)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 16\,a_n - 4\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-4) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(5) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-4)$, $Q(-3)$ et $Q(5)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 43 & 48 & 102 \\ 9 & 25 & 27 \\ -9 & -16 & -18 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5^n - 2\,(-4)^n & 3 \cdot 5^n - 3\,(-3)^n & 9 \cdot 5^n - 3\,(-3)^n - 6\,(-4)^n \\ 5^n - (-4)^n & 5^n & 3 \cdot 5^n - 3\,(-4)^n \\ -5^n + (-4)^n & -5^n + (-3)^n & -3 \cdot 5^n + (-3)^n + 3\,(-4)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 76. ← page 23

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, -5 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-8)^n\,L_0 - L_1 + 10^n L_2 \\
&= \frac{1}{270}\left(X^2 + 13\,X + 40\right)10^n - \frac{1}{45}\left(X^2 - 2\,X - 80\right)(-5)^n + \frac{1}{54}\left(X^2 - 5\,X - 50\right)(-8)^n \\
&= \left(\frac{1}{270} \cdot 10^n - \frac{1}{45}\,(-5)^n + \frac{1}{54}\,(-8)^n\right)X^2 + \left(\frac{13}{270} \cdot 10^n + \frac{2}{45}\,(-5)^n - \frac{5}{54}\,(-8)^n\right)X + \left(\frac{4}{27} \cdot 10^n + \frac{16}{9}\,(-5)^n - \frac{25}{27}\,(-
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-5)^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-5) & 0 \\ 0 & 0 & Q(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(-5)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -44 & -225 & -468 \\ 144 & 325 & 468 \\ -36 & -75 & -92 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3 \cdot 10^n + 4\,(-8)^n & -3 \cdot 10^n + 3\,(-5)^n & 12\,(-5)^n - 12\,(-8)^n \\ 4 \cdot 10^n - 4\,(-8)^n & 4 \cdot 10^n - 3\,(-5)^n & -12\,(-5)^n + 12\,(-8)^n \\ -10^n + (-8)^n & -10^n + (-5)^n & 4\,(-5)^n - 3\,(-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 77. ← page 23

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, 6 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n\,L_0 + 6^n L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{80}\left(X^2 + 4\,X - 60\right)10^n - \frac{1}{64}\left(X^2 - 100\right)6^n + \frac{1}{320}\left(X^2 - 16\,X + 60\right)(-10)^n \\ &= \left(\frac{1}{80} \cdot 10^n - \frac{1}{64} \cdot 6^n + \frac{1}{320}\,(-10)^n\right) X^2 + \left(\frac{1}{20} \cdot 10^n - \frac{1}{20}\,(-10)^n\right) X + \left(-\frac{3}{4} \cdot 10^n + \frac{25}{16} \cdot 6^n + \frac{3}{16}\,(-10)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & 6^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(6) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(6)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 100 & -256 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & -64 & 100 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\cdot 10^n + 5\,(-10)^n & -4\cdot 10^n + 4\cdot 6^n & 20\cdot 10^n - 20\,(-10)^n \\ 0 & 6^n & 0 \\ -10^n + (-10)^n & -10^n + 6^n & 5\cdot 10^n - 4\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 78. ← page 24

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -10 et 3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-10)^n\,L_0 + 3^nL_1 \\
&= \frac{1}{13}\cdot 3^n(X+10) - \frac{1}{13}\,(-10)^n\,(X-3) \\
&= \left(\frac{1}{13}\cdot 3^n - \frac{1}{13}\,(-10)^n\right)X + \left(\frac{10}{13}\cdot 3^n + \frac{3}{13}\,(-10)^n\right).
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-10)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 = a_nP \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} -10\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -10\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 3\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-10) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(3) \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-10)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 13 \cdot 3^n - 12\,(-10)^n & 26 \cdot 3^n - 26\,(-10)^n & -52 \cdot 3^n + 52\,(-10)^n \\ -4 \cdot 3^n + 4\,(-10)^n & -8 \cdot 3^n + 9\,(-10)^n & 16 \cdot 3^n - 16\,(-10)^n \\ 3^n - (-10)^n & 2 \cdot 3^n - 2\,(-10)^n & -4 \cdot 3^n + 5\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 79. ← page 24

