Intégration terme à terme et théorème de convergence dominée (guidé)

Exercice d'intégration terme à terme : on développe en série l'intégrande et on justifie qu'il est possible d'intervertir les symboles somme et intégrale. On a ici besoin du théorème de convergence dominée.

Exercice 1. → page 20

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 2. → page 21

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(2x) \, \mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(2x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n^2+4}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(2x)}{1-e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^2+4}.$$

Exercice 3. → page 22

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x) \, \mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1-e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1}.$$

Exercice 4. Démontrer la relation : → page 24

$$\int_0^1 \frac{x^{403}}{x^3+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+404}.$$

Exercice 5. Démontrer la relation : → page 25

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{25}+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{25n+1}.$$

Exercice 6. → page 26

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^9}{x+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+10}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+10} = -\ln(2) + \frac{1879}{2520}.$$

Exercice 7. → page 27

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9\,n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 8. → page 29

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{x^{29}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+30}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+30} = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{237371}{720720}.$$

Exercice 9. → page 31

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 10. → page 32

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}.$$

Exercice 11. → page 34

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{x^{185}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+186}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+186} = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{98865207494361758778055982524017553807}{287506701978195782121788902826030117760}.$$

Exercice 12. → page 35

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{x^{307}}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+308}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+308} = -\ln(2) + \frac{192279736408770868682043205343882539126947142237558076771950211167388666811532532162424}{27675180688974730933621790872012309984638221725400151391243674404050974304313827336183}$$

Exercice 13. → page 36

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 14. → page 37

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(14\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(14\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{n^2+196}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(14\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{14}{(n+1)^2+196}.$$

Exercice 15. → page 39

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^8}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+9}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+9} = \ln(2) - \frac{533}{840}.$$

Exercice 16. → page 41

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = -\ln(2) + 1.$$

Exercice 17. → page 42

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^{89}}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+90}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+90} = -\ln(2) + \frac{1004452962198643716327652353862071151 99}{143753350989097891060894451413015058880}.$$

Exercice 18. → page 43

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9\,n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 19. → page 45

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-11\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-11\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{121\,n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-11\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-11\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{121\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 20. Démontrer la relation : → page 47

$$\int_0^1 \frac{x^7}{x^3+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+8}.$$

Exercice 21. → page 48

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 22. Démontrer la relation : → page 49

$$\int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+6}.$$

Grâce à l'identité que nous venons de démontrer, nous pourrions obtenir la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+6}$.
Pour cela, il suffit de calculer explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}\mathrm{d}x$. C'est possible grâce à une décomposition en éléments simples (pénible), mais ce n'est pas exigé. On trouverait alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+6} = -\frac{1}{3}\ln(2)+\frac{1}{3}.$$

Exercice 23. Démontrer la relation : → page 50

$$\int_0^1 \frac{x^6}{x^{67}+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{67\,n+7}.$$

Exercice 24. → page 51

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3\,(n^2+1)}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)} \sin(3\,x)}{1 - e^{(-3\,x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3\left((n+1)^2 + 1\right)}.$$

Exercice 25. Démontrer la relation : → page 53

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^{11} + 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{11\,n + 1}.$$

Exercice 26. → page 54

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^{1} \frac{1}{x + 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} = \ln(2).$$

Exercice 27. → page 55

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^{1} \frac{x^{96}}{x + 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 97}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 97} = \ln(2) - \frac{98897413912101176502959976158939147221}{143753350989097891060894451413015058880}.$$

Exercice 28. → page 56

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,n^2 + 1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{1 + e^{(-2\,x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2 + 1}.$$

Exercice 29. Démontrer la relation : → page 58

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^{7} + 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{7\,n + 1}.$$

Exercice 30. → page 59

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^{1} \frac{x^{10}}{x + 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 11}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 11} = \ln(2) - \frac{1627}{2520}.$$

Exercice 31. → page 60

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 32. → page 62

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(6\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(6\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{n^2+36}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(n+1)^2+36}.$$

Exercice 33. → page 64

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 34. → page 66

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1}.$$

Exercice 35. → page 68

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 36. → page 70

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 37. → page 71

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+6}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+6} = -\ln(2) + \frac{47}{60}.$$

Exercice 38. → page 72

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 39. → page 74

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+4} = -\ln(2) + \frac{5}{6}.$$

Exercice 40. → page 76

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 41. Démontrer la relation : → page 77

$$\int_0^1 \frac{x^{15}}{x^5+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+16}.$$

Exercice 42. → page 78

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{x^7}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+8}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+8} = -\ln(2) + \frac{319}{420}.$$

Exercice 43. → page 79

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+4}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(4\,x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2+4}.$$

Exercice 44. → page 81

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(6\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(6\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{n^2+36}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(n+1)^2+36}.$$

Exercice 45. → page 83

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = -\ln(2) + 1.$$

Exercice 46. → page 84

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+2}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+2} = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 47. Démontrer la relation : → page 85
$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+1}.$$

Grâce à l'identité que nous venons de démontrer, nous pourrions obtenir la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+1}$.

Pour cela, il suffit de calculer explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$. C'est possible grâce à une décomposition en éléments simples (pénible), mais ce n'est pas exigé. On trouverait alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{3}\ln(2)\,.$$

Exercice 48. → page 86

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9\,n^2+4}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n}{9\,(n+1)^2+4}.$$

Exercice 49. Démontrer la relation : → page 88

$$\int_0^1 \frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+2}.$$

Grâce à l'identité que nous venons de démontrer, nous pourrions obtenir la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+2}$.

Pour cela, il suffit de calculer explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x$. C'est possible grâce à une décomposition en éléments simples (pénible), mais ce n'est pas exigé. On trouverait alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+2} = \frac{1}{20}\sqrt{2\sqrt{5}+10}\left(\sqrt{5}-1\right)\arctan\left(\frac{1}{20}\left(3\sqrt{5}-5\right)\sqrt{2\sqrt{5}+10}\right)+\frac{1}{20}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{-2\sqrt{5}+10}\,\arctan\left(\frac{1}{20}\left(3\sqrt{5}+5\right)\sqrt{\cdots}\right.$$

Exercice 50. Démontrer la relation : → page 89

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^8+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{8\,n+3}.$$

Grâce à l'identité que nous venons de démontrer, nous pourrions obtenir la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{8\,n+3}$.

Pour cela, il suffit de calculer explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^8+1}\mathrm{d}x$. C'est possible grâce à une décomposition en éléments simples (pénible), mais ce n'est pas exigé. On trouverait alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{8\,n+3} = -\frac{\left(\left(114243\sqrt{2}-161564\right)\ln\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{14\sqrt{2}+20}+2\right)-\left(114243\sqrt{2}-161564\right)\ln\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{14\sqrt{2}+20}+2\right)\right)\sqrt{14\cdots}}{\cdots}$$

Exercice 51. → page 90

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9\,n^2+4}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)} \sin(2\,x)}{1-e^{(-3\,x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{9\,(n+1)^2+4}.$$

Exercice 52. → page 92

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3\,(n^2+1)}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)} \sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3\left((n+1)^2+1\right)}.$$

Exercice 53. → page 94

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^{1} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)\,.$$

Exercice 54. Démontrer la relation : → page 95

$$\int_0^{1} \frac{x^{12}}{x^9+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9\,n+13}.$$

Exercice 55. → page 96

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{n^2+9}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(3\,x)}{1+e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\,(-1)^n}{(n+1)^2+9}.$$

Exercice 56. → page 98

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^{1} \frac{x^2}{x+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

Exercice 57. → page 99

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^{1} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 58. Démontrer la relation : → page 100

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{34}+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{34\,n+1}.$$

Exercice 59. → page 101

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+5}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+5} = \frac{1}{4}\,\pi - \frac{2}{3}.$$

Exercice 60. → page 102

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1}.$$

Exercice 61. → page 104

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^{136}}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+137}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+137} = \ln(2) - \frac{1206143747993912224689395318112329572972743801162877350361}{1749342047920660916901891145781670987072592322134428432000}.$$

Exercice 62. Démontrer la relation : → page 106

$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+2}.$$

Grâce à l'identité que nous venons de démontrer, nous pourrions obtenir la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+2}$.

Pour cela, il suffit de calculer explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$. C'est possible grâce à une décomposition en éléments simples (pénible), mais ce n'est pas exigé. On trouverait alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+2} = \frac{1}{9}\,\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3}\,\ln(2).$$

Exercice 63. → page 107

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-6\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-6\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{36\,n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-6\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-6\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{36\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 64. → page 109

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-167\,nx)} \sin(6\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-167\,nx)} \sin(6\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{27889\,n^2+36}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-167\,x)} \sin(6\,x)}{1+e^{(-167\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6\,(-1)^n}{27889\,(n+1)^2+36}.$$

Exercice 65. → page 111

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-9\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-9\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{81\,n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-9\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-9\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{81\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 66. → page 113

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2+4}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(2\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^2+4}.$$

Exercice 67. → page 115

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 68. → page 116

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6\,n+3}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6\,n+3} = \frac{1}{12}\,\pi.$$

Calculer l'intégrale en reconnaissant un intégrande de la forme $\dfrac{u'}{u^2+1}$.

