Intégration terme à terme *via* le théorème de convergence monotone (guidé)

Exercice d'intégration terme à terme : on développe en série l'intégrande et on justifie qu'il est possible d'intervertir les symboles somme et intégrale.

Remarque sur la génération des intégrandes. Le développement en série entière des dérivées successives de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ n'a pas été employé pour engendrer ces exercices (et c'est le seul développement usuel à ne pas figurer dans ces exercices ; inutile de développer pourquoi... et j'y remédierai peut-être un jour). Attention, donc, à ne pas avoir se laisser berner par un sentiment d'exhaustivité.

Remarque sur le traitement de ces exercices. Même lorsque la convergence uniforme sur un segment est vérifiable, je passerai par le théorème d'intégration terme à terme valable sur un intervalle quelconque (et qu'on appelle le théorème de convergence monotone dans certaines sphères). C'est pour de bêtes raisons de facilités de codage. Pour votre entraînement, je vous encourage à regarder s'il marcherait de passer par la convergence uniforme, lorsque l'intervalle d'intégration est [0,1] (ou]0,1] ou [0,1[, mais dans ce cas un prolongement par continuité préalable est nécessaire pour se ramener à un segment).

Exercice 1. → page 25

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+2)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+2)x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+2)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{(-2x)}}{1-e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Exercice 2. → page 26

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^{2n} \ln(x)^k \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^{2n} \ln(x)^{k+1} \,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} \ln(x)^k \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{2n} \ln(x)^k \,\mathrm{d}x = \dfrac{(-1)^k k!}{(2n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^{27}}{1+x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(-1)^n \, 27!}{(2n+1)^{28}}.$$

Exercice 3. → page 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1} \,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1} \int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x = \dfrac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) \ln(x)^{25} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-25!}{67108864\,(n+1)^{26}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exercice 4. → page 29

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4\,n+53)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(4\,n+53)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{4\,n+53} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4\,n+53)x)} \mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4\,n+53)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(4\,n+53)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4 e^{(-53\,x)}}{1 - e^{(-4\,x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24}{(4\,n+53)^5}.$$

Exercice 5. → page 30

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+4)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(n+4)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{n+4} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+4)x)} \mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+4)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(n+4)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{27} e^{(-4\,x)}}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{27!}{(n+4)^{28}}.$$

Exercice 6. → page 31

1. Montrer : $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

3. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{(-x)}}{\sqrt{-e^{(-x)}+1}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}(n+1)^3}.$$

Exercice 7. → page 34

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{2}{(2\,n+1)^3}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{x}}{e^{(2\,x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2\,n+1)^3}.$$

Exercice 8. → page 35

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-8\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-8\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\left(16\,(n+1)^2+1\right)}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(e^{(-8\,x)}+1\right) \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\left(16\,(n+1)^2+1\right)(n+1)}.$$

Exercice 9. → page 36

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{n+2}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(n+2)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(n+2)^4}.$$

Exercice 10. → page 38

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{3}\int_0^1 x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 3^{-n-1}(-1)^n\,n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^2 \sin(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2\,n-2} 2^{2\,n+1} (-1)^{n+1}.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sin(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 11. → page 39

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2+1}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(e^{(-x)}\right) \sin(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left((2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)}.$$

Exercice 12. → page 41

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-6\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-6\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{36\,(2\,n+1)^2+1}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin\left(e^{(-6\,x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(36\,(2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)!}.$$

Exercice 13. → page 42

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{(-(3\,n+17)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(3\,n+17)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(3\,n+17)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-17\,x)}}{1-e^{(-3\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3\,n+17)^2}.$$

Exercice 14. → page 43

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{2}\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 2^{-n-1}(-1)^n\,n!$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2\,n-2}(-1)^{n+1}.$$
   En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15. → page 45

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{(-2\,(n+2)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-2\,(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,(n+2)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-4\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(n+2)^2}.$$

Exercice 16. → page 46

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{(n+1)^2+9}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{\left((n+1)^2+9\right)n!}.$$

Exercice 17. → page 48

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{2}\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 2^{-n-1}(-1)^n\,n!$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2\,n-2}(-1)^{n+1}.$$

   En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 18. → page 49

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{(-2\,(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-2\,(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,(4\,n+3)^2}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(2\,x)}}{e^{(8\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(4\,n+3)^2}.$$

Exercice 19. → page 50

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{n+3}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(n+3)^{k+1}}$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{11}e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{11!}{(n+3)^{12}}.$$

Exercice 20. → page 52

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^1 x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{11}\,x\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{\left(\frac{1}{11}\right)^{2\,n}(-1)^n}{(2\,n+1)^2\,(2\,n)!}.$$

Exercice 21. → page 53

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{2\,n+1}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(2\,n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} x^{25}\sinh\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{25!}{(2\,n+1)^{26}}\,\frac{1}{(2\,n+1)!}.$$

Exercice 22. → page 55

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Exercice 23. → page 56

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9\,(2\,n+1)^2+1}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^{+\infty}\sin(x)\sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(9\,(2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)!}.$$

Exercice 24. → page 57

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{(n+4)^3}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2 e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+4)^3}.$$

Exercice 25. → page 58

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Exercice 26. → page 59

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x \sin\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^2\,(2\,n+1)!}.$$

Exercice 27. → page 61

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^{12} \ln(x)^n\,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^{12} \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{13} \int_0^1 x^{12} \ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{12} \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 13^{-n-1}\,(-1)^n\,n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^{12} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 13^{-2\,n-2}\,(-1)^{n+1}.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\int_0^1 x^{12} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 28. → page 62

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+3)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(2\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{2\,n+3} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+3)x)}\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(2\,n+3)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(2\,n+3)^4}.$$

Exercice 29. → page 63

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{2} \int_0^1 x \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 2^{-n-1} (-1)^n n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x \sin(\ln(x)) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2n-2} (-1)^{n+1}.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x \sin(\ln(x)) \,\mathrm{d}x$.

Exercice 30. → page 65

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-2(8n+7)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-2(8n+7)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{2(8n+7)} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-2(8n+7)x)} \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-2(8n+7)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(16n+14)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4 e^{(2x)}}{e^{(16x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4(8n+7)^5}.$$

Exercice 31. → page 67

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-3(2n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-3(2n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{2}{27(2n+1)^3}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(e^{(-3x)}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{27(2n+1)^3 (2n+1)!}.$$

Exercice 32. → page 68

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{3} \int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 3^{-n-1} (-1)^n n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n-1} (-1)^n.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}x$.