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels 5 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 5^nL_0 + 8^nL_1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 8^n(X-5) - \frac{1}{3} \cdot 5^n(X-8) \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 8^n - \frac{1}{3} \cdot 5^n\right)X + \left(-\frac{5}{3} \cdot 8^n + \frac{8}{3} \cdot 5^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 = a_nP \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} 5\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 5\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 8\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} Q\,(5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(5) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(8) \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 8\cdot 8^n - 7\cdot 5^n & -32\cdot 8^n + 32\cdot 5^n & 8\cdot 8^n - 8\cdot 5^n \\ 2\cdot 8^n - 2\cdot 5^n & -8\cdot 8^n + 9\cdot 5^n & 2\cdot 8^n - 2\cdot 5^n \\ 8^n - 5^n & -4\cdot 8^n + 4\cdot 5^n & 8^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 80. ← page 24

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels 1 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= L_0 + 8^n L_1 \\ &= \frac{1}{7}\cdot 8^n (X-1) - \frac{1}{7}X + \frac{8}{7} \\ &= \left(\frac{1}{7}\cdot 8^n - \frac{1}{7}\right)X + \left(-\frac{1}{7}\cdot 8^n + \frac{8}{7}\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 &= a_n P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}P^{-1} + b_n P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 8\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 8\,a_n + b_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(8) & 0 \\ 0 & 0 & Q(8) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 8^n - 2 & 0 & 6\cdot 8^n - 6 \\ 3\cdot 8^n - 3 & 8^n & 9\cdot 8^n - 9 \\ -8^n + 1 & 0 & -2\cdot 8^n + 3 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 81. ← page 25

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels 0 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les

calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 10^n L_1 \\ &= \frac{1}{10} \cdot 10^n X \\ &= \left(\frac{1}{10} \cdot 10^n\right) X + (0)\,. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$ et : $A^0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

   On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} b_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n & 0 \\ 0 & 0 & 10\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q(0) & 0 \\ 0 & 0 & Q(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

   d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 \cdot 10^n & 0 & -4 \cdot 10^n \\ 10^n & 0 & 10^n \end{pmatrix}.$$

   Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 82. ← page 25

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -6 et -4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-6)^n L_0 - L_1 \\ &= \frac{1}{2} (-4)^n (X+6) - \frac{1}{2} (-6)^n (X+4) \\ &= \left(\frac{1}{2} (-4)^n - \frac{1}{2} (-6)^n\right) X + (3\,(-4)^n - 2\,(-6)^n)\,. \end{aligned}$$

   Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-6)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -6\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -4\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & -4\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-6) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-4) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-4) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-6)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 17\,(-4)^n - 16\,(-6)^n & 64\,(-4)^n - 64\,(-6)^n & 16\,(-4)^n - 16\,(-6)^n \\ -4\,(-4)^n + 4\,(-6)^n & -15\,(-4)^n + 16\,(-6)^n & -4\,(-4)^n + 4\,(-6)^n \\ -(-4)^n + (-6)^n & -4\,(-4)^n + 4\,(-6)^n & (-6)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 83. ← page 25

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -1 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-1)^n\,L_0 + 8^nL_1 \\ &= \frac{1}{9}\cdot 8^n(X+1) - \frac{1}{9}\,(-1)^n\,(X-8) \\ &= \left(\frac{1}{9}\cdot 8^n - \frac{1}{9}\,(-1)^n\right)X + \left(\frac{1}{9}\cdot 8^n + \frac{8}{9}\,(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 8^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 8\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 8\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-1) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(8) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(8) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -2\cdot 8^n + 3\,(-1)^n & 6\cdot 8^n - 6\,(-1)^n & 0 \\ -8^n + (-1)^n & 3\cdot 8^n - 2\,(-1)^n & 0 \\ -8^n + (-1)^n & 2\cdot 8^n - 2\,(-1)^n & 8^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 84. ← page 25