Exercice 69. → page 117

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)\,.$$

Exercice 70. Démontrer la relation : → page 118
$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^3+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+4}.$$

Grâce à l'identité que nous venons de démontrer, nous pourrions obtenir la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+4}$. Pour cela, il suffit de calculer explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^3+1}\mathrm{d}x$. C'est possible grâce à une décomposition en éléments simples (pénible), mais ce n'est pas exigé. On trouverait alors :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+4} = -\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3}\ln(2) + 1.$$

Exercice 71. → page 119

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)\,.$$

Exercice 72. → page 120

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4\,n^2+25}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{4\,(n+1)^2+25}.$$

Exercice 73. → page 122

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+2}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+2} = \frac{1}{2}\,\ln(2)\,.$$

Exercice 74. → page 123

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-7\,nx)}\sin(8\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-7\,nx)}\sin(8\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{49\,n^2+64}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)}{1+e^{(-7\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8\,(-1)^n}{49\,(n+1)^2+64}.$$

Exercice 75. → page 125

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9\,n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 76. → page 127

1. Démontrer la relation :
$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$
2. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)\,.$$

Exercice 77. → page 128

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2+16}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(4\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^n}{(n+1)^2+16}.$$

Exercice 78. → page 130

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(13\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(13\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{n^2+169}.$$

2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(13\,x)}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{13}{(n+1)^2 + 169}.$$

Exercice 79. → page 132

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\, \mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1 + e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 + 1}.$$

Exercice 80. Démontrer la relation : → page 134
$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+5}.$$

Grâce à l'identité que nous venons de démontrer, nous pourrions obtenir la valeur exacte de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+5}$.
Pour cela, il suffit de calculer explicitement l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1} \mathrm{d}x$. C'est possible grâce à une décomposition en éléments simples (pénible), mais ce n'est pas exigé. On trouverait alors :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+5} = -\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{2}.$$

Exercice 81. Démontrer la relation : → page 135
$$\int_0^1 \frac{1}{x^{10}+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{10\,n+1}.$$

Grâce à l'identité que nous venons de démontrer, nous pourrions obtenir la valeur exacte de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{10\,n+1}$.
Pour cela, il suffit de calculer explicitement l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{10}+1} \mathrm{d}x$. C'est possible grâce à une décomposition en éléments simples (pénible), mais ce n'est pas exigé. On trouverait alors :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{10\,n+1} = -\frac{50000\left(2\left(\sqrt{22\sqrt{5}+50}\left(\sqrt{5}-3\right)\arctan\left(\sqrt{4\sqrt{5}+2\sqrt{22\sqrt{5}+50}+11}\right) - 8\arctan\left(\sqrt{4\sqrt{5}+2\sqrt{22\sqrt{5}+50}+\right.\right.\right.}{}$$

Exercice 82. → page 136

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(x)\, \mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{9\,n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)} \sin(x)}{1 - e^{(-3\,x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9\,(n+1)^2 + 1}.$$

Exercice 83. Démontrer la relation : → page 138

$$\int_0^1 \frac{x}{x^{28}+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{28\,n+2}.$$

Exercice 84. → page 139

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 85. → page 141

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.$$

Exercice 86. → page 143

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 87. → page 144

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 88. → page 145

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^{45}}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+46}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+46} = -\ln(2) + \frac{6632660439700528339}{9419588158802421600}.$$

Exercice 89. → page 146

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(5\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(5\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{n^2+25}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(5\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{(n+1)^2+25}.$$

Exercice 90. → page 148

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-8\,nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-8\,nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,(16\,n^2+1)}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-8\,x)} \sin(2\,x)}{1+e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\left(16\,(n+1)^2+1\right)}.$$

Exercice 91. → page 150

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}.$$

Exercice 92. → page 152

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}.$$

Exercice 93. → page 154

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2+4}.$$
2. Démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(2\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n}{(n+1)^2+4}.$$

Exercice 94. → page 156

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = -\ln(2) + 1.$$

Exercice 95. → page 157

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1}.$$

Exercice 96. Démontrer la relation : → page 159

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{13}+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{13\,n+1}.$$

Exercice 97. → page 160

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-8\,nx)} \sin(9\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-8\,nx)} \sin(9\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{64\,n^2+81}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-8\,x)} \sin(9\,x)}{1-e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{64\,(n+1)^2+81}.$$

Exercice 98. → page 162

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{n^2+9}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(3\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n+1)^2+9}.$$

Exercice 99. → page 164

1. Démontrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+6}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+6} = -\ln(2) + \frac{47}{60}.$$

Exercice 100. → page 165

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,(n^2+1)}.$$

2. Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(2\,x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\left((n+1)^2+1\right)}.$$

Corrigé 1. ← page 1

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x} \quad (\textsc{hypothèse de domination}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n \mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 2. ← page 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-nx)} \sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)} \sin(2\,x)\right| \leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-2i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-2i)x)}}{-n+2i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+2i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-2i}{n^2+4}\right)\\ &= \frac{2}{n^2+4}.\end{aligned}$$
D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(2\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)} \sin(2\,x) \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^2+4},\end{aligned}$$
où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |\sin(2\,x)|\, e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(2\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(2\,x)|\, e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(2\,x)|\, e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,.$$
Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(2\,x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue

cependant d'exclure $x = 0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(2x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-x)} \sin(2x) \right| \frac{1 - (e^{(-x)})^{N+1}}{1 - e^{(-x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)} \sin(2x)\right|}{1 - e^{(-x)}} && \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)} \sin(2x)\right|}{1 - e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2 \times 2x}{x} \underset{x \to 0}{\sim} 4 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}} \underset{x \to +\infty}{\sim} 2e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N \to +\infty} S_N(x) \mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N \to +\infty} S_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(2x)}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) \mathrm{d}x &= \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)} \sin(2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^2 + 4}. \end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(2x)}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^2 + 4}$.

Corrigé 3. ← page 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-nx)} \sin(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)} \sin(x)\right| \leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par

le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\, \mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\, \mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-i)x)} \mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-i)x)}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-i}{n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}} \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)} \sin(x).$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x = 0$, même si on remarque qu'en $x = 0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x = 0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-x)} \sin(x) \right| \frac{1 - (e^{(-x)})^{N+1}}{1 - e^{(-x)}} \\
&\leqslant \frac{2 \left| e^{(-x)} \sin(x) \right|}{1 - e^{(-x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination)}.
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)} \sin(x)\right|}{1 - e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2 \times x}{x} \underset{x \to 0}{\sim} 2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\, e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\, e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}} \underset{x \to +\infty}{\sim} 2\, e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\, e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N \to +\infty} S_N(x) \mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N \to +\infty} S_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) \mathrm{d}x &= \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + 1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$.

Corrigé 4. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 1

$$\int_0^1 \frac{x^{403}}{x^3 + 1} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{403} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^3)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{3n+403} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{3n+404}}{3n+404} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+404},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^3+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3\,n+404}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{3\,n+403}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3\,n+404}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+403}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3\,n+403} = \frac{x^{403}}{x^3+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^3 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^{403}\sum_{n=0}^{N}\left(-x^3\right)^n\right| = x^{403}\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3} \leqslant \frac{2x^{403}}{1+x^3} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^{403}}{1+x^3}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{403}}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+403}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+403}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+403}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+404}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+404} = \int_0^1 \frac{x^{403}}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 5. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{25}+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{25})^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{25\,n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{25\,n+1}}{25\,n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{25\,n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^{25}+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{25\,n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{25\,n}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{25\,n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0{,}1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{25\,n}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{25\,n} = \frac{1}{x^{25}+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^{25}\in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}\left(-x^{25}\right)^n\right| = \frac{1-(-x^{25})^{N+1}}{1+x^{25}} \leqslant \frac{2}{1+x^{25}} \qquad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2}{1+x^{25}}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{25}+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{25\,n}\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{25\,n}\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{25\,n}\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{25\,n+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{25\,n+1} = \int_0^1 \frac{1}{x^{25}+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 6. ← page 1

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^9}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^9\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{n+9}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+10}}{n+10}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+10},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+10}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+9}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+10}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0{,}1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+9}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+9} = \dfrac{x^9}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x^9 \sum_{n=0}^{N} (-x)^n \right| = x^9 \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^9}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^9}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^9}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+9}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{n+9}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{n+9}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+10}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+10} = \int_0^1 \frac{x^9}{x+1}\mathrm{d}x.$

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^9}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x - \frac{1}{x+1} + 1 \right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1) \right]_0^1 \\
&= -\ln(2) + \frac{1879}{2520}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 7. ← page 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-3\,nx)} \sin(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $\left| e^{(-3\,nx)} \sin(x) \right| \leqslant e^{(-3\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence),

donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(3\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(3\,n-i)x)}}{-3\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-3\,n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-3\,n-i}{9\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{9\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-3\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-3\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-3\,(n+1)x)}}{3\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-3\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur

$]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-3\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-3\,x)} \sin(x) \right| \frac{1-(-e^{(-3\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-3\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left| e^{(-3\,x)} \sin(x)\right|}{1+e^{(-3\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left| e^{(-3\,x)} \sin(x)\right|}{1+e^{(-3\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-3\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9\,(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 8. ← page 2

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^{29}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{29} \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{2\,n+29}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{2\,n+30}}{2\,(n+15)}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+30},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^2+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+30}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{2\,n+29}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2\,n+30}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0{,}1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+29}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+29} = \frac{x^{29}}{x^2+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^2 \in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x^{29}\sum_{n=0}^{N}\left(-x^2\right)^n \right| = x^{29}\frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{2x^{29}}{1+x^2} \qquad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^{29}}{1+x^2}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{29}}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+29}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+29}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+29}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,(n+15)}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+30} = \int_0^1 \frac{x^{29}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

2. On simplifie l'intégrande en faisant apparaître une somme géométrique. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{29}}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 -x\frac{-1+1-x^{28}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} - x\frac{1-\left(-x^2\right)^{14}}{1-(-x^2)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} - x\sum_{k=0}^{13}(-x^2)^k\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \sum_{k=0}^{13}(-1)^{k+1}\frac{x^{2\,k+2}}{2\,k+2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{237371}{720720}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 9. ← page 2

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 10. ← page 2

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-i)x)}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-i}{n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty}=$

$\dfrac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter). Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-x)} \sin(x) \right| \frac{1-(-e^{(-x)})^{N+1}}{1+e^{(-x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}$.