Exercice 33. → page 70

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1} \,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1} \int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^6}{1+x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 6!}{(n+1)^7}.$$

Exercice 34. → page 71

1. Montrer : $\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (-1)^n x^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-2(n+1)x)} \sin(x) \,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-2(n+1)x)} \sin(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4(n+1)^2 + 1}.$$
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2x)} \sin(x)}{\sqrt{e^{(-2x)} + 1}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{\left(4(n+1)^2 + 1\right) 2^{2n}}.$$

Exercice 35. → page 73

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-6(n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-6(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{6(n+1)} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-6(n+1)x)} \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^k e^{(-6(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(6n+6)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x^3 \ln\left(e^{(-6x)} + 1\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{216(n+1)^5}.$$

Exercice 36. → page 75

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{(-(3n+2)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(3n+2)x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{(3n+2)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^x}{e^{(3x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}.$$

Exercice 37. → page 76

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+5)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(n+5)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{n+5} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+5)x)} \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+5)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(n+5)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-5\,x)}}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(n+5)^4}.$$

Exercice 38. → page 77

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{7}\,x\right) \ln(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{2\,n+1} (-1)^n}{4\,(2\,n+1)(n+1)^2}.$$

Exercice 39. → page 79

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+2)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+2)x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+2)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{(-2\,x)}}{1 - e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Exercice 40. → page 80

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{3} \int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 3^{-n-1} (-1)^n \, n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2\,n-1} (-1)^n .$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}x$.

Exercice 41. → page 81

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^{16\,n} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^{16\,n} \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(16\,n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^{16}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{(16\,n+1)^2}.$$

Exercice 42. → page 82

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{1331\,(n+1)^3}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{\left(-11\,x+e^{(-11\,x)}\right)}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1331\,(n+1)^3 n!}.$$

Exercice 43. → page 84

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{8\,n+5}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(8\,n+5)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^6 e^{(3\,x)}}{e^{(8\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6!}{(8\,n+5)^7}.$$

Exercice 44. → page 85

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^6}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6!}{(n+1)^7}.$$

Exercice 45. → page 87

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{(2\,n+1)^2+25}.$$

2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{\left((2\,n+1)^2+25\right)(2\,n+1)!}.$$

Exercice 46. → page 88

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{(2\,n+1)^3}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n}{(2\,n+1)^3\,(2\,n+1)!}.$$

Exercice 47. → page 90

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+5)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+5)^2}.$$

Exercice 48. → page 91

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{2}\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 2^{-n-1}\,(-1)^n\,n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2\,n-2}\,(-1)^{n+1}.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 49. → page 92

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x\arctan\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^3}.$$

Exercice 50. → page 93

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(2x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 51. → page 95

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4n+3)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(4n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{4n+3}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4n+3)x)}\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(4n+3)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^6 e^x}{e^{(4x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6!}{(4n+3)^7}.$$

Exercice 52. → page 96

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{1} x^{2n} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{1} x^{2n} \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 53. → page 97

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+3)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-3x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)^2}.$$

Exercice 54. → page 98

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{(-(4n+3)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(4n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(4n+3)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(4x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2}.$$

Exercice 55. → page 99

1. Montrer : $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\left((n+1)^2+1\right)}.$$
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(2\,x)}{\sqrt{-e^{(-2\,x)}+1}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2\,n}{n}}{2\left((n+1)^2+1\right)2^{2\,n}}.$$

Exercice 56. → page 101

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2+1}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left((2\,n+1)^2+1\right)(2\,n)!}.$$

Exercice 57. → page 103

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{1} x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{1} \cos\left(\frac{1}{4}\,x\right) \ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2\,n}(-1)^n}{(2\,n+1)^2\,(2\,n)!}.$$

Exercice 58. → page 104

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2+1}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \cos\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left((2\,n+1)^2+1\right)(2\,n)!}.$$

Exercice 59. → page 106

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(7\,n+6)^2}.$$

2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(7\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(7\,n+6)^2}.$$

Exercice 60. → page 107

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{49\,(2\,n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x\sin\left(e^{(-7\,x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{49\,(2\,n+1)^2\,(2\,n+1)!}.$$

Exercice 61. → page 108

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 e^x \ln(x)^4\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24}{(n+1)^5 n!}.$$

Exercice 62. → page 110

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^{11}}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-11!}{(n+1)^{12}}.$$

Exercice 63. → page 111

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2+1}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left((2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)!}.$$

Exercice 64. → page 113

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(26\,n+25)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(26\,n+25)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{26\,n+25} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(26\,n+25)x)} \mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(26\,n+25)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(26\,n+25)^{k+1}}$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^5 e^x}{e^{(26\,x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{120}{(26\,n+25)^6}.$$

Exercice 65. → page 114

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{2} \int_0^1 x \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 2^{-n-1} (-1)^n n!$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^1 x \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2\,n-1} (-1)^n.$$

   En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}x$.

Exercice 66. → page 116

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^5 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{6} \int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 6^{-n-1} (-1)^n n!$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^1 x^5 \sin(\ln(x)) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 6^{-2\,n-2} (-1)^{n+1}.$$

   En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^5 \sin(\ln(x)) \,\mathrm{d}x$.

Exercice 67. → page 117

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{3} \int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 3^{-n-1} (-1)^n\, n!$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^2 \sin(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2\,n-2} 2^{2\,n+1} (-1)^{n+1}.$$
   En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sin(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 68. → page 119

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{123} \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^{123} \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{124} \int_0^1 x^{123} \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 x^{123} \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 124^{-n-1} (-1)^n\, n!$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^{123} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 124^{-2\,n-1} (-1)^n.$$
   En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{123} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 69. → page 120

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-7\,(n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-7\,(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{2}{343\,(n+1)^3}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{\left(-7\,x + e^{(-7\,x)}\right)} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{343\,(n+1)^3 n!}.$$

Exercice 70. → page 122

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,(2\,n+1)^2 + 1}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(e^{(-2\,x)}\right) \sin(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(4\,(2\,n+1)^2 + 1\right)(2\,n+1)}.$$

Exercice 71. → page 123

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^9 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^9 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{10} \int_0^1 x^9 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 x^9 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 10^{-n-1} (-1)^n n!$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^9 \cos(2 \ln(x)) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-2n-1} 2^{2n} (-1)^n .$$
   En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^9 \cos(2 \ln(x)) \,\mathrm{d}x$.