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -8, 5 et 6. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-8)^n L_0 + 5^n L_1 + 6^n L_2 \\ &= \frac{1}{14}\left(X^2 + 3\,X - 40\right)6^n - \frac{1}{13}\left(X^2 + 2\,X - 48\right)5^n + \frac{1}{182}\left(X^2 - 11\,X + 30\right)(-8)^n \\ &= \left(\frac{1}{14}\cdot 6^n - \frac{1}{13}\cdot 5^n + \frac{1}{182}\,(-8)^n\right)X^2 + \left(\frac{3}{14}\cdot 6^n - \frac{2}{13}\cdot 5^n - \frac{11}{182}\,(-8)^n\right)X + \left(-\frac{20}{7}\cdot 6^n + \frac{48}{13}\cdot 5^n + \frac{15}{91}\,(-8)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-8)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 6^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 64\,a_n - 8\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-8) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(5) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(6) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-8)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-8)$, $Q(5)$ et $Q(6)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 176 & -44 & -648 \\ -56 & 47 & 246 \\ 28 & -11 & -98 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\cdot 6^n + 5\,(-8)^n & -4\cdot 6^n + 4\cdot 5^n & 12\cdot 6^n + 8\cdot 5^n - 20\,(-8)^n \\ 2\cdot 6^n - 2\,(-8)^n & 2\cdot 6^n - 5^n & -6\cdot 6^n - 2\cdot 5^n + 8\,(-8)^n \\ -6^n + (-8)^n & -6^n + 5^n & 3\cdot 6^n + 2\cdot 5^n - 4\,(-8)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 85. ← page 26

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, -2 et -1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n L_0 - L_1 - L_2 \\ &= \frac{1}{4}\left(X^2+7\,X+10\right)(-1)^n - \frac{1}{3}\left(X^2+6\,X+5\right)(-2)^n + \frac{1}{12}\left(X^2+3\,X+2\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\,(-1)^n - \frac{1}{3}\,(-2)^n + \frac{1}{12}\,(-5)^n\right)X^2 + \left(\frac{7}{4}\,(-1)^n - 2\,(-2)^n + \frac{1}{4}\,(-5)^n\right)X + \left(\frac{5}{2}\,(-1)^n - \frac{5}{3}\,(-2)^n + \frac{1}{6}\,(-5)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 4\,a_n - 2\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n - b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-2) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-1) \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(-2)$ et $Q(-1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 49 & 3 & -60 \\ 96 & 16 & -156 \\ 24 & 3 & -35 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -(-1)^n + 2\,(-5)^n & -(-1)^n + (-2)^n & 6\,(-1)^n - 4\,(-2)^n - 2\,(-5)^n \\ -4\,(-1)^n + 4\,(-5)^n & -4\,(-1)^n + 5\,(-2)^n & 24\,(-1)^n - 20\,(-2)^n - 4\,(-5)^n \\ -(-1)^n + (-5)^n & -(-1)^n + (-2)^n & 6\,(-1)^n - 4\,(-2)^n - (-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 86. ← page 26

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels 5 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 5^nL_0 + 10^nL_1 \\ &= \frac{1}{5}\cdot 10^n(X-5) - \frac{1}{5}\cdot 5^n(X-10) \\ &= \left(\frac{1}{5}\cdot 10^n - \frac{1}{5}\cdot 5^n\right)X + \left(-10^n + 2\cdot 5^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^k & 0 & 0 \\ 0 & 10^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 = a_n P &\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 5\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 10\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 10\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(10) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 10^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 9 \cdot 10^n - 8 \cdot 5^n & -24 \cdot 10^n + 24 \cdot 5^n & -24 \cdot 10^n + 24 \cdot 5^n \\ 4 \cdot 10^n - 4 \cdot 5^n & -11 \cdot 10^n + 12 \cdot 5^n & -12 \cdot 10^n + 12 \cdot 5^n \\ -10^n + 5^n & 3 \cdot 10^n - 3 \cdot 5^n & 4 \cdot 10^n - 3 \cdot 5^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 87. ← page 26