Corrigé 11. ← page 2

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x^{185}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{185}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{2\,n+185}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{2\,n+186}}{2\,(n+93)}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+186},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^2+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+186}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{2\,n+185}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2\,n+186}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+185}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+185}=\frac{x^{185}}{x^2+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^2\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^{185}\sum_{n=0}^{N}\left(-x^2\right)^n\right|=x^{185}\frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\leqslant\frac{2x^{185}}{1+x^2}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2x^{185}}{1+x^2}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{185}}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+185}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+185}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+185}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,(n+93)}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+186}=\int_0^1\frac{x^{185}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

2. On simplifie l'intégrande en faisant apparaître une somme géométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{185}}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 -x\frac{-1+1-x^{184}}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}-x\frac{1-\left(-x^2\right)^{92}}{1-(-x^2)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}-x\sum_{k=0}^{91}(-x^2)^k\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}\,\ln\left(x^2+1\right)+\sum_{k=0}^{91}(-1)^{k+1}\frac{x^{2\,k+2}}{2\,k+2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\,\ln(2)-\frac{98865207494361758778055982524017553807}{287506701978195782121788902826030117760}.\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 12. ← page 2

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x^{307}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{307}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+307}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+308}}{n+308}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+308},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+308}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{n+307}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+308}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+307}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f: x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+307}=\frac{x^{307}}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x^{307} \sum_{n=0}^{N} (-x)^n \right| = x^{307} \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^{307}}{1+x} \quad (\textsc{hypothèse de domination}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^{307}}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{307}}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+307}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{n+307}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{n+307}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+308}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+308} = \int_0^1 \frac{x^{307}}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On simplifie l'intégrande en faisant apparaître une somme géométrique. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{307}}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{-1+1+x^{307}}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{1-(-x)^{307}}{1-(-x)} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x} + \sum_{k=0}^{306} (-x)^k \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\ln(x+1) + \sum_{k=0}^{306} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\
&= -\ln(2) + \frac{1922797364087708686820432053438825391269471422375580767719502111673886668115325321624 2}{2767518068897473093362179087201230998463822172540015139124367440405097430431382733618 3}
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 13. ← page 3

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 14. ← page 3

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(14\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(14\,x)\right| \leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc

par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(14\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(14\,x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-14i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-14i)x)}}{-n+14i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-n+14i}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{-n-14i}{n^2+196}\right)\\ &= \frac{14}{n^2+196}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(14\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(14\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(14\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{14}{(n+1)^2+196},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |\sin(14\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(14\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(14\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(14\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(14\,x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(14\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(14\,x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur

$]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(14\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-x)} \sin(14\,x) \right| \frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)} \sin(14\,x)\right|}{1-e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)} \sin(14\,x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 14\,x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 28 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(14\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)} \sin(14\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(14\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(14\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{14}{(n+1)^2+196}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(14\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{14}{(n+1)^2+196}$.

Corrigé 15. ← page 3

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^8}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^8 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{n+8}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{n+9}}{n+9}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+9},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+9}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+8}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+9}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+8}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+8} = \frac{x^8}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^8 \sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = x^8 \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^8}{1+x} \quad (\textsc{hypothèse de domination}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^8}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^8}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+8}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^{n+8}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{n+8}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+9}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+9} = \int_0^1 \frac{x^8}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^8}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x+1} - 1\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1 \\
&= \ln(2) - \frac{533}{840}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 16. ← page 3

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :
$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+2},$$
où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+2}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;
— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+1}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+2}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.
Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :
$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+1}.$$
Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1} = \frac{x}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :
$$|S_N(x)| = \left|x\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = x\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$
L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2x}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :
$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x,$$
et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :
$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+1}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}.\end{aligned}$$
En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+2} = \int_0^1\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1}+1\right)\mathrm{d}x \\ &= [x-\ln(x+1)]_0^1 \\ &= -\ln(2)+1.\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 17. ← page 3

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^{89}}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{89}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{n+89}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+90}}{n+90}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+90},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+90}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+89}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+90}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+89}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+89} = \frac{x^{89}}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^{89}\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = x^{89}\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^{89}}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^{89}}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{89}}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+89}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+89}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+89}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+90}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+90} = \int_0^1 \frac{x^{89}}{x+1}\mathrm{d}x.$

2. On simplifie l'intégrande en faisant apparaître une somme géométrique. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{89}}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{-1+1+x^{89}}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x}+\frac{1-(-x)^{89}}{1-(-x)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x}+\sum_{k=0}^{88}(-x)^k\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[-\ln(x+1)+\sum_{k=0}^{88}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\
&= -\ln(2)+\frac{100445296219864371632765235386207115199}{143753350989097891060894451413015058880}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 18. ← page 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-3\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,nx)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-3\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(3\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(3\,n-i)x)}}{-3\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-3\,n+i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-3\,n-i}{9\,n^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{9\,n^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-3\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-3\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-3\,(n+1)x)}}{3\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-3\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-3\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-3\,x)}\right)^n\right| \\ &= \left|e^{(-3\,x)}\sin(x)\right|\frac{1-(e^{(-3\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-3\,x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times x}{3\,x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2}{3}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(-3\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9\,(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 19. ← page 4

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-11\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-11\,nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-11\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-11\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-11\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-11\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(11\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(11\,n-i)x)}}{-11\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-11\,n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-11\,n-i}{121\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{121\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-11\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-11\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-11\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-11\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-11\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{121\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}e^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{11\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}e^{(-11\,(n+1)x)}\sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}e^{(-11\,(n+1)x)}\sin(x)=\frac{e^{(-11\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-11\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-11\,x)}\in]-1{,}1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-11\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-11\,x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-11\,x)}\sin(x)\right|\frac{1-(e^{(-11\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-11\,x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-11\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-11\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-11\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-11\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times x}{11\,x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2}{11}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-11\,x)}}{1-e^{(-11\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-11\,x)}}{1-e^{(-11\,x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(-11\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-11\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-11\,x)}}{1-e^{(-11\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$.

Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-11\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-11\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-11\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-11\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-11\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{121\,(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-11\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-11\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{121\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 20. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 4

$$\int_0^1 \frac{x^7}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^7\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{3\,n+7}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{3\,n+8}}{3\,n+8}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+8},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^3+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3\,n+8}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{3\,n+7}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3\,n+8}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+7}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3\,n+7} = \frac{x^7}{x^3+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^3\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^7\sum_{n=0}^{N}\left(-x^3\right)^n\right| = x^7\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3} \leqslant \frac{2x^7}{1+x^3}\qquad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2x^7}{1+x^3}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^7}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+7}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+7}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+7}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+8}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+8}=\int_0^1\frac{x^7}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 21. ← page 4

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0{,}1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right|=\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}\leqslant\frac{2}{1+x}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi:x\mapsto\dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 22. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 4

$$\int_0^1\frac{x^5}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^5\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{3n+5}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{3n+6}}{3(n+2)}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+6},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^3+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+6}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{3n+5}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3n+6}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3n+5}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+5}=\frac{x^5}{x^3+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^3\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^5\sum_{n=0}^{N}\left(-x^3\right)^n\right|=x^5\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}\leqslant\frac{2x^5}{1+x^3}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi:x\mapsto\dfrac{2x^5}{1+x^3}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^5}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+5}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+5}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+5}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,(n+2)}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+6}=\int_0^1\frac{x^5}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 23. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 4

$$\int_0^1\frac{x^6}{x^{67}+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^6\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{67})^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{67\,n+6}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{67\,n+7}}{67\,n+7}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{67\,n+7},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^{67}+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{67\,n+7}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{67\,n+6}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{67\,n+7}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{67\,n+6}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{67\,n+6}=\frac{x^6}{x^{67}+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^{67}\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^6\sum_{n=0}^{N}\left(-x^{67}\right)^n\right|=x^6\frac{1-(-x^{67})^{N+1}}{1+x^{67}}\leqslant\frac{2x^6}{1+x^{67}}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2x^6}{1+x^{67}}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^6}{x^{67}+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{67\,n+6}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{67\,n+6}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{67\,n+6}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{67\,n+7}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{67\,n+7}=\int_0^1\frac{x^6}{x^{67}+1}\mathrm{d}x.$

Corrigé 24. ← page 4

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)\right|\leqslant e^{(-3\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-3\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(3\,n-3i)x)}\mathrm{d}x\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(3\,n-3i)x)}}{-3\,n+3i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-3\,n+3i}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(-\frac{-3\,n-3i}{9\,n^2+9}\right) \\
&= \frac{1}{3\,(n^2+1)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-3\,x)}\right)^n\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3\left((n+1)^2+1\right)},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(3\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=$

$\left[-\dfrac{e^{(-3\,(n+1)x)}}{3\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{3\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(3\,x)|\, e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(3\,x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(3\,x) = \dfrac{e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-3\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(3\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-3\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-3\,x)} \sin(3\,x)\right| \frac{1-(e^{(-3\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-3\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}} && \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 3\,x}{3\,x} \underset{x\to 0}{\sim} 2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-3\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x$.

Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$.

Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3\left((n+1)^2+1\right)}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3\left((n+1)^2+1\right)}$.