Exercice 72. → page 125

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Exercice 73. → page 126

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{2n+1} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(2n+1)^{k+1}}$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{10} e^x}{e^{(2x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10!}{(2n+1)^{11}}.$$

Exercice 74. → page 127

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1} \,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1} \int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 \arctan(x) \ln(x)^3 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{3(-1)^n}{8(2n+1)(n+1)^4}.$$

Exercice 75. → page 129

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{3} \int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \, \mathrm{d}x = 3^{-n-1} (-1)^n \, n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x)) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n-1} (-1)^n .$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x)) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 76. → page 131

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-5(n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-5(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{5(n+1)} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-5(n+1)x)} \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-5(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(5n+5)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{\left(-5x + e^{(-5x)}\right)} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24}{3125 (n+1)^5 n!}.$$

Exercice 77. → page 132

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^2 \, \mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{(n+1)^3}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 \ln(x)^2 \sin\left(\frac{1}{10} x\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1} (-1)^n}{4(n+1)^3 (2n+1)!}.$$

Exercice 78. → page 134

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3(2n+1)x)} \sin(5x) \, \mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-3(2n+1)x)} \sin(5x) \, \mathrm{d}x = \frac{5}{9(2n+1)^2 + 25}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \sin(5x) \sinh\left(e^{(-3x)}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{\left(9(2n+1)^2 + 25\right)(2n+1)!}.$$

Exercice 79. → page 135

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{2n} \ln(x)^2 \, \mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^{2n} \ln(x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n}{(2\,n+1)^3}.$$

Exercice 80. → page 137

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+7)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+7)^2}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-7\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+7)^2}.$$

Exercice 81. → page 138

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} x\ln\left(e^{(-x)}+1\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}.$$

Exercice 82. → page 139

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-(4\,n+11)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(4\,n+11)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(4\,n+11)^2}.$$

2. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-11\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4\,n+11)^2}.$$

Exercice 83. → page 140

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^3\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{4}\int_0^1 x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 4^{-n-1}\,(-1)^n\,n!$.
   Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :

$$\int_0^1 x^3\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-2\,n-1}\,(-1)^n\,.$$

   En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^3\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 84. → page 142

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1} \,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1} \int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \ln(x)^k \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 \cosh(x) \ln(x)^3 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{6}{(2n+1)^4 (2n)!}.$$

Exercice 85. → page 143

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 e^x \ln(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2 n!}.$$

Exercice 86. → page 145

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

Exercice 87. → page 146

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^{2n} \ln(x)^2 \,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^{2n} \ln(x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{1-x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 88. → page 147

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(3x) \,\mathrm{d}x = \frac{3}{(n+1)^2 + 9}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{\left((n+1)^2+9\right) n!}.$$

Exercice 89. → page 148

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{11\,n+10}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(11\,n+10)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{11} e^x}{e^{(11\,x)} - 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{11!}{(11\,n+10)^{12}}.$$

Exercice 90. → page 150

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^3 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^3 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{4}\int_0^1 x^3 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^3 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 4^{-n-1}(-1)^n\,n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-2\,n-2}(-1)^{n+1}.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 91. → page 151

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{(7\,n+6)^3}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{e^{(7\,x)} - 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(7\,n+6)^3}.$$

Exercice 92. → page 153

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x \sin\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^2\,(2\,n+1)!}.$$

Exercice 93. → page 154

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x)\, \mathrm{d}x$ converge absolument, et qu'on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^1 \ln(x) \sin(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{4(n+1)^2(2n+1)!}.$$

Exercice 94. → page 155

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^3 \ln(x)^n\, \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^3 \ln(x)^{n+1}\, \mathrm{d}x = \frac{n+1}{4} \int_0^1 x^3 \ln(x)^n\, \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^3 \ln(x)^n\, \mathrm{d}x = 4^{-n-1} (-1)^n n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-2n-2} (-1)^{n+1}.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x$.

Exercice 95. → page 157

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-3(2n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-3(2n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{3(2n+1)} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-3(2n+1)x)} \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-3(2n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(6n+3)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(3x)}}{e^{(6x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{27(2n+1)^4}.$$

Exercice 96. → page 158

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 x^6 \ln(x)^n\, \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^6 \ln(x)^{n+1}\, \mathrm{d}x = \frac{n+1}{7} \int_0^1 x^6 \ln(x)^n\, \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^6 \ln(x)^n\, \mathrm{d}x = 7^{-n-1} (-1)^n n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^6 \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 7^{-2n-2} (-1)^{n+1}.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\int_0^1 x^6 \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x$.

Exercice 97. → page 160

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8\,n+7)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(8\,n+7)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{8\,n+7} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8\,n+7)x)} \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8\,n+7)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(8\,n+7)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4 e^x}{e^{(8\,x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24}{(8\,n+7)^5}.$$

Exercice 98. → page 161

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k+1}{2\,n+1} \int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{k!}{(2\,n+1)^{k+1}}$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x^3 \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(2\,n+1)^4\,(2\,n)!}.$$

Exercice 99. → page 163

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. Montrer :
$$\int_0^{+\infty} x e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 n!}.$$

Exercice 100. → page 164

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$ converge, et qu'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^5 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{6} \int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 6^{-n-1} (-1)^n n!$.
Si Python s'avère assez idiot pour écrire le résultat sous une forme laide avec des exposants négatifs : faites honneur à l'esprit humain – comme dirait Jean Dieudonné – et ne l'imitez pas.
3. Montrer :
$$\int_0^1 x^5 \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 6^{-2\,n-1} (-1)^n.$$
En déduire la valeur exacte et simplifiée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^5 \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}x$.

Corrigé 1.

← page 1

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(n+2)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(n+2)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+2)x)}}{n+2}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(n+2)x)}}{n+2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(n+2)x)}}{n+2} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(n+2)x)}}{n+2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(n+2)x)}}{n+2}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(n+2)x)}}{(n+2)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+2)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-2x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-2x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = xe^{(-(n+2)x)}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} xe^{(-(n+2)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-2x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-2x)} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{xe^{(-2x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+2)^2}.$$
Or : $\frac{1}{(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.
Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+2)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-2x)} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{xe^{(-2x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$
c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-2x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2},$$
d'où le résultat.