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, 3 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-10)^n L_0 + 3^n L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{140}\left(X^2 + 7\,X - 30\right)10^n - \frac{1}{91}\left(X^2 - 100\right)3^n + \frac{1}{260}\left(X^2 - 13\,X + 30\right)(-10)^n \\ &= \left(\frac{1}{140} \cdot 10^n - \frac{1}{91} \cdot 3^n + \frac{1}{260}\,(-10)^n\right) X^2 + \left(\frac{1}{20} \cdot 10^n - \frac{1}{20}\,(-10)^n\right) X + \left(-\frac{3}{14} \cdot 10^n + \frac{100}{91} \cdot 3^n + \frac{3}{26}\,(-10)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(3)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 100 & 182 & -546 \\ 0 & -264 & 1092 \\ 0 & -91 & 373 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^n - (-10)^n & 2 \cdot 10^n - 2 \cdot 3^n & -4 \cdot 10^n + 6 \cdot 3^n - 2\,(-10)^n \\ -3 \cdot 10^n + 3\,(-10)^n & -3 \cdot 10^n + 4 \cdot 3^n & 6 \cdot 10^n - 12 \cdot 3^n + 6\,(-10)^n \\ -10^n + (-10)^n & -10^n + 3^n & 2 \cdot 10^n - 3 \cdot 3^n + 2\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 88. ← page 27

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -5, 6 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n\, L_0 + 6^n L_1 + 9^n L_2 \\ &= \frac{1}{42}\left(X^2 - X - 30\right)9^n - \frac{1}{33}\left(X^2 - 4\,X - 45\right)6^n + \frac{1}{154}\left(X^2 - 15\,X + 54\right)(-5)^n \\ &= \left(\frac{1}{42} \cdot 9^n - \frac{1}{33} \cdot 6^n + \frac{1}{154}\,(-5)^n\right) X^2 + \left(-\frac{1}{42} \cdot 9^n + \frac{4}{33} \cdot 6^n - \frac{15}{154}\,(-5)^n\right) X + \left(-\frac{5}{7} \cdot 9^n + \frac{15}{11} \cdot 6^n + \frac{27}{77}\,(-5)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & 6^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 25\,a_n - 5\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 81\,a_n + 9\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(6) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-5)$, $Q(6)$ et $Q(9)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 81 & 45 & -180 \\ -224 & -144 & 676 \\ -56 & -45 & 205 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 9^n & 9^n - 6^n & -4 \cdot 9^n + 4 \cdot 6^n \\ -4 \cdot 9^n + 4\,(-5)^n & -4 \cdot 9^n + 5 \cdot 6^n & 16 \cdot 9^n - 20 \cdot 6^n + 4\,(-5)^n \\ -9^n + (-5)^n & -9^n + 6^n & 4 \cdot 9^n - 4 \cdot 6^n + (-5)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 89. ← page 27

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels 0, 4 et 7. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 4^nL_1 + 7^nL_2 \\ &= \frac{1}{21}\,(X^2 - 4\,X)7^n - \frac{1}{12}\,(X^2 - 7\,X)4^n \\ &= \left(\frac{1}{21} \cdot 7^n - \frac{1}{12} \cdot 4^n\right) X^2 + \left(-\frac{4}{21} \cdot 7^n + \frac{7}{12} \cdot 4^n\right) X + (0)\,. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 7^k \end{pmatrix} P^{-1}$ et : $A^0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} Q\,(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(7) \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(0)$, $Q(4)$ et $Q(7)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 196 & 132 & 1116 \\ 196 & 148 & 1180 \\ -49 & -33 & -279 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 4\cdot 7^n & 4\cdot 7^n - 4\cdot 4^n & 28\cdot 7^n - 16\cdot 4^n \\ 4\cdot 7^n & 4\cdot 7^n - 3\cdot 4^n & 28\cdot 7^n - 12\cdot 4^n \\ -7^n & -7^n + 4^n & -7\cdot 7^n + 4\cdot 4^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 90. ← page 27