Corrigé 25. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 5

$$\int_0^1\frac{1}{x^{11}+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{11})^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{11\,n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{11\,n+1}}{11\,n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{11\,n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^{11}+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{11\,n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{11\,n}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{11\,n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0{,}1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{11\,n}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{11\,n} = \frac{1}{x^{11}+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^{11}\in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}\left(-x^{11}\right)^n\right| = \frac{1-(-x^{11})^{N+1}}{1+x^{11}} \leqslant \frac{2}{1+x^{11}}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2}{1+x^{11}}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x^{11}+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale

permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{11\,n}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{11\,n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{11\,n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{11\,n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{11\,n+1}=\int_0^1\frac{1}{x^{11}+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 26. ← page 5

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\int_0^1|(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0{,}1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right|=\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}\leqslant\frac{2}{1+x}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 27. ← page 5

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x^{96}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{96}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+96}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+97}}{n+97}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+97},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+97}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{n+96}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+97}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+96}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+96}=\frac{x^{96}}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^{96}\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right|=x^{96}\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}\leqslant\frac{2x^{96}}{1+x}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2x^{96}}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{96}}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+96}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+96}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+96}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+97}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+97}=\int_0^1\frac{x^{96}}{x+1}\mathrm{d}x.$

2. On simplifie l'intégrande en faisant apparaître une somme géométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{96}}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 -\frac{-1+1-x^{96}}{1+x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1-(-x)^{96}}{1-(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\sum_{k=0}^{95}(-x)^k\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\ln(x+1)+\sum_{k=0}^{95}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\\ &= \ln(2)-\frac{988974139121011765029599761589391472 21}{143753350989097891060894451413015058880}.\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 28. ← page 5

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i)x)}}{-2\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i}{4\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-2\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|\frac{1-(-e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-2\,x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times x}{2}\underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 29. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 5

$$\int_0^1 \frac{1}{x^7+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^7)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{7\,n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{7\,n+1}}{7\,n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{7\,n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^7+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{7\,n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 \left|(-1)^n x^{7\,n}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{7\,n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{7\,n}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{7\,n} = \frac{1}{x^7+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^7 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N} \left(-x^7\right)^n\right| = \frac{1-(-x^7)^{N+1}}{1+x^7} \leqslant \frac{2}{1+x^7} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^7}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim\limits_{N\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^7+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{7\,n}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{7\,n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{7\,n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{7\,n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{7\,n+1} = \int_0^1 \frac{1}{x^7+1}\mathrm{d}x.$

Corrigé 30. ← page 5

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^{10}}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{10}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{n+10}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+11}}{n+11}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+11},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+11}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+10}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+11}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+10}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+10} = \frac{x^{10}}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^{10}\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = x^{10}\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^{10}}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^{10}}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{10}}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+10}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+10}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+10}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+11}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+11} = \int_0^1 \frac{x^{10}}{x+1}\mathrm{d}x.$

2. On simplifie l'intégrande en faisant apparaître une somme géométrique. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{10}}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 -\frac{-1+1-x^{10}}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^{10}}{1-(-x)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{9}(-x)^k\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln(x+1) + \sum_{k=0}^{9}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\
&= \ln(2) - \frac{1627}{2520}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 31. ← page 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i)x)}}{-2\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{-2\,n-i}{4\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-2\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|\frac{1-(-e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-2\,x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 32. ← page 6

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(6\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(6\,x)\right| \leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x$ converge

absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(6\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-6i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-6i)x)}}{-n+6i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+6i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-6i}{n^2+36}\right)\\ &= \frac{6}{n^2+36}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(6\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{(n+1)^2+36},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(6\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(6\,x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(6\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(6\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-x)}\sin(6\,x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-x)}\sin(6\,x)\right|\frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(6\,x)\right|}{1-e^{(-x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination)}.\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(6\,x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 6\,x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 12 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{(n+1)^2+36}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{(n+1)^2+36}$.

Corrigé 33. ← page 6

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i)x)}}{-2\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i}{4\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-2\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|\frac{1-(-e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-2\,x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination)}.\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 34. ← page 6

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge

absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-i)x)}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-i}{n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}e^{(-(n+1)x)}\sin(x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-x)}\sin(x)\right|\frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2+1}$.

Corrigé 35. ← page 6

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i)x)}}{-2\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i}{4\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-2\,x)}\in]-1{,}1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|\frac{1-(e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-2\,x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-2\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2\,x} \underset{x\to 0}{\sim} 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4\,(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 36. ← page 6

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^n\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| \sum_{n=0}^{N} (-x)^n \right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x} \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.$$

L'application $\varphi : x \mapsto \frac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^n \mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 37. ← page 7

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^5 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{n+5} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{n+6}}{n+6} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+6},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+6}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+5}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+6}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0{,}1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+5}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+5} = \frac{x^5}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x^5 \sum_{n=0}^{N} (-x)^n \right| = x^5 \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^5}{1+x} \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.$$

L'application $\varphi : x \mapsto \frac{2x^5}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+5}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{n+5}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{n+5}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+6}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+6} = \int_0^1 \frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^4 - x^3 + x^2 - x - \frac{1}{x+1} + 1 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1) \right]_0^1 \\
&= -\ln(2) + \frac{47}{60}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 38.

← page 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i)x)}}{-2\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i}{4\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur

$]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-2\,x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \right| \frac{1-(e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-2\,x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-2\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2\,x} \underset{x\to 0}{\sim} 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4\,(n+1)^2+1}. \end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 39. ← page 7

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+3}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+4}}{n+4}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+4},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+4}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+3}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+4}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+3}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+3} = \frac{x^3}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^3 \sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = x^3\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^3}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^3}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+3}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+3}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+3}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+4} = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^2 - x - \frac{1}{x+1} + 1\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1)\right]_0^1 \\
&= -\ln(2) + \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 40. ← page 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-2\,nx)} \sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)} \sin(x)\right| \leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i)x)}}{-2\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{-2\,n-i}{4\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,n^2+1}.\end{aligned}$$
D'où le résultat.
2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-2\,x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$
où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x).$$
Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{1-e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-2\,x)} \in]-1{,}1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x = 0$, même si on remarque qu'en $x = 0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue

cependant d'exclure $x = 0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-2\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \right| \frac{1 - (e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1 - e^{(-2\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \right|}{1 - e^{(-2\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \right|}{1 - e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2 \times x}{2\,x} \underset{x\to 0}{\sim} 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1 - e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-2\,x)}}{1 - e^{(-2\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1 - e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{1 - e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(n+1)^2 + 1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{1 - e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(n+1)^2 + 1}$.

Corrigé 41. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 7

$$\int_0^1 \frac{x^{15}}{x^5 + 1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{15} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^5)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{5\,n+15}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{5\,n+16}}{5\,n+16} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+16},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^5+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{5\,n+16}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{5\,n+15}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{5\,n+16}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0{,}1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{5\,n+15}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{5\,n+15} = \frac{x^{15}}{x^5+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^5 \in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x^{15}\sum_{n=0}^{N}\left(-x^5\right)^n \right| = x^{15}\frac{1-(-x^5)^{N+1}}{1+x^5} \leqslant \frac{2x^{15}}{1+x^5} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^{15}}{1+x^5}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{15}}{x^5+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{5\,n+15}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{5\,n+15}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{5\,n+15}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{5\,n+16}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{5\,n+16} = \int_0^1 \frac{x^{15}}{x^5+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 42. ← page 7

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^7}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^7\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+7}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+8}}{n+8}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+8},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+8}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+7}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+8}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0{,}1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+7}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+7} = \frac{x^7}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^7\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = x^7\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^7}{1+x}\quad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2x^7}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^7}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+7}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+7}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+7}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+8}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+8} = \int_0^1\frac{x^7}{x+1}\mathrm{d}x.$

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^7}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x-\frac{1}{x+1}+1\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)\right]_0^1\\ &= -\ln(2)+\frac{319}{420}.\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 43. ← page 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(4\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(4\,x)\right| \leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,nx)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-4i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-4i)x)}}{-2\,n+4i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+4i}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{-2\,n-4i}{4\,n^2+16}\right)\\ &= \frac{1}{n^2+4}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(4\,x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\,x)}\sin(4\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+4},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(4\,x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(4\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(4\,x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(4\,x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(4\,x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(4\,x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(4\,x)}{1+e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur

$]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-2x)} \sin(4x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-2x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-2x)} \sin(4x) \right| \frac{1-(-e^{(-2x)})^{N+1}}{1+e^{(-2x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-2x)}\sin(4x)\right|}{1+e^{(-2x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-2x)}\sin(4x)\right|}{1+e^{(-2x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 4x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} 4x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2e^{(-2x)}}{1+e^{(-2x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2e^{(-2x)}}{1+e^{(-2x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{(-2x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2e^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2e^{(-2x)}}{1+e^{(-2x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2x)}\sin(4x)}{1+e^{(-2x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{(-2(n+1)x)} \sin(4x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} (-1)^n e^{(-2(n+1)x)} \sin(4x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{(-2(n+1)x)} \sin(4x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2+4}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2x)}\sin(4x)}{1+e^{(-2x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2+4}$.

Corrigé 44. ← page 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-nx)}\sin(6x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(6x)\right| \leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(6x)\,\mathrm{d}x$ converge

absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-6i)x)}\mathrm{d}x\right)\\&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-6i)x)}}{-n+6i}\right]_0^{+\infty}\right)\\&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+6i}\right)\\&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-6i}{n^2+36}\right)\\&= \frac{6}{n^2+36}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(6\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x\\&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{(n+1)^2+36},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(6\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(6\,x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(6\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(6\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-x)}\sin(6\,x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-x)}\right)^n\right|\\&= \left|e^{(-x)}\sin(6\,x)\right|\frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}}\\&\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(6\,x)\right|}{1-e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(6\,x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 6\,x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 12 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{(n+1)^2+36}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(6\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{(n+1)^2+36}$.

Corrigé 45. ← page 8

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+2},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+2}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{n+1}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+2}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0{,}1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+1}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+1} = \frac{x}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x \sum_{n=0}^{N} (-x)^n \right| = x \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+1}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + 1\right)\mathrm{d}x \\
&= [x - \ln(x+1)]_0^1 \\
&= -\ln(2) + 1.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 46. ← page 8

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{2n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2(n+1)} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^2+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+2}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{2\,n+1}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2\,n+2}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+1}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+1} = \frac{x}{x^2+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^2 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x \sum_{n=0}^{N}\left(-x^2\right)^n \right| = x\frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+1}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+1}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+1}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,(n+1)}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+2} = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 47. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 8

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{3\,n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{3\,n+1}}{3\,n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^3+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3\,n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{3\,n}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{3\,n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3\,n} = \dfrac{1}{x^3+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^3 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}\left(-x^3\right)^n\right| = \frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3} \leqslant \frac{2}{1+x^3} \qquad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^3}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3\,n+1} = \int_0^1 \dfrac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 48. ← page 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)\right| \leqslant e^{(-3\,nx)}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$

converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(3\,n-2i)x)}\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(3\,n-2i)x)}}{-3\,n+2i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-3\,n+2i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-3\,n-2i}{9\,n^2+4}\right) \\
&= \frac{2}{9\,n^2+4}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-3\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^n}{9\,(n+1)^2+4},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |\sin(2\,x)|\, e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(2\,x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty} |\sin(2\,x)|\, e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-3\,(n+1)x)}}{3\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty} |\sin(2\,x)|\, e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(2\,x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(2\,x) = \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-3\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-3\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur

$]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(2\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-3\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-3\,x)} \sin(2\,x) \right| \frac{1-(-e^{(-3\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-3\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left| e^{(-3\,x)} \sin(2\,x)\right|}{1+e^{(-3\,x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination)}.
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left| e^{(-3\,x)} \sin(2\,x)\right|}{1+e^{(-3\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 2\,x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} 2\,x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-3\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$.
Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n}{9\,(n+1)^2+4}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n}{9\,(n+1)^2+4}$.