Corrigé 2. ← page 1

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^{2\,n} \ln(x)^k$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(k+1)\ln(x)^k}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^{2\,n}$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{2\,n+1}\ln(x)^{k+1}}{2\,n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{2\,n+1}\ln(x)^{k+1}}{2\,n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2\,n+1}\ln(x)^{k+1}}{2\,n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(k+1)x^{2\,n}\ln(x)^k}{2\,n+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{(k+1)x^{2\,n}\ln(x)^k}{2\,n+1}\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{2\,n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k\,k!}{(2\,n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\displaystyle\frac{(-1)^0 0!}{(2\,n+1)^{0+1}} = \frac{1}{2\,n+1}$, et :
$$\int_0^1 x^{2\,n}(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2\,n+1},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^{2\,n}(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(2\,n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{2\,n+1}\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)^k\,\mathrm{d}x &\overset{(P_k)}{=} -\frac{k+1}{2\,n+1} \times \frac{(-1)^k\,k!}{(2\,n+1)^{k+1}}\\ &= \frac{(-1)^{k+1}\,(k+1)!}{(2\,n+1)^{k+2}},\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^{27}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(x)^{27}}{1-(-x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^{27}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \left(-x^2\right)^n \ln(x)^{27}\,\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1[,\quad f_n(x) = \left(-x^2\right)^n \ln(x)^{27}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0{,}1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-x^2\right)^n\ln(x)^{27}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^{27}$ près, d'une série géométrique de raison $x^2 \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^{27}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^{2\,n} = \dfrac{\ln(x)^{27}}{1+x^2}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=27$) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1-(-1)^n\left(-x^2\right)^n\ln(x)^{27}\,\mathrm{d}x=\frac{27!}{(2\,n+1)^{28}}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0{,}1]$, de sorte que : $|\ln(x)|=-\ln(x)$.) Or : $\frac{1}{(2\,n+1)^{28}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2^{28}n^{28}}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{28}}$ est une série de Riemann d'exposant $28>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|f_n|=\sum_{n\geqslant 0}\frac{27!}{(2\,n+1)^{28}}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f:x\mapsto\ln(x)^{27}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^{2\,n}=\frac{\ln(x)^{27}}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0{,}1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1\frac{\ln(x)^{27}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)^{27}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-(-1)^n\,27!}{(2\,n+1)^{28}},$$

d'où le résultat.

Corrigé 3. ← page 1

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x^n\ln(x)^k$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x\mapsto\ln(x)^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x\mapsto\frac{(k+1)\ln(x)^k}{x}$;
   — on intègre $x\mapsto x^n$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}=0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x^n\ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^1 x^n\ln(x)^k\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}=\frac{1}{n+1}$, et :
   $$\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1},$$
   et on a donc bien : $\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x=\frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $k\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x^n\ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n\ln(x)^k\,\mathrm{d}x&\overset{(\mathrm{P}_k)}{=}-\frac{k+1}{n+1}\times\frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}}\\&=\frac{(-1)^{k+1}\,(k+1)!}{(n+1)^{k+2}},\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Or, pour tout $x \in]0{,}1[$, on a : $\frac{1}{2}\,x \in]-1{,}1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\frac{1}{2}\,x$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{2}\,x\right) \ln(x)^{25}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^{25} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n+1}}{2n+1} \mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln(x)^{25}\, \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} \mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n+1} \ln(x)^{25}}{2\,n+1}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0{,}1[$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n+1} \ln(x)^{25}}{2\,n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^{25}$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1{,}1[$, et donc en particulier en $\frac{1}{2}\,x \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1[$, et sa somme
$$f : x \mapsto \ln(x)^{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} = \arctan\left(\frac{1}{2}\,x\right) \ln(x)^{25}$$
est évidemment continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 25$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n+1} \ln(x)^{25}}{2\,n+1} \mathrm{d}x = \frac{25!}{67108864\,(n+1)^{26}}\, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0{,}1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure et va même probablement vous paraître étrange : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{67108864\,(n+1)^{26}}\right) = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{26}}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{26}}$ est d'exposant $26 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)^{25} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\,x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} = \arctan\left(\frac{1}{2}\,x\right) \ln(x)^{25}$ est intégrable sur $]0{,}1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{2}\,x\right) \ln(x)^{25}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-25!}{67108864\,(n+1)^{26}}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1},$$

d'où le résultat.

Corrigé 4. ← page 2

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(4\,n+53)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(4\,n+53)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(4\,n+53)x)}}{4\,n+53}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(4\,n+53)x)}}{4\,n+53} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(4\,n+53)x)}}{4\,n+53} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(4\,n+53)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(4\,n+53)x)}}{4\,n+53}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(4\,n+53)x)}}{4\,n+53}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(4\,n+53)x)}}{4\,n+53}\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{4\,n+53}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4\,n+53)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(4\,n+53)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\displaystyle\frac{0!}{(4\,n+53)^{0+1}} = \frac{1}{4\,n+53}$, et :
$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(4\,n+53)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(4\,n+53)x)}}{4\,n+53}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\,n+53},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(4\,n+53)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(4\,n+53)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(4\,n+53)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{4\,n+53}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4\,n+53)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{4\,n+53} \times \frac{k!}{(4\,n+53)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(4\,n+53)^{k+2}},$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4 e^{(-53\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^4 e^{(-53\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-4\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^4 e^{(-(4\,n+53)x)}\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^4 e^{(-(4\,n+53)x)}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^4 e^{(-(4\,n+53)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^4 e^{(-53\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-4\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^4 e^{(-53\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-4\,x)}\right)^n = \frac{x^4 e^{(-53\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 4$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^4 e^{(-(4\,n+53)x)}\mathrm{d}x = \frac{24}{(4\,n+53)^5}.$$

Or : $\frac{1}{(4\,n+53)^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4^5 n^5}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^5}$ est une série de Riemann d'exposant $5 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{24}{(4\,n+53)^5}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^4 e^{(-53\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-4\,x)}\right)^n = \frac{x^4 e^{(-53\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4 e^{(-53\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24}{(4\,n+53)^5},$$

d'où le résultat.