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -7, 3 et 4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-7)^n\,L_0 + 3^nL_1 + 4^nL_2 \\
&= \frac{1}{11}\left(X^2 + 4\,X - 21\right)4^n - \frac{1}{10}\left(X^2 + 3\,X - 28\right)3^n + \frac{1}{110}\left(X^2 - 7\,X + 12\right)(-7)^n \\
&= \left(\frac{1}{11}\cdot 4^n - \frac{1}{10}\cdot 3^n + \frac{1}{110}\,(-7)^n\right)X^2 + \left(\frac{4}{11}\cdot 4^n - \frac{3}{10}\cdot 3^n - \frac{7}{110}\,(-7)^n\right)X + \left(-\frac{21}{11}\cdot 4^n + \frac{14}{5}\cdot 3^n + \frac{6}{55}\,(-7)^n\right).
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-7)^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-7) & 0 & 0 \\ 0 & Q(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-7)$, $Q(3)$ et $Q(4)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -50 & 21 & -240 \\ 66 & -5 & 240 \\ 33 & -7 & 129 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4^n - 2\,(-7)^n & 3 \cdot 4^n - 3 \cdot 3^n & 6 \cdot 3^n - 6\,(-7)^n \\ -2 \cdot 4^n + 2\,(-7)^n & -2 \cdot 4^n + 3 \cdot 3^n & -6 \cdot 3^n + 6\,(-7)^n \\ -4^n + (-7)^n & -4^n + 3^n & -2 \cdot 3^n + 3\,(-7)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 91. ← page 28

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -6 et 9. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-6)^n\, L_0 + 9^n L_1 \\ &= \frac{1}{15} \cdot 9^n (X+6) - \frac{1}{15}\,(-6)^n\,(X-9) \\ &= \left(\frac{1}{15} \cdot 9^n - \frac{1}{15}\,(-6)^n \right) X + \left(\frac{2}{5} \cdot 9^n + \frac{3}{5}\,(-6)^n \right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-6)^k & 0 & 0 \\ 0 & 9^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3 = a_nP \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -6\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 9\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-6) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(9) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(9) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-6)^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 9^n - 5\,(-6)^n & 10 \cdot 9^n - 10\,(-6)^n & 20 \cdot 9^n - 20\,(-6)^n \\ -9^n + (-6)^n & -9^n + 2\,(-6)^n & -4 \cdot 9^n + 4\,(-6)^n \\ -9^n + (-6)^n & -2 \cdot 9^n + 2\,(-6)^n & -3 \cdot 9^n + 4\,(-6)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 92. ← page 28

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -2, 0 et 1. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-2)^n\,L_0 + L_2 \\ &= \frac{1}{6}\left(X^2 - X\right)(-2)^n + \frac{1}{3}\,X^2 + \frac{2}{3}\,X \\ &= \left(\frac{1}{6}\,(-2)^n + \frac{1}{3}\right)X^2 + \left(-\frac{1}{6}\,(-2)^n + \frac{2}{3}\right)X + (0)\,. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et : $A^0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 = a_nP \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 4\,a_n - 2\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & c_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n + b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-2) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(0) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(1) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-2)$, $Q(0)$ et $Q(1)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -24 \\ 6 & -2 & 24 \\ 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -2\,(-2)^n + 3 & 3 & -6\,(-2)^n \\ 2\,(-2)^n - 2 & -2 & 6\,(-2)^n \\ (-2)^n - 1 & -1 & 3\,(-2)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 93. ← page 28