Corrigé 49. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 9

$$\int_0^1 \frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^5)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{5\,n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{5\,n+2}}{5\,n+2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+2},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^5+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{5\,n+2}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{5\,n+1}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{5\,n+2}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{5\,n+1}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{5\,n+1} = \frac{x}{x^5+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^5 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x \sum_{n=0}^{N}\left(-x^5\right)^n \right| = x\frac{1-(-x^5)^{N+1}}{1+x^5} \leqslant \frac{2x}{1+x^5} \qquad (\textsc{hypothèse de domination}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^5}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{5\,n+1}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^{5\,n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{5\,n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{5\,n+2}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{5\,n+2} = \int_0^1 \frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 50. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 9

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^8+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^8)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{8\,n+2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{8\,n+3}}{8\,n+3}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{8\,n+3},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^8+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{8\,n+3}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{8\,n+2}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{8\,n+3}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0{,}1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{8\,n+2}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{8\,n+2} = \frac{x^2}{x^8+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^8\in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^2\sum_{n=0}^{N}\left(-x^8\right)^n\right| = x^2\frac{1-(-x^8)^{N+1}}{1+x^8}\leqslant\frac{2x^2}{1+x^8}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2x^2}{1+x^8}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2}{x^8+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{8\,n+2}\mathrm{d}x\\ &=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{8\,n+2}\mathrm{d}x\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{8\,n+2}\mathrm{d}x\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{8\,n+3}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{8\,n+3}=\int_0^1\frac{x^2}{x^8+1}\mathrm{d}x.$

Corrigé 51. ← page 9

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)\right|\leqslant e^{(-3\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-3\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-3\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$

converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(3\,n-2i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(3\,n-2i)x)}}{-3\,n+2i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-3\,n+2i}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{-3\,n-2i}{9\,n^2+4}\right)\\ &= \frac{2}{9\,n^2+4}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-3\,x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{9\,(n+1)^2+4},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(2\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-3\,(n+1)x)}}{3\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(2\,x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(2\,x) = \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-3\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur

$]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(2\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-3\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-3\,x)} \sin(2\,x) \right| \frac{1-(e^{(-3\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-3\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination)}.
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 2\,x}{3\,x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-3\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{9\,(n+1)^2+4}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(2\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{9\,(n+1)^2+4}$.

Corrigé 52. ← page 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)\right| \leqslant e^{(-3\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$

converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(3\,n-3i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(3\,n-3i)x)}}{-3\,n+3i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-3\,n+3i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-3\,n-3i}{9\,n^2+9}\right)\\ &= \frac{1}{3\,(n^2+1)}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-3\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3\left((n+1)^2+1\right)},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(3\,x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-3\,(n+1)x)}}{3\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(3\,x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(3\,x) = \frac{e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-3\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur

$]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(3\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-3\,x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(3\,x) \right| \frac{1-(e^{(-3\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-3\,x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 3\,x}{3\,x} \underset{x\to 0}{\sim} 2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-3\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$.
Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3\left((n+1)^2+1\right)}. \end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3\left((n+1)^2+1\right)}$.

Corrigé 53. ← page 10

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n \mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 54. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 10

$$\int_0^1 \frac{x^{12}}{x^9+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{12}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^9)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{9n+12}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{9n+13}}{9n+13}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9n+13},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^9+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{9\,n+13}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{9\,n+12}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{9\,n+13}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{9\,n+12}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{9\,n+12} = \frac{x^{12}}{x^9+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^9 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x^{12}\sum_{n=0}^{N}\left(-x^9\right)^n \right| = x^{12}\frac{1-(-x^9)^{N+1}}{1+x^9} \leqslant \frac{2x^{12}}{1+x^9} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^{12}}{1+x^9}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{12}}{x^9+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{9\,n+12}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{9\,n+12}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{9\,n+12}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9\,n+13}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9\,n+13} = \int_0^1 \frac{x^{12}}{x^9+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 55. ← page 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-nx)}\sin(3\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(3\,x)\right| \leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge

absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-3i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-3i)x)}}{-n+3i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+3i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-3i}{n^2+9}\right)\\ &= \frac{3}{n^2+9}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(3\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(3\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3\,(-1)^n}{(n+1)^2+9},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(3\,x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(3\,x)}{1+e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-x)}\sin(3\,x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-x)}\sin(3\,x)\right|\frac{1-(-e^{(-x)})^{N+1}}{1+e^{(-x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(3\,x)\right|}{1+e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(3\,x)\right|}{1+e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 3\,x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} 3\,x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(3\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3\,(-1)^n}{(n+1)^2+9}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(3\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3\,(-1)^n}{(n+1)^2+9}$.

Corrigé 56. ← page 10

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+3},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+3}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{n+2}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+3}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0{,}1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+2}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+2} = \dfrac{x^2}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x^2 \sum_{n=0}^{N} (-x)^n \right| = x^2 \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^2}{1+x} \quad \text{(hypothèse de domination)}.$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le segment $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim\limits_{N\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{n+2}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{n+2}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{n+2}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x.$

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x+1} - 1 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \ln(x+1) \right]_0^1 \\
&= \ln(2) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 57. ← page 10

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x} \qquad (\textsc{hypothèse de domination}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 58. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 11

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{34}+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{34})^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{34\,n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{34\,n+1}}{34\,n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{34\,n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^{34}+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{34\,n+1}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{34\,n}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{34\,n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0{,}1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{34\,n}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{34\,n} = \frac{1}{x^{34}+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^{34} \in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}\left(-x^{34}\right)^n\right| = \frac{1-(-x^{34})^{N+1}}{1+x^{34}} \leqslant \frac{2}{1+x^{34}} \qquad (\textsc{hypothèse de domination}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^{34}}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{34}+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{34\,n}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{34\,n}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{34\,n}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{34\,n+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{34\,n+1} = \int_0^1 \frac{1}{x^{34}+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 59. ← page 11

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^4\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{2\,n+4}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{2\,n+5}}{2\,n+5}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+5},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^2+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+5}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{2\,n+4}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2\,n+5}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0{,}1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+4}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+4}=\frac{x^4}{x^2+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^2\in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^4\sum_{n=0}^{N}\left(-x^2\right)^n\right|=x^4\frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\leqslant\frac{2x^4}{1+x^2}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2x^4}{1+x^2}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x&=\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+4}\mathrm{d}x\\&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+4}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+4}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+5}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+5}=\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x^2+1}-1\right)\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{1}{3}\,x^3-x+\arctan(x)\right]_0^1\\&=\frac{1}{4}\,\pi-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 60. ← page 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-nx)} \sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)} \sin(x)\right| \leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\, \mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)} \sin(x)\, \mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-i)x)} \mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-i)x)}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-i}{n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1-e^{(-x)}} \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)} \sin(x).$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x = 0$, même si on remarque qu'en $x = 0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x = 0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-x)} \sin(x) \right| \frac{1 - (e^{(-x)})^{N+1}}{1 - e^{(-x)}} \\ &\leqslant \frac{2 \left| e^{(-x)} \sin(x) \right|}{1 - e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2 \left| e^{(-x)} \sin(x) \right|}{1 - e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2 \times x}{x} \underset{x \to 0}{\sim} 2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\, e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\, e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}} \underset{x \to +\infty}{\sim} 2\, e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\, e^{(-x)}}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N \to +\infty} S_N(x) \mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N \to +\infty} S_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) \mathrm{d}x &= \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$.

Corrigé 61. ← page 11

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{x^{136}}{x+1} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{136} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{n+136} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{n+137}}{n+137} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+137},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+137}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 \left|(-1)^n x^{n+136}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+137}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+136}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+136} = \dfrac{x^{136}}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left| x^{136} \sum_{n=0}^{N} (-x)^n \right| = x^{136}\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^{136}}{1+x} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x^{136}}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{136}}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+136}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^{n+136}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{n+136}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+137}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+137} = \int_0^1 \dfrac{x^{136}}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On simplifie l'intégrande en faisant apparaître une somme géométrique. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{136}}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 -\frac{-1+1-x^{136}}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^{136}}{1-(-x)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{135}(-x)^k\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln(x+1) + \sum_{k=0}^{135}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\
&= \ln(2) - \frac{120614374799391222468939531811232957297274380116287735036 1}{17493420479206609169018911457816709870725923221344284320 00}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 62. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 11

$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{3n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x^3+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+2}$, ce qui ne vaut que si $x \in [0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{3n+1}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3n+2}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3n+1}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+1} = \frac{x}{x^3+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^3 \in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x\sum_{n=0}^{N}\left(-x^3\right)^n\right| = x\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3} \leqslant \frac{2x}{1+x^3} \qquad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^3}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale

permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+1}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+2}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+2}=\int_0^1\frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 63. ← page 11

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-6\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-6\,nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-6\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-6\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-6\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{(-6\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(6\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(6\,n-i)x)}}{-6\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-6\,n+i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-6\,n-i}{36\,n^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{36\,n^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-6\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-6\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-6\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-6\,x)}\right)^n\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-6\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{36\,(n+1)^2+1},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-6\,(n+1)x)}}{6\,(n+1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{6\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente,

ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-6\,(n+1)x)} \sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-6\,(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-6\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-6\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-6\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-6\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-6\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-6\,x)} \sin(x) \right| \frac{1-(-e^{(-6\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-6\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-6\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-6\,x)}} \qquad \textsc{(hypothèse de domination)}.
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-6\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-6\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-6\,x)}}{1+e^{(-6\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-6\,x)}}{1+e^{(-6\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-6\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-6\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-6\,x)}}{1+e^{(-6\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-6\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-6\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-6\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-6\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-6\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{36\,(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-6\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-6\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{36\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 64. ← page 12