Corrigé 5. ← page 2

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(n+4)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(n+4)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+4)x)}}{n+4}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(n+4)x)}}{n+4} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(n+4)x)}}{n+4} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(n+4)x)}}{n+4}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(n+4)x)}}{n+4}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(n+4)x)}}{n+4}\mathrm{d}x.$$

   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+4}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(n+4)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\frac{0!}{(n+4)^{0+1}} = \frac{1}{n+4}$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+4)x)}}{n+4}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+4},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(n+4)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{n+4}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{n+4} \times \frac{k!}{(n+4)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(n+4)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{27}e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{27}e^{(-4\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{27}e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^{27}e^{(-(n+4)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{27}e^{(-(n+4)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^{27}e^{(-4\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^{27}e^{(-4\,x)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{x^{27}e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 27$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{27}e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x = \frac{27!}{(n+4)^{28}}.$$

Or : $\displaystyle\frac{1}{(n+4)^{28}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{28}}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{28}}$ est une série de Riemann d'exposant $28 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{27!}{(n+4)^{28}}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^{27}e^{(-4\,x)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{x^{27}e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{27}e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{27!}{(n+4)^{28}},$$

d'où le résultat.

Corrigé 6.

← page 2

1. On a, pour rappel, le développement en série entière usuel suivant :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Soit $x \in]-1{,}1[$. Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans l'identité ci-dessus. Pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a $-x \in]-1{,}1[$, et on peut donc évaluer en $-x$ cette égalité pour obtenir :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x)^n.$$

Simplifions le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} \cdot (2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard: on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1{,}1[$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $(-x)^n = (-1)^n x^n$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n,$$

d'où le résultat, étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$.

2. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-(n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^2$, qui est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto 2\,x$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(n+1)x)}$, qui est continue sur $[0, +\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{x^2 e^{(-(n+1)x)}}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x^2 e^{(-(n+1)x)}}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2 e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,x e^{(-(n+1)x)}}{n+1} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2\,x e^{(-(n+1)x)}}{n+1} \mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant $x \mapsto x$ et en intégrant le facteur exponentiel. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{x e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1} \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+1)x)}}{(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{2}{(n+1)^3},$$

d'où le résultat.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{x}{\sqrt{-x+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^{n+1}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in]-1{,}1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{(-x)}}{\sqrt{-e^{(-x)}+1}} \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\binom{2\,n}{n} e^{(-(n+1)x)}}{2^{2\,n}} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^2 \binom{2\,n}{n} e^{(-(n+1)x)}}{2^{2\,n}}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^2 \binom{2\,n}{n} e^{(-(n+1)x)}}{2^{2\,n}}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1{,}1[$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2\,n}{n} e^{(-(n+1)x)}}{2^{2\,n}} = \frac{x^2 e^{(-x)}}{\sqrt{-e^{(-x)}+1}}$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \binom{2\,n}{n} e^{(-(n+1)x)}}{2^{2\,n}} \mathrm{d}x = \frac{2\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}(n+1)^3}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure et va même probablement vous paraître étrange : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (cela ne va pas du tout de soi : utiliser la formule de Stirling pour montrer que l'on a : $\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{2^{2n}} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^{2n}} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2\,n}{n} e^{(-(n+1)x)}}{2^{2\,n}} = \frac{x^2 e^{(-x)}}{\sqrt{-e^{(-x)}+1}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{(-x)}}{\sqrt{-e^{(-x)}+1}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\binom{2n}{n}}{2^{2n}(n+1)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 7. ← page 2

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-(2n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^2$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 2x$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(2n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2 e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{x^2 e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2 e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2x e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2x e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} \mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant $x \mapsto x$ et en intégrant le facteur exponentiel. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} x e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{x e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3},$$

d'où le résultat.

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{e^{(2x)}-1} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{(-x)}}{1 - \underbrace{e^{(-2x)}}_{<1}} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-2x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(2x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-2x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1,1[$) avec $u = e^{(-2x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^2 e^{(-(2n+1)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^2 e^{(-(2n+1)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^2 e^{(-1)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-2x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^2 e^{(-1)} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-2x)}\right)^n = \frac{x^2 e^x}{e^{(2x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x=\frac{2}{(2\,n+1)^3}.$$

Or : $\dfrac{1}{(2\,n+1)^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2^3n^3}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|=\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{2}{(2\,n+1)^3}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f:x\mapsto x^2e^{(-1)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n=\dfrac{x^2e^x}{e^{(2\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^x}{e^{(2\,x)}-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2\,n+1)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 8. ← page 2

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\right|\leqslant e^{(-8\,(n+1)x)}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-8\,(n+1)x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(8\,n-2i+8)x)}\mathrm{d}x\right)&=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(8\,n-2i+8)x)}}{-8\,n+2i-8}\right]_0^{+\infty}\right)\\&=\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-8\,n+2i-8}\right)\\&=\mathrm{Im}\left(-\frac{-8\,n-2i-8}{64\,(n+1)^2+4}\right)\\&=\frac{1}{2\left(16\,(n+1)^2+1\right)}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Or, pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-8\,x)}\in]-1,1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-8\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\ln\left(e^{(-8\,x)}+1\right)\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{(-8\,(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x\\&\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(2\,x)\frac{(-1)^n\,e^{(-8\,(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\, e^{(-8\,(n+1)x)} \sin(2\,x)}{n+1}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, e^{(-8\,(n+1)x)} \sin(2\,x)}{n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(2\,x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1,1[$, et donc en particulier en $e^{(-8\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto \sin(2\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{(-8\,(n+1)x)}}{n+1} = \ln\left(e^{(-8\,x)}+1\right)\sin(2\,x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} |\sin(2\,x)|e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{(-8\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\left[\frac{e^{(-8\,(n+1)x)}}{-8\,n-8}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{8\,(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{8\,(n+1)^2}$ converge en trouvant un équivalent de son terme général et en concluant par comparaison. On a aisément :

$$\frac{1}{8\,(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}.$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{8\,(n+1)^2}$ converge. Toujours par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \sin(2\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{(-8\,(n+1)x)}}{n+1} = \ln\left(e^{(-8\,x)}+1\right)\sin(2\,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(e^{(-8\,x)}+1\right)\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\left(16\,(n+1)^2+1\right)(n+1)},$$

d'où le résultat.