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1) associés aux réels -5 et -4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-5)^n L_0 - L_1 \\ &= (-4)^n (X+5) - (-5)^n (X+4) \\ &= ((-4)^n - (-5)^n)\, X + (5\,(-4)^n - 4\,(-5)^n). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n et b_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X + b_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-5)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3 = a_n P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} -5\,a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -5\,a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & -4\,a_n + b_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} Q(-5) & 0 & 0 \\ 0 & Q(-5) & 0 \\ 0 & 0 & Q(-4) \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-5)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ = A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, A et I_3 sont explicites, il suffit de les remplacer par leurs expressions, et de simplifier. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3\,(-4)^n + 4\,(-5)^n & -3\,(-4)^n + 3\,(-5)^n & -3\,(-4)^n + 3\,(-5)^n \\ 3\,(-4)^n - 3\,(-5)^n & 3\,(-4)^n - 2\,(-5)^n & 3\,(-4)^n - 3\,(-5)^n \\ (-4)^n - (-5)^n & (-4)^n - (-5)^n & (-4)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 94. ← page 28

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -3, 4 et 10. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-3)^n L_0 + 4^n L_1 + 10^n L_2 \\ &= \frac{1}{78}\left(X^2 - X - 12\right)10^n - \frac{1}{42}\left(X^2 - 7\,X - 30\right)4^n + \frac{1}{91}\left(X^2 - 14\,X + 40\right)(-3)^n \\ &= \left(\frac{1}{78}\cdot 10^n - \frac{1}{42}\cdot 4^n + \frac{1}{91}\,(-3)^n\right)X^2 + \left(-\frac{1}{78}\cdot 10^n + \frac{1}{6}\cdot 4^n - \frac{2}{13}\,(-3)^n\right)X + \left(-\frac{2}{13}\cdot 10^n + \frac{5}{7}\cdot 4^n + \frac{40}{91}\,(-3)^n\right). \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 10^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a_n + 4\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 100\,a_n + 10\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(-3) & 0 & 0 \\ 0 & Q(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q(10) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-3)$, $Q(4)$ et $Q(10)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 282 & 252 & 1050 \\ 182 & 184 & 714 \\ -91 & -84 & -341 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 10^n - 2\,(-3)^n & 3\cdot 10^n - 3\cdot 4^n & 12\cdot 10^n - 6\cdot 4^n - 6\,(-3)^n \\ 2\cdot 10^n - 2\,(-3)^n & 2\cdot 10^n - 4^n & 8\cdot 10^n - 2\cdot 4^n - 6\,(-3)^n \\ -10^n + (-3)^n & -10^n + 4^n & -4\cdot 10^n + 2\cdot 4^n + 3\,(-3)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 95. ← page 29

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels 0, 6 et 7. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= 6^n L_1 + 7^n L_2 \\ &= \frac{1}{7}\left(X^2 - 6\,X\right)7^n - \frac{1}{6}\left(X^2 - 7\,X\right)6^n \\ &= \left(\frac{1}{7}\cdot 7^n - \frac{1}{6}\cdot 6^n\right)X^2 + \left(-\frac{6}{7}\cdot 7^n + \frac{7}{6}\cdot 6^n\right)X + (0)\,. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^k & 0 \\ 0 & 0 & 7^k \end{pmatrix} P^{-1}$ et : $A^0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

   On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} c_n & 0 & 0 \\ 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 49\,a_n + 7\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q(6) & 0 \\ 0 & 0 & Q(7) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

   d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(0)$, $Q(6)$ et $Q(7)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -98 & -26 & 398 \\ -196 & -16 & 652 \\ -49 & -13 & 199 \end{pmatrix}.$$

   Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -2 \cdot 7^n & -2 \cdot 7^n + 2 \cdot 6^n & 14 \cdot 7^n - 8 \cdot 6^n \\ -4 \cdot 7^n & -4 \cdot 7^n + 5 \cdot 6^n & 28 \cdot 7^n - 20 \cdot 6^n \\ -7^n & -7^n + 6^n & 7 \cdot 7^n - 4 \cdot 6^n \end{pmatrix}.$$

   Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 96. ← page 29

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -3, 6 et 8. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= (-3)^n L_0 + 6^n L_1 + 8^n L_2 \\ &= \frac{1}{22}\left(X^2 - 3\,X - 18\right)8^n - \frac{1}{18}\left(X^2 - 5\,X - 24\right)6^n + \frac{1}{99}\left(X^2 - 14\,X + 48\right)(-3)^n \\ &= \left(\frac{1}{22} \cdot 8^n - \frac{1}{18} \cdot 6^n + \frac{1}{99}\,(-3)^n\right) X^2 + \left(-\frac{3}{22} \cdot 8^n + \frac{5}{18} \cdot 6^n - \frac{14}{99}\,(-3)^n\right) X + \left(-\frac{9}{11} \cdot 8^n + \frac{4}{3} \cdot 6^n + \frac{16}{33}\,(-3)^n\right). \end{aligned}$$

   Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 6^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 9\,a_n - 3\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 36\,a_n + 6\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 64\,a_n + 8\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q\,(-3) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(6) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(8) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-3)$, $Q(6)$ et $Q(8)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -156 & -84 & 576 \\ 55 & 64 & -165 \\ -55 & -28 & 201 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -3 \cdot 8^n + 4\,(-3)^n & -3 \cdot 8^n + 3 \cdot 6^n & 9 \cdot 8^n + 3 \cdot 6^n - 12\,(-3)^n \\ 8^n - (-3)^n & 8^n & -3 \cdot 8^n + 3\,(-3)^n \\ -8^n + (-3)^n & -8^n + 6^n & 3 \cdot 8^n + 6^n - 3\,(-3)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 97. ← page 29

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels 0, 1 et 3. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q &= L_1 + 3^n L_2 \\ &= \frac{1}{6}\,(X^2 - X)3^n - \frac{1}{2}\,X^2 + \frac{3}{2}\,X \\ &= \left(\frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}\right) X^2 + \left(-\frac{1}{6} \cdot 3^n + \frac{3}{2}\right) X + (0)\,. \end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}$ et : $A^0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On

en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} c_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n + b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} Q\,(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(3) \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(0)$, $Q(1)$ et $Q(3)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 27 & 24 & -18 \\ -27 & -23 & 15 \\ -9 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 3^n & 3\cdot 3^n - 3 & -3\cdot 3^n + 9 \\ -3\cdot 3^n & -3\cdot 3^n + 4 & 3\cdot 3^n - 12 \\ -3^n & -3^n + 1 & 3^n - 3 \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 98. ← page 30

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -7, 2 et 5. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-7)^n\,L_0 + 2^nL_1 + 5^nL_2 \\
&= \frac{1}{36}\left(X^2 + 5\,X - 14\right)5^n - \frac{1}{27}\left(X^2 + 2\,X - 35\right)2^n + \frac{1}{108}\left(X^2 - 7\,X + 10\right)(-7)^n \\
&= \left(\frac{1}{36}\cdot 5^n - \frac{1}{27}\cdot 2^n + \frac{1}{108}\,(-7)^n\right)X^2 + \left(\frac{5}{36}\cdot 5^n - \frac{2}{27}\cdot 2^n - \frac{7}{108}\,(-7)^n\right)X + \left(-\frac{7}{18}\cdot 5^n + \frac{35}{27}\cdot 2^n + \frac{5}{54}\,(-7)^n\right).
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-7)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}P^{-1} + b_nP\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1} + c_nP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 4\,a_n + 2\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} Q\,(-7) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(2) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(5) \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-7)$, $Q(2)$ et $Q(5)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 73 & -21 & -48 \\ 0 & 4 & 0 \\ 24 & -21 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -5^n + 2\,(-7)^n & -5^n + 2^n & 2 \cdot 5^n - 2\,(-7)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ -5^n + (-7)^n & -5^n + 2^n & 2 \cdot 5^n - (-7)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 99. ← page 30