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-167\,nx)}\sin(6\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-167\,nx)}\sin(6\,x)\right|\leqslant e^{(-167\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-167\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-167\,nx)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-167\,nx)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(167\,n-6i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(167\,n-6i)x)}}{-167\,n+6i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-167\,n+6i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-167\,n-6i}{27889\,n^2+36}\right)\\ &= \frac{6}{27889\,n^2+36}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-167\,x)}\sin(6\,x)}{1+e^{(-167\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-167\,x)}\sin(6\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-167\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-167\,(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6\,(-1)^n}{27889\,(n+1)^2+36},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(6\,x)|\, e^{(-167\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(6\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(6\,x)|\, e^{(-167\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty} e^{(-167\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-167\,(n+1)x)}}{167\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{167\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty} |\sin(6\,x)|\, e^{(-167\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-167\,(n+1)x)} \sin(6\,x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-167\,(n+1)x)} \sin(6\,x) = \dfrac{e^{(-167\,x)}\sin(6\,x)}{1+e^{(-167\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-167\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x = 0$, même si on remarque qu'en $x = 0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x = 0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-167\,x)} \sin(6\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-167\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-167\,x)} \sin(6\,x) \right| \frac{1-(-e^{(-167\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-167\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left| e^{(-167\,x)} \sin(6\,x)\right|}{1+e^{(-167\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left| e^{(-167\,x)} \sin(6\,x)\right|}{1+e^{(-167\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 6\,x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} 6\,x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-167\,x)}}{1+e^{(-167\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-167\,x)}}{1+e^{(-167\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-167\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-167\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{2\,e^{(-167\,x)}}{1+e^{(-167\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-167\,x)}\sin(6\,x)}{1+e^{(-167\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-167\,(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-167\,(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-167\,(n+1)x)}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6\,(-1)^n}{27889\,(n+1)^2+36}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-167\,x)}\sin(6\,x)}{1+e^{(-167\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6\,(-1)^n}{27889\,(n+1)^2+36}$.

Corrigé 65. ← page 12

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-9\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-9\,nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-9\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-9\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-9\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{(-9\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(9\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(9\,n-i)x)}}{-9\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-9\,n+i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-9\,n-i}{81\,n^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{81\,n^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-9\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-9\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-9\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-9\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\
&\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-9\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{81\,(n+1)^2+1},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-9\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-9\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-9\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-9\,(n+1)x)}}{9\,(n+1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{9\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente,

ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-9\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).
Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-9\,(n+1)x)} \sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-9\,(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-9\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-9\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-9\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-9\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-9\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-9\,x)} \sin(x) \right| \frac{1-(-e^{(-9\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-9\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left| e^{(-9\,x)} \sin(x) \right|}{1+e^{(-9\,x)}} && \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left| e^{(-9\,x)} \sin(x) \right|}{1+e^{(-9\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-9\,x)}}{1+e^{(-9\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-9\,x)}}{1+e^{(-9\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-9\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-9\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-9\,x)}}{1+e^{(-9\,x)}}\mathrm{d}x$.
Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$.
Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-9\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-9\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{(-9\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-9\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-9\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{81\,(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-9\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-9\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{81\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 66. ← page 12

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(2\,x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(n-2i)x)}\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-2i)x)}}{-n+2i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+2i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-2i}{n^2+4}\right) \\
&= \frac{2}{n^2+4}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(2\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-x)}\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^2+4},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(2\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce

qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(2x)|\, e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).
Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)} \sin(2x).$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(2x) = \frac{e^{(-x)}\sin(2x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x = 0$, même si on remarque qu'en $x = 0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x = 0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(2x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-x)} \sin(2x) \right| \frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(2x)\right|}{1-e^{(-x)}} \qquad\qquad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(2x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 2x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 4 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(2x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^2+4}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(2\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^2+4}$.

Corrigé 67. ← page 12

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0{,}1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0{,}1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0{,}1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0{,}1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0{,}1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1{,}0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0{,}1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0{,}1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0{,}1]$, donc elle est intégrable sur $[0{,}1]$, et en particulier sur $[0{,}1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0{,}1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 68. ← page 12

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^6)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{6\,n+2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{6\,n+3}}{3\,(2\,n+1)}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{6\,n+3},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^6+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{6\,n+3}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{6\,n+2}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{6\,n+3}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{6\,n+2}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{6\,n+2}=\frac{x^2}{x^6+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^6\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^2\sum_{n=0}^{N}\left(-x^6\right)^n\right|=x^2\frac{1-(-x^6)^{N+1}}{1+x^6}\leqslant\frac{2x^2}{1+x^6}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2x^2}{1+x^6}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{6\,n+2}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{6\,n+2}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{6\,n+2}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,(2\,n+1)}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{6\,n+3}=\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3\,x^2}{(x^3)^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\arctan\left(x^3\right)\right]_0^1=\frac{1}{12}\,\pi$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 69. ← page 13

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^n\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right|=\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}\leqslant\frac{2}{1+x}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 70. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 13

$$\int_0^1\frac{x^3}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{3n+3}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+4},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^3+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+4}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{3n+3}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3n+4}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3n+3}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+3}=\frac{x^3}{x^3+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^3\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^3\sum_{n=0}^{N}\left(-x^3\right)^n\right|=x^3\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}\leqslant\frac{2x^3}{1+x^3}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi:x\mapsto\dfrac{2x^3}{1+x^3}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^3}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+3}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+3}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+3}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+4}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+4} = \int_0^1\frac{x^3}{x^3+1}\mathrm{d}x.$

Corrigé 71. ← page 13

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 72. ← page 13

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(5\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(5\,x)\right|\leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n-5i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-5i)x)}}{-2\,n+5i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+5i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-5i}{4\,n^2+25}\right)\\ &= \frac{5}{4\,n^2+25}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-2\,x)}\sin(5\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5}{4\,(n+1)^2+25},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\int_0^{+\infty}|\sin(5\,x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(5\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(5\,x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=$

$\left[-\dfrac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(5\,x)|\, e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(5\,x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(5\,x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-2\,x)} \sin(5\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-2\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-2\,x)} \sin(5\,x) \right| \frac{1-(e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-2\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(5\,x)\right|}{1-e^{(-2\,x)}} && \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(5\,x)\right|}{1-e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 5\,x}{2\,x} \underset{x\to 0}{\sim} 5 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5}{4\,(n+1)^2+25}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5}{4\,(n+1)^2+25}$.

Corrigé 73. ← page 13

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{2\,n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{2\,n+2}}{2\,(n+1)}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+2},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+2}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{2\,n+1}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2\,n+2}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+1}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2\,n+1} = \frac{x}{x^2+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^2\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x\sum_{n=0}^{N}\left(-x^2\right)^n\right| = x\frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{2x}{1+x^2}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2\,n+1}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+1}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n+1}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,(n+1)}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+2}=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 74. ← page 14

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-7\,nx)}\sin(8\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-7\,nx)}\sin(8\,x)\right|\leqslant e^{(-7\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-7\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-7\,nx)}\sin(8\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-7\,nx)}\sin(8\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(7\,n-8i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(7\,n-8i)x)}}{-7\,n+8i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-7\,n+8i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-7\,n-8i}{49\,n^2+64}\right)\\ &= \frac{8}{49\,n^2+64}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)}{1+e^{(-7\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-7\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-7\,(n+1)x)}\sin(8\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8\,(-1)^n}{49\,(n+1)^2+64},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(8\,x)|\,e^{(-7\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(8\,x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(8\,x)|\,e^{(-7\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}e^{(-7\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{7\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(8\,x)|\,e^{(-7\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-7\,(n+1)x)}\sin(8\,x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-7\,(n+1)x)}\sin(8\,x) = \frac{e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)}{1+e^{(-7\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-7\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-7\,x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)\right|\frac{1-(-e^{(-7\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-7\,x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)\right|}{1+e^{(-7\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)\right|}{1+e^{(-7\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times 8\,x}{2}\underset{x\to 0}{\sim}8\,x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-7\,x)}}{1+e^{(-7\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-7\,x)}}{1+e^{(-7\,x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(-7\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-7\,x)}}{1+e^{(-7\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$.

Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)}{1+e^{(-7\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-7\,(n+1)x)}\sin(8\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-7\,(n+1)x)}\sin(8\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-7\,(n+1)x)}\sin(8\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8\,(-1)^n}{49\,(n+1)^2+64}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-7\,x)}\sin(8\,x)}{1+e^{(-7\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8\,(-1)^n}{49\,(n+1)^2+64}$.

Corrigé 75. ← page 14

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-3\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-3\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(3\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(3\,n-i)x)}}{-3\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-3\,n+i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-3\,n-i}{9\,n^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{9\,n^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-3\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-3\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9\,(n+1)^2+1},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-3\,(n+1)x)}}{3\,(n+1)}\right]_0^{+\infty}=$

$\dfrac{1}{3\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-3\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-3\,x)} \in]-1{,}1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-3\,x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(x) \right| \frac{1-(-e^{(-3\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-3\,x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-3\,x)} \sin(x)\right|}{1+e^{(-3\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-3\,x)} \sin(x)\right|}{1+e^{(-3\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-3\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$.

Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)} \sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9\,(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 76. ← page 14

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^nx^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|(-1)^nx^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^nx^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x}\quad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 77. ← page 14

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(4\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(4\,x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(n-4i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-4i)x)}}{-n+4i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+4i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-4i}{n^2+16}\right)\\ &= \frac{4}{n^2+16}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(4\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-x)}\sin(4\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4\,(-1)^n}{(n+1)^2+16},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(4\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(4\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(4\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty}=$

$\dfrac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(4\,x)|\, e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-(n+1)x)} \sin(4\,x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-(n+1)x)} \sin(4\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(4\,x)}{1+e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-x)} \in]-1{,}1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(4\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-x)} \sin(4\,x) \right| \frac{1-(-e^{(-x)})^{N+1}}{1+e^{(-x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(4\,x)\right|}{1+e^{(-x)}} && \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(4\,x)\right|}{1+e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 4\,x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} 4\,x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(4\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4\,(-1)^n}{(n+1)^2+16}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(4\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4\,(-1)^n}{(n+1)^2+16}$.