Corrigé 9. ← page 3

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(n+2)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité

grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(n+2)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+2)x)}}{n+2}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(n+2)x)}}{n+2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(n+2)x)}}{n+2} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(n+2)x)}}{n+2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(n+2)x)}}{n+2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(n+2)x)}}{n+2}\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+2}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(n+2)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\displaystyle\frac{0!}{(n+2)^{0+1}} = \frac{1}{n+2}$, et :
$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+2)x)}}{n+2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+2},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(n+2)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{n+2}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{n+2} \times \frac{k!}{(n+2)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(n+2)^{k+2}},$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3 e^{(-2\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^3 e^{(-(n+2)x)}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^3 e^{(-(n+2)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^3 e^{(-2\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^3 e^{(-2\,x)} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{x^3 e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 3$) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3 e^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{6}{(n+2)^4}.$$
Or : $\displaystyle\frac{1}{(n+2)^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann d'exposant $4 > 1$, donc elle converge.
Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{6}{(n+2)^4}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^3 e^{(-2\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \dfrac{x^3 e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-2\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(n+2)^4},$$

d'où le résultat.

Corrigé 10. ← page 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^2 \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^2$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{3}\,x^3$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{3}\,x^3 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{3}\,x^3 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^3 \ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\,(n+1)x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{3}\,(n+1)x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{3}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 3^{-n-1}\,(-1)^n\,n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}} = \dfrac{1}{3}$, et :

$$\int_0^1 x^2 (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

   et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{3}\int_0^1 x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{3} \times 3^{-n-1}\,(-1)^n\,n! \\ &= 3^{-n-2}\,(-1)^{n+1}\,(n+1)!,\end{aligned}$$

   d'où la proposition au rang $n+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $2\,\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $2\,\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \sin(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2\,x)^{2\,n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^2 \frac{(-1)^n\,(2\,\ln(x))^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\, x^2\, (2\,\ln(x))^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0{,}1]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, x^2\, (2\,\ln(x))^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $2\,\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1]$, et sa somme $f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, (2\,\ln(x))^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x^2 \sin(2\,\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^2\,(2\,\ln(x))^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x = 3^{-2\,n-2}2^{2\,n+1}.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{4}{9} \in]-1{,}1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, (2\,\ln(x))^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x^2 \sin(2\,\ln(x))$ est intégrable sur $]0{,}1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2\,n-2}2^{2\,n+1}\,(-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)^n = -\frac{2}{9}\frac{1}{1+\frac{4}{9}} = -\frac{2}{13}.$$

Corrigé 11. ← page 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\right| \leqslant e^{(-(2\,n+1)x)}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-i+1)x)}\mathrm{d}x\right) &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i+1)x)}}{-2\,n+i-1}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i-1}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i-1}{(2\,n+1)^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{(2\,n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Or, pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)}\in]-1,1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\arctan\left(e^{(-x)}\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2n+1}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(x)\,\frac{(-1)^n\,e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\,e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)}{2\,n+1}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x\in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n\,e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)}{2\,n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1,1[$, et donc en particulier en $e^{(-x)}\in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $\displaystyle f : x\mapsto \sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = \arctan\left(e^{(-x)}\right)\sin(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,n+1}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{2\,n+1}\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\,n+1}\left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{-2\,n-1}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{(2\,n+1)^2}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2\,n+1)^2}$ converge en trouvant un équivalent de son terme général et en concluant par comparaison. On a aisément :

$$\frac{1}{(2\,n+1)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n^2}.$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2\,n+1)^2}$ converge. Toujours par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f\,:\,x\mapsto \sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}=\arctan\left(e^{(-x)}\right)\sin(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\arctan\left(e^{(-x)}\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\left((2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)},$$

d'où le résultat.

Corrigé 12. ← page 3

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-6\,(2\,n+1)x)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-6\,(2\,n+1)x)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-6\,(2\,n+1)x)}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{(-6\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{(-6\,(2\,n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-6\,(2\,n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x=\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(12\,n-i+6)x)}\mathrm{d}x\right)&=\operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(12\,n-i+6)x)}}{-12\,n+i-6}\right]_0^{+\infty}\right)\\&=\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-12\,n+i-6}\right)\\&=\operatorname{Im}\left(-\frac{-12\,n-i-6}{36\,(2\,n+1)^2+1}\right)\\&=\frac{1}{36\,(2\,n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-6\,x)}\in\mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-6\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin(x)\sin\left(e^{(-6\,x)}\right)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{(-6\,(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x\\&\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(x)\,\frac{(-1)^n\,e^{(-6\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x)=\frac{(-1)^n\,e^{(-6\,(2\,n+1)x)}\sin(x)}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n e^{(-6\,(2\,n+1)x)} \sin(x)}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-6\,x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{(-6\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = \sin(x)\sin\left(e^{(-6\,x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)!}\int_0^{+\infty} |\sin(x)|e^{(-6\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{(2\,n+1)!}\int_0^{+\infty} e^{(-6\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2\,n+1)!}\left[\frac{e^{(-6\,(2\,n+1)x)}}{-12\,n-6}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{6\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{6\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{6\,(2\,n+3)(2\,n+3)!}}{\frac{1}{6\,(2\,n+1)(2\,n+1)!}} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{(2\,n+3)!}{(2\,n+1)!} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{6\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{1} |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{(-6\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = \sin(x)\sin\left(e^{(-6\,x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin\left(e^{(-6\,x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(36\,(2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 13. ← page 4

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(3\,n+17)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(3\,n+17)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(3\,n+17)x)}}{3\,n+17}$.

Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(3n+17)x)}}{3n+17} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(3n+17)x)}}{3n+17} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(3n+17)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(3n+17)x)}}{3n+17}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(3n+17)x)}}{3n+17}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(3n+17)x)}}{(3n+17)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(3n+17)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-17x)}}{1-e^{(-3x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-17x)} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-3x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} xe^{(-(3n+17)x)}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = xe^{(-(3n+17)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x\in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} xe^{(-(3n+17)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-17x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-3x)}\in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x\mapsto xe^{(-17x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-3x)}\right)^n = \frac{xe^{(-17x)}}{1-e^{(-3x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(3n+17)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(3n+17)^2}.$$

Or : $\frac{1}{(3n+17)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^2n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(3n+17)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x\mapsto xe^{(-17x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-3x)}\right)^n = \frac{xe^{(-17x)}}{1-e^{(-3x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{(-17x)}}{1-e^{(-3x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+17)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 14. ← page 4

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x\ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :

— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2}x^2 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{2}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 2^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}} = \dfrac{1}{2}$, et :

$$\int_0^1 x^1(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^1(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{2}\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{2}\times 2^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 2^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1],\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 -\frac{x\ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x=2^{-2\,n-2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1}=(-\ln(x))^{2n+1}=(-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1}=-(\ln(x))^{2n+1}$.)
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}\in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1|f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x\mapsto x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}=x\sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-2\,n-2}\,(-1)^{n+1}\,,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{5}.$$

Corrigé 15. ← page 4

1. L'application $x\mapsto xe^{(-2\,(n+2)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe).
Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto 1$;
— on intègre $x\mapsto e^{(-2\,(n+2)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x\mapsto -\frac{e^{(-2\,(n+2)x)}}{2\,(n+2)}$.
Comme $\lim_{x\to 0}-\frac{xe^{(-2\,(n+2)x)}}{2\,(n+2)}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}-\frac{xe^{(-2\,(n+2)x)}}{2\,(n+2)}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty}xe^{(-2\,(n+2)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{xe^{(-2\,(n+2)x)}}{2\,(n+2)}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,(n+2)x)}}{2\,(n+2)}\mathrm{d}x=\left[\frac{e^{(-2\,(n+2)x)}}{4\,(n+2)^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{4\,(n+2)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{(-4\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}xe^{(-4\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}xe^{(-2\,(n+2)x)}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x)=xe^{(-2\,(n+2)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x\in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0}f_n(x)=\sum_{n\geqslant 0}xe^{(-2\,(n+2)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-4\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-2\,x)}\in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions

$\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x e^{(-4\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-2\,x)}\right)^n = \dfrac{x e^{(-4\,x)}}{1 - e^{(-2\,x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x e^{(-2\,(n+2)x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{4\,(n+2)^2}.$$

Or : $\dfrac{1}{(2\,n+4)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^2 n^2}$, et la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{4\,(n+2)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x e^{(-4\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-2\,x)}\right)^n = \dfrac{x e^{(-4\,x)}}{1 - e^{(-2\,x)}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{(-4\,x)}}{1 - e^{(-2\,x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(n+2)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 16. ← page 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-(n+1)x)} \sin(3\,x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $\left|e^{(-(n+1)x)} \sin(3\,x)\right| \leqslant e^{(-(n+1)x)}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(3\,x)\, \mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(3\,x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-3i+1)x)} \mathrm{d}x\right) &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-3i+1)x)}}{-n+3i-1}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+3i-1}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-3i-1}{(n+1)^2+9}\right)\\ &= \frac{3}{(n+1)^2+9}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$.

On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(3\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(3\,x)\,\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{e^{(-(n+1)x)} \sin(3\,x)}{n!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{(-(n+1)x)} \sin(3\,x)}{n!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(3\,x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto \sin(3\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!} = e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3\,x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} |\sin(3\,x)|e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{e^{(-(n+1)x)}}{-n-1}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{(n+1)n!}.$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)n!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{(n+2)(n+1)!}}{\frac{1}{(n+1)n!}} = \frac{n+1}{n+2}\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)n!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \sin(3\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!} = e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3\,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{\left((n+1)^2+9\right)n!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 17. ← page 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x\ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{2}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 2^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\frac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}} = \frac{1}{2}$, et :
$$\int_0^1 x^1(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$
et on a donc bien : $\int_0^1 x^1(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{2}\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{2}\times 2^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 2^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $n+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1],\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, x \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} =$ $x \sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \mathrm{d}x = 2^{-2\,n-2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x \sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2\,n-2} (-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{5}.$$

Corrigé 18. ← page 5

1. L'application $x \mapsto x e^{(-2\,(4\,n+3)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-2\,(4\,n+3)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-2\,(4\,n+3)x)}}{2\,(4\,n+3)}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\frac{x e^{(-2\,(4\,n+3)x)}}{2\,(4\,n+3)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{x e^{(-2\,(4\,n+3)x)}}{2\,(4\,n+3)} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x e^{(-2\,(4\,n+3)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{x e^{(-2\,(4\,n+3)x)}}{2\,(4\,n+3)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,(4\,n+3)x)}}{2\,(4\,n+3)} \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-2\,(4\,n+3)x)}}{4\,(4\,n+3)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\,(4\,n+3)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{(2\,x)}}{e^{(8\,x)}-1} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{(-6\,x)}}{1-\underbrace{e^{(-8\,x)}}_{<1}} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x e^{(-6\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x e^{(-2\,(4\,n+3)x)} \mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(8\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-8\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\displaystyle\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour

$u \in]-1{,}1[)$ avec $u = e^{(-8\,x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = xe^{(-2\,(4\,n+3)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} xe^{(-2\,(4\,n+3)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-6)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-8\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-6)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n = \frac{xe^{(2\,x)}}{e^{(8\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-2\,(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,(4\,n+3)^2}.$$

Or : $\frac{1}{(8\,n+6)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8^2n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4\,(4\,n+3)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-6)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n = \frac{xe^{(2\,x)}}{e^{(8\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(2\,x)}}{e^{(8\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\,(4\,n+3)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 19. ← page 5

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(n+3)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(n+3)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+3)x)}}{n+3}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(n+3)x)}}{n+3} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(n+3)x)}}{n+3} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(n+3)x)}}{n+3}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(n+3)x)}}{n+3}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(n+3)x)}}{n+3}\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+3}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(n+3)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\displaystyle\frac{0!}{(n+3)^{0+1}} = \frac{1}{n+3}$, et :
$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+3)x)}}{n+3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+3},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(n+3)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{n+3}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{n+3} \times \frac{k!}{(n+3)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(n+3)^{k+2}},$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{11}e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{11}e^{(-3\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{11}e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^{11}e^{(-(n+3)x)}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{11}e^{(-(n+3)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^{11}e^{(-3\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto x^{11}e^{(-3\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{x^{11}e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=11$) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{11}e^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{11!}{(n+3)^{12}}.$$
Or : $\displaystyle\frac{1}{(n+3)^{12}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{12}}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{12}}$ est une série de Riemann d'exposant $12 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{11!}{(n+3)^{12}}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\displaystyle f : x \mapsto x^{11}e^{(-3\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{x^{11}e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :
$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$
c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{11}e^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{11!}{(n+3)^{12}},$$
d'où le résultat.