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels -10, -7 et -4. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= (-10)^n\,L_0 - L_1 - L_2 \\
&= \frac{1}{18}\left(X^2 + 17\,X + 70\right)(-4)^n - \frac{1}{9}\left(X^2 + 14\,X + 40\right)(-7)^n + \frac{1}{18}\left(X^2 + 11\,X + 28\right)(-10)^n \\
&= \left(\frac{1}{18}\,(-4)^n - \frac{1}{9}\,(-7)^n + \frac{1}{18}\,(-10)^n\right)X^2 + \left(\frac{17}{18}\,(-4)^n - \frac{14}{9}\,(-7)^n + \frac{11}{18}\,(-10)^n\right)X + \left(\frac{35}{9}\,(-4)^n - \frac{40}{9}\,(-7)^n + \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-10)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix} P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3 &= a_nP \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} + b_nP \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} + c_nP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 100\,a_n - 10\,b_n + c_n & 0 & 0 \\ 0 & 49\,a_n - 7\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 16\,a_n - 4\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(-10) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(-7) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(-4) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} (-10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(-10)$, $Q(-7)$ et $Q(-4)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_nA^2 + b_nA + c_n\mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 436 & 132 & -2076 \\ 252 & 148 & -1404 \\ 84 & 33 & -419 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4\,(-4)^n + 5\,(-10)^n & -4\,(-4)^n + 4\,(-7)^n & 32\,(-4)^n - 12\,(-7)^n - 20\,(-10)^n \\ -3\,(-4)^n + 3\,(-10)^n & -3\,(-4)^n + 4\,(-7)^n & 24\,(-4)^n - 12\,(-7)^n - 12\,(-10)^n \\ -(-4)^n + (-10)^n & -(-4)^n + (-7)^n & 8\,(-4)^n - 3\,(-7)^n - 4\,(-10)^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.

Corrigé 100. ← page 30

1. Pour trouver Q, on raisonne comme dans le premier exercice, en introduisant les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux réels 0, 3 et 5. Nous ne reproduisons pas le détail du raisonnement : les calculs sont exactement les mêmes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
Q &= 3^nL_1 + 5^nL_2 \\
&= \frac{1}{10}\left(X^2 - 3\,X\right)5^n - \frac{1}{6}\left(X^2 - 5\,X\right)3^n \\
&= \left(\frac{1}{10} \cdot 5^n - \frac{1}{6} \cdot 3^n\right)X^2 + \left(-\frac{3}{10} \cdot 5^n + \frac{5}{6} \cdot 3^n\right)X + (0)\,.
\end{aligned}$$

Pour abréger, on note ci-dessous a_n, b_n et c_n les coefficients de Q, de sorte qu'avec ces notations, on ait : $Q = a_nX^2 + b_nX + c_n$.

2. On sait qu'on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix} P^{-1}$ et : $A^0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3 &= a_n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} P^{-1} + b_n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1} + c_n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} c_n & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a_n + 3\,b_n + c_n & 0 \\ 0 & 0 & 25\,a_n + 5\,b_n + c_n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} Q\,(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q\,(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q\,(5) \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Pour reconnaître plus facilement $Q(0)$, $Q(3)$ et $Q(5)$, ne simplifiez pas les carrés, et laissez-les sous la forme « $\bigstar^2$ », au contraire de ce que fait la machine ci-dessus ; j'ai manqué de temps pour lui contraindre l'écriture que je voulais.)

3. On a explicitement calculé Q dans la première question. On a, avec les notations qui y furent introduites : $Q(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$. Puisque a_n, b_n, c_n, A et I_3 sont explicites, il ne reste plus qu'à calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -100 & -64 & 244 \\ 100 & 73 & -208 \\ -25 & -16 & 61 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tout remplacer par son expression, et à simplifier, pour obtenir $Q(A)$. On obtient alors :

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -4 \cdot 5^n & -4 \cdot 5^n + 4 \cdot 3^n & 4 \cdot 5^n + 16 \cdot 3^n \\ 4 \cdot 5^n & 4 \cdot 5^n - 3 \cdot 3^n & -4 \cdot 5^n - 12 \cdot 3^n \\ -5^n & -5^n + 3^n & 5^n + 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = Q(A)$ d'après la question précédente, donc l'égalité ci-dessus donne l'expression explicite de A^n : d'où le résultat.