Corrigé 78. ← page 14

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(13\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(13\,x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(13\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(13\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-13i)x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-13i)x)}}{-n+13i}\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+13i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-13i}{n^2+169}\right)\\
&= \frac{13}{n^2+169}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(13\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(13\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(13\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{13}{(n+1)^2+169},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(13\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(13\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(13\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(13\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(13\,x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(13\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(13\,x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-x)}\sin(13\,x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-x)}\right)^n\right| \\
&= \left|e^{(-x)}\sin(13\,x)\right|\frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(13\,x)\right|}{1-e^{(-x)}} && \text{(hypothèse de domination).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(13\,x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 13\,x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 26 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(13\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(13\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(13\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(13\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{13}{(n+1)^2+169}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(13\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{13}{(n+1)^2+169}$.

Corrigé 79. ← page 15

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-i)x)}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-i}{n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-(n+1)x)} \sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1+e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-x)} \sin(x) \right| \frac{1-(-e^{(-x)})^{N+1}}{1+e^{(-x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)} \sin(x)\right|}{1+e^{(-x)}} && (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}). \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)} \sin(x)\right|}{1+e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}$.

Corrigé 80. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 15

$$\int_0^1\frac{x^4}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^4\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{3\,n+4}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{3\,n+5}}{3\,n+5}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+5},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^3+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3\,n+5}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{3\,n+4}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3\,n+5}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+4}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3\,n+4} = \frac{x^4}{x^3+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^3\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^4\sum_{n=0}^{N}\left(-x^3\right)^n\right| = x^4\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3} \leqslant \frac{2x^4}{1+x^3}\quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}.$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2x^4}{1+x^3}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^4}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale

permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3\,n+4}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+4}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3\,n+4}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+5}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3\,n+5}=\int_0^1\frac{x^4}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 81. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 15

$$\int_0^1\frac{1}{x^{10}+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{10})^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{10\,n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{10\,n+1}}{10\,n+1}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{10\,n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

- pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^{10}+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{10\,n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{10\,n}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{10\,n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{10\,n}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{10\,n}=\frac{1}{x^{10}+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^{10}\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|\sum_{n=0}^{N}\left(-x^{10}\right)^n\right|=\frac{1-(-x^{10})^{N+1}}{1+x^{10}}\leqslant\frac{2}{1+x^{10}}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi:x\mapsto\dfrac{2}{1+x^{10}}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^{10}+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale

permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{10\,n}\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{10\,n}\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{10\,n}\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{10\,n+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{10\,n+1}=\int_0^1\frac{1}{x^{10}+1}\mathrm{d}x.$

Corrigé 82. ← page 15

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-3\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-3\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-3\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{(-3\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(3\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(3\,n-i)x)}}{-3\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-3\,n+i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-3\,n-i}{9\,n^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{9\,n^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-3\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-3\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9\,(n+1)^2+1},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-3\,(n+1)x)}}{3\,(n+1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{3\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente,

ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-3\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter). Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)} \sin(x) = \dfrac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-3\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-3\,x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-3\,x)} \sin(x)\right| \frac{1-(e^{(-3\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-3\,x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}. \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-3\,x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-3\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{3\,x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-3\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{2\,e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9\,(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-3\,x)}\sin(x)}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 83. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 16

$$\int_0^1 \frac{x}{x^{28}+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{28})^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{28\,n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{28\,n+2}}{2\,(14\,n+1)}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{28\,n+2},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^{28}+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{28\,n+2}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{28\,n+1}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{28\,n+2}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{28\,n+1}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{28\,n+1} = \frac{x}{x^{28}+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^{28}\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x\sum_{n=0}^{N}\left(-x^{28}\right)^n\right| = x\frac{1-(-x^{28})^{N+1}}{1+x^{28}} \leqslant \frac{2x}{1+x^{28}} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2x}{1+x^{28}}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x}{x^{28}+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale

permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{28\,n+1}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{28\,n+1}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{28\,n+1}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\,(14\,n+1)}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{28\,n+2}=\int_0^1\frac{x}{x^{28}+1}\mathrm{d}x$.

Corrigé 84. ← page 16

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i)x)}}{-2\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i}{4\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente,

ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter). Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x).$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |S_N(x)| &= \left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-2\,x)}\right)^n \right| \\ &= \left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \right| \frac{1-(-e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-2\,x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}} && \text{(hypothèse de domination).} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 85. ← page 16

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i)x)}}{-2\,n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i}{4\,n^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,n^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-2\,x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{2\,(n+1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente,

ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).
Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x) = \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-2\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-2\,x)} \sin(x) \right| \frac{1-(-e^{(-2\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-2\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}} && \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-2\,x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-2\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-2\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-2\,x)}}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x$.
Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$.
Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,(n+1)^2+1}$.

Corrigé 86. ← page 16

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2}{1+x}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 87. ← page 16

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|(-1)^n x^n|\,\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right|=\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}\leqslant\frac{2}{1+x}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi:x\mapsto\dfrac{2}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. On a directement : $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)$. D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 88. ← page 16

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x^{45}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{45}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+45}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+46}}{n+46}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+46},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+46}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{n+45}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+46}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+45}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+45}=\frac{x^{45}}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)|=\left|x^{45}\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right|=x^{45}\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}\leqslant\frac{2x^{45}}{1+x}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2x^{45}}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{45}}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+45}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+45}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+45}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+46}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+46}=\int_0^1\frac{x^{45}}{x+1}\mathrm{d}x.$

2. On simplifie l'intégrande en faisant apparaître une somme géométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{45}}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1\frac{-1+1+x^{45}}{1+x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(-\frac{1}{1+x}+\frac{1-(-x)^{45}}{1-(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(-\frac{1}{1+x}+\sum_{k=0}^{44}(-x)^k\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[-\ln(x+1)+\sum_{k=0}^{44}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\\ &= -\ln(2)+\frac{6632660439700528339}{9419588158802421600}.\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 89. ← page 16

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(5x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(5x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(5x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(5x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(n-5i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-5i)x)}}{-n+5i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+5i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-5i}{n^2+25}\right)\\ &= \frac{5}{n^2+25}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(5\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5}{(n+1)^2+25},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(5\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(5\,x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(5\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(5\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}e^{(-(n+1)x)}\sin(5\,x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(5\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-x)}\sin(5\,x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-x)}\sin(5\,x)\right|\frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(5\,x)\right|}{1-e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(5\,x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times 5\,x}{x}\underset{x\to 0}{\sim}10\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5}{(n+1)^2+25}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(5\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5}{(n+1)^2+25}$.

Corrigé 90. ← page 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-8\,nx)}\sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-8\,nx)}\sin(2\,x)\right| \leqslant e^{(-8\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-8\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-8\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-8\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(8\,n-2i)x)}\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(8\,n-2i)x)}}{-8\,n+2i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-8\,n+2i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-8\,n-2i}{64\,n^2+4}\right) \\
&= \frac{1}{2\,(16\,n^2+1)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-8\,x)}\right)^n \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\left(16\,(n+1)^2+1\right)},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\, e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(2\,x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\, e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-8\,(n+1)x)}}{8\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{8\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\, e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x) = \frac{e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-8\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-8\,x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-8\,x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)\right|\frac{1-(-e^{(-8\,x)})^{N+1}}{1+e^{(-8\,x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)\right|}{1+e^{(-8\,x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)\right|}{1+e^{(-8\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times 2\,x}{2}\underset{x\to 0}{\sim} 2\,x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-8\,x)}}{1+e^{(-8\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-8\,x)}}{1+e^{(-8\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-8\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-8\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-8\,x)}}{1+e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$.
Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\left(16\,(n+1)^2+1\right)}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-8\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\left(16\,(n+1)^2+1\right)}$.

Corrigé 91. ← page 17

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-i)x)}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-i}{n^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{n^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{(-(n+1)x)}\sin(x) = \frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-x)}\right)^n\right| \\ &= \left|e^{(-x)}\sin(x)\right|\frac{1-(-e^{(-x)})^{N+1}}{1+e^{(-x)}} \\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times x}{2}\underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}$.

Corrigé 92. ← page 17

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(n-i)x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-i)x)}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-i}{n^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{n^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\
&\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-(n+1)x)}\sin(x)=\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left|e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-x)}\right)^n\right| \\
&= \left|e^{(-x)}\sin(x)\right|\frac{1-(-e^{(-x)})^{N+1}}{1+e^{(-x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-x)}} && \text{(hypothèse de domination).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1+e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times x}{2}\underset{x\to 0}{\sim}x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}$.

Corrigé 93. ← page 17

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(2\,x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{(-nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(n-2i)x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-2i)x)}}{-n+2i}\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+2i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-2i}{n^2+4}\right)\\
&= \frac{2}{n^2+4}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-x)}\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\
&\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^n}{(n+1)^2+4},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(2\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty}=$

$\frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty} |\sin(2x)|\, e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, e^{(-(n+1)x)} \sin(2x).$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, e^{(-(n+1)x)} \sin(2x) = \frac{e^{(-x)} \sin(2x)}{1+e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(2x) \sum_{n=0}^{N} \left(-e^{(-x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-x)} \sin(2x) \right| \frac{1-(-e^{(-x)})^{N+1}}{1+e^{(-x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)} \sin(2x)\right|}{1+e^{(-x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination)}.
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \frac{2\left|e^{(-x)} \sin(2x)\right|}{1+e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 2x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} 2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1+e^{(-x)}} \mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)} \sin(2x)}{1+e^{(-x)}} \mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^n}{(n+1)^2+4}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^n}{(n+1)^2+4}$.

Corrigé 94. ← page 17

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+2},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+2}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{n+1}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+2}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+1}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1} = \frac{x}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = x\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x}{1+x}\quad\text{(hypothèse de domination)}.$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2x}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+1}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+2} = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)\mathrm{d}x \\
&= [x-\ln(x+1)]_0^1 \\
&= -\ln(2)+1.
\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 95. ← page 18

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-i)x)}\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-i)x)}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-i}{n^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{n^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2+1},
\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}e^{(-(n+1)x)}\sin(x)=\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-x)}\sin(x)\sum_{n=0}^{N}\left(e^{(-x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-x)}\sin(x)\right|\frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2\times x}{x}\underset{x\to 0}{\sim}2\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2+1}$.

Corrigé 96. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique : ← page 18

$$\int_0^1\frac{1}{x^{13}+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{13})^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{13\,n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{13\,n+1}}{13\,n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{13\,n+1},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x^{13}+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{13\,n+1}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{13\,n}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{13\,n+1}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{13\,n}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{13\,n} = \frac{1}{x^{13}+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x^{13}\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N}\left(-x^{13}\right)^n\right| = \frac{1-(-x^{13})^{N+1}}{1+x^{13}} \leqslant \frac{2}{1+x^{13}}\qquad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2}{1+x^{13}}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x^{13}+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale

permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{13\,n}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{13\,n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{13\,n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{13\,n+1}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{13\,n+1}=\int_0^1\frac{1}{x^{13}+1}\mathrm{d}x.$

Corrigé 97. ← page 18

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-8\,nx)}\sin(9\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-8\,nx)}\sin(9\,x)\right|\leqslant e^{(-8\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-8\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-8\,nx)}\sin(9\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-8\,nx)}\sin(9\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(8\,n-9i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(8\,n-9i)x)}}{-8\,n+9i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-8\,n+9i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-8\,n-9i}{64\,n^2+81}\right)\\ &= \frac{9}{64\,n^2+81}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-8\,x)}\sin(9\,x)}{1-e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-8\,x)}\sin(9\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-8\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(9\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9}{64\,(n+1)^2+81},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\int_0^{+\infty}|\sin(9\,x)|\,e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(9\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(9\,x)|\,e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-8\,(n+1)x)}}{8\,(n+1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{8\,(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(9\,x)|\, e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-8\,(n+1)x)} \sin(9\,x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-8\,(n+1)x)} \sin(9\,x) = \frac{e^{(-8\,x)}\sin(9\,x)}{1-e^{(-8\,x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-8\,x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-8\,x)} \sin(9\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-8\,x)} \sin(9\,x) \right| \frac{1-(e^{(-8\,x)})^{N+1}}{1-e^{(-8\,x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left| e^{(-8\,x)} \sin(9\,x)\right|}{1-e^{(-8\,x)}} && \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-8\,x)}\sin(9\,x)\right|}{1-e^{(-8\,x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 9\,x}{8\,x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{9}{4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-8\,x)}}{1-e^{(-8\,x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-8\,x)}}{1-e^{(-8\,x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-8\,x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-8\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-8\,x)}}{1-e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$.

Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-8\,x)}\sin(9\,x)}{1-e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(9\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(9\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(9\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9}{64\,(n+1)^2+81}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-8\,x)}\sin(9\,x)}{1-e^{(-8\,x)}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9}{64\,(n+1)^2+81}$.

Corrigé 98. ← page 18

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-nx)}\sin(3\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-nx)}\sin(3\,x)\right|\leqslant e^{(-nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-nx)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-3i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-3i)x)}}{-n+3i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+3i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-3i}{n^2+9}\right)\\ &= \frac{3}{n^2+9}.\end{aligned}$$

   D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(3\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(n+1)^2+9},\end{aligned}$$

   où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :
   — l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;
   — pour étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(3\,x)|$ par 1, de sorte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(3\,x)|\,e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{n+1}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce

qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(3\,x)|\, e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)} \sin(3\,x)\,.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(3\,x) = \frac{e^{(-x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_N(x)| &= \left| e^{(-x)} \sin(3\,x) \sum_{n=0}^{N} \left(e^{(-x)}\right)^n \right| \\
&= \left| e^{(-x)} \sin(3\,x) \right| \frac{1-(e^{(-x)})^{N+1}}{1-e^{(-x)}} \\
&\leqslant \frac{2\left|e^{(-x)}\sin(3\,x)\right|}{1-e^{(-x)}} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION).}
\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\left|e^{(-x)}\sin(3\,x)\right|}{1-e^{(-x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\times 3\,x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 6 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\dfrac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,e^{(-x)}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\,e^{(-x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de

l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(n+1)^2+9}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-x)}\sin(3\,x)}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(n+1)^2+9}$.

Corrigé 99. ← page 18

1. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\int_0^1\frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^5\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+5}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{n+6}}{n+6}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+6},$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— pour obtenir ces égalités, on a écrit : $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+6}$, ce qui ne vaut que si $x\in[0,1[$: ainsi l'intégrale doit s'interpréter comme une intégrale sur l'intervalle $[0,1[$, ce qui exclut la possibilité d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left|(-1)^n x^{n+5}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+6}$ est divergente, puisque c'est essentiellement la série harmonique.

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+5}.$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+5} = \frac{x^5}{x+1}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-x\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$|S_N(x)| = \left|x^5\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right| = x^5\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} \leqslant \frac{2x^5}{1+x}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $\varphi : x\mapsto \dfrac{2x^5}{1+x}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $[0,1[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$. Or on a d'une part :

$$\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+5}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+5}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+5}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}=\int_0^1\frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x$.

2. Après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(x^4-x^3+x^2-x-\frac{1}{x+1}+1\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)\right]_0^1\\ &= -\ln(2)+\frac{47}{60}.\end{aligned}$$

D'où le résultat grâce à l'identité de l'exercice.

Corrigé 100. ← page 19

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-2\,nx)}\sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,nx)}\sin(2\,x)\right|\leqslant e^{(-2\,nx)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-2\,nx)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n-2i)x)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-2i)x)}}{-2\,n+2i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+2i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-2i}{4\,n^2+4}\right)\\ &= \frac{1}{2\,(n^2+1)}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Pour démontrer l'identité de l'énoncé on aimerait écrire, à l'aide d'un développement en série géométrique :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}e^{(-2\,x)}\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{(-2\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\left((n+1)^2+1\right)},\end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est à justifier : c'est un problème d'interversion. Mais aucun théorème d'intégration terme à terme du cours n'est utilisable :

— l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, ce qui exclut d'emblée le théorème d'intégration terme à terme spécifique aux segments ;

— pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|\sin(2x)|\,e^{(-2(n+1)x)}\mathrm{d}x$, le plus simple semble être de majorer $|\sin(2x)|$ par 1, de sorte que : $\int_0^{+\infty}|\sin(2x)|\,e^{(-2(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}e^{(-2(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2(n+1)x)}}{2(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2(n+1)}$; mais on obtient ainsi une majoration par le terme général d'une série de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de vérifier cette hypothèse du théorème d'intégration terme à terme (en vérité, calculer $\int_0^{+\infty}|\sin(2x)|\,e^{(-2(n+1)x)}\mathrm{d}x$ sans majorer le sinus, mais en utilisant la relation de Chasles pour se ramener à des intervalles où le sinus est de signe constant, afin de simplifier la valeur absolue, permettrait d'éviter cette majoration problématique ; mais c'est plus subtil que l'approche que nous allons adopter).

Nous allons à la place appliquer le théorème de convergence dominée à la justification du problème d'interversion $(*)$. Pour cela, posons :

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,e^{(-2(n+1)x)}\sin(2x).$$

Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, S_N est bien sûr continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,e^{(-2(n+1)x)}\sin(2x)=\frac{e^{(-2x)}\sin(2x)}{1+e^{(-2x)}}$ (il s'agit essentiellement d'une série géométrique de raison $-e^{(-2x)}\in]-1,1[$: c'est pour ce passage que j'exclus $x=0$, même si on remarque qu'en $x=0$ le terme général de la série est nul et elle converge trivialement ; je continue cependant d'exclure $x=0$ pour éviter les distinctions de cas), qui est également continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}|S_N(x)| &= \left|e^{(-2x)}\sin(2x)\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{(-2x)}\right)^n\right|\\ &= \left|e^{(-2x)}\sin(2x)\right|\frac{1-(-e^{(-2x)})^{N+1}}{1+e^{(-2x)}}\\ &\leqslant \frac{2\left|e^{(-2x)}\sin(2x)\right|}{1+e^{(-2x)}} \qquad \text{(hypothèse de domination)}.\end{aligned}$$

L'application $\varphi : x\mapsto\frac{2\left|e^{(-2x)}\sin(2x)\right|}{1+e^{(-2x)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{2\times2x}{2}\underset{x\to0}{\sim}2x\underset{x\to0}{\longrightarrow}0,$$

donc φ se prolonge en une fonction continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et seule l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ reste à établir. Pour cela, on majore d'abord le sinus par 1, de sorte que pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(x)\leqslant\frac{2\,e^{(-2x)}}{1+e^{(-2x)}},$$

et on montre l'intégrabilité de ce majorant en se ramenant à une fonction de référence. On a en effet : $\frac{2\,e^{(-2x)}}{1+e^{(-2x)}}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\,e^{(-2x)}$, et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty}2\,e^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, il en est donc aussi de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{2\,e^{(-2x)}}{1+e^{(-2x)}}\mathrm{d}x$. Toujours par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\varphi$ converge, et par continuité (déjà justifiée) l'intégrale $\int_0^{+\infty}\varphi$ converge. Comme ϕ est positive, cela équivaut à son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, S_N est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $N\in\mathbb{N}$ ainsi que sa somme f, et on a : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}S_N(x)\mathrm{d}x$.

Or on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x,$$

et d'autre part, puisque nous avons ci-dessous une somme avec un nombre fini de termes, la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}(-1)^n\, e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\left((n+1)^2+1\right)}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien le résultat voulu : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(2\,x)}{1+e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\left((n+1)^2+1\right)}.$