Corrigé 20. ← page 5

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
Or, pour tout $x \in]0{,}1[$, on a : $\frac{1}{11}\,x \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\frac{1}{11}\,x$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{11}\,x\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{11}\,x\right)^{2\,n}}{(2n)!}\mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln(x)\,\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{11}\,x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1[,\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{11}\,x\right)^{2\,n}\ln(x)}{(2\,n)!}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0{,}1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{11}\,x\right)^{2\,n}\ln(x)}{(2\,n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\frac{1}{11}\,x \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{11}\,x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!} = \cos\left(\frac{1}{11}\,x\right)\ln(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{\left(\frac{1}{11}\,x\right)^{2\,n}\ln(x)}{(2\,n)!}\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{11}\right)^{2\,n}}{(2\,n+1)^2\,(2\,n)!}.$$
(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0{,}1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Pour justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{\left(\frac{1}{11}\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :
$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2\,n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{11}x\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\frac{1}{11}x\right) \ln(x)$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{11}x\right) \ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{\left(\frac{1}{11}\right)^{2n} (-1)^n}{(2n+1)^2\,(2n)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 21. ← page 6

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(2n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(2n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{2n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(2n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\frac{0!}{(2n+1)^{0+1}} = \frac{1}{2n+1}$, et :
   $$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2n+1},$$
   et on a donc bien : $\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(2n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{2n+1}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{2n+1} \times \frac{k!}{(2n+1)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(2n+1)^{k+2}},$$
   d'où la proposition au rang $k+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} x^{25} \sinh\left(e^{(-x)}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{25} \frac{e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^{25} e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{25} e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^{25} près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^{25} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)!} = x^{25} \sinh\left(e^{(-x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 25$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^{25} e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x = \frac{25!}{(2n+1)^{26}} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{(2n+1)!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2n+1)^{26}}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{26}}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{26}}$ est d'exposant $26 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^{25} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)!} = x^{25} \sinh\left(e^{(-x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x^{25} \sinh\left(e^{(-x)}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{25!}{(2n+1)^{26}} \frac{1}{(2n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 22. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (x)^n\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = x^n \ln(x).$$
   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} x^n \ln(x)$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, d'une série géométrique de raison $x \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
   — il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$
   (Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Or : $\dfrac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.
   Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n| = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.
   Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :
   $$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$
   c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :
   $$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2},$$
   d'où le résultat.

Corrigé 23. ← page 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-3\,(2\,n+1)x)} \sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\right| \leqslant e^{(-3\,(2\,n+1)x)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-3\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(6\,n-i+3)x)}\mathrm{d}x\right) &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(6\,n-i+3)x)}}{-6\,n+i-3}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-6\,n+i-3}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-6\,n-i-3}{9\,(2\,n+1)^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{9\,(2\,n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-3\,x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-3\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin(x) \sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x)\,\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)} \sin(x)}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)} \sin(x)}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-3\,x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = \sin(x) \sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)!} \int_0^{+\infty} |\sin(x)|\,e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{(2\,n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2\,n+1)!} \left[\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{-6\,n-3}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{3\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{3\,(2\,n+3)(2\,n+3)!}}{\frac{1}{3\,(2\,n+1)(2\,n+1)!}}=\frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{(2\,n+3)!}{(2\,n+1)!}=\frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4\,n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0<1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f\,:\,x\mapsto\sin(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}=\sin(x)\sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\sin(x)\sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(9\,(2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 24. ← page 6

1. L'application $x\mapsto x^2e^{(-(n+4)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto x^2$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto 2\,x$;
— on intègre $x\mapsto e^{(-(n+4)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x\mapsto-\frac{e^{(-(n+4)x)}}{n+4}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0}-\frac{x^2e^{(-(n+4)x)}}{n+4}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2e^{(-(n+4)x)}}{n+4}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty}x^2e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^2e^{(-(n+4)x)}}{n+4}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\,xe^{(-(n+4)x)}}{n+4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2\,xe^{(-(n+4)x)}}{n+4}\mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant $x\mapsto x$ et en intégrant le facteur exponentiel. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty}xe^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{xe^{(-(n+4)x)}}{n+4}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-(n+4)x)}}{n+4}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-(n+4)x)}}{(n+4)^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{(n+4)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^{+\infty}x^2e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x=\frac{2}{(n+4)^3},$$

d'où le résultat.

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2e^{(-4\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-x)}\right)^n\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^2e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x)=x^2e^{(-(n+4)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^2 e^{(-(n+4)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^2e^{(-4\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^2e^{(-4\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \dfrac{x^2e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(n+4)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{(n+4)^3}.$$

Or : $\dfrac{1}{(n+4)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, donc elle converge.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2}{(n+4)^3}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2e^{(-4\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \dfrac{x^2e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{(-4\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+4)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 25. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (x)^n\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = x^n \ln(x).$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^n \ln(x)$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, d'une série géométrique de raison $x \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\ln(x)}{1-x}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 -x^n \ln(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Or : $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\ln(x)}{1-x}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 26. ← page 7

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(2\,n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(2\,n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$.

On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\sin\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x\frac{(-1)^n\,e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x)=\frac{(-1)^n\,xe^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x\in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n\,xe^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)}\in\mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x\mapsto x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = x\sin\left(e^{(-x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x=\frac{1}{(2\,n+1)^2\,(2\,n+1)!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{(2\,n+1)!}$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2\,n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x\mapsto x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = x\sin\left(e^{(-x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x\sin\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^2\,(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 27. ← page 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^{12} \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^{12}$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{13} x^{13}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{13} x^{13} \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{13} x^{13} \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x^{12} \ln(x)^{n+1} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{13} x^{13} \ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{13}(n+1)x^{12} \ln(x)^n \, \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{13}(n+1)x^{12} \ln(x)^n \, \mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{13}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\int_0^1 x^{12} \ln(x)^n \, \mathrm{d}x = 13^{-n-1} (-1)^n n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\frac{(-1)^0 0!}{(13)^{0+1}} = \frac{1}{13}$, et :
   $$\int_0^1 x^{12} (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{13} x^{13}\right]_0^1 = \frac{1}{13},$$
   et on a donc bien : $\int_0^1 x^{12}(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(13)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x^{12} \ln(x)^{n+1} \, \mathrm{d}x = -\frac{n+1}{13} \int_0^1 x^{12} \ln(x)^n \, \mathrm{d}x &\overset{(P_n)}{=} -\frac{n+1}{13} \times 13^{-n-1} (-1)^n n! \\ &= 13^{-n-2} (-1)^{n+1} (n+1)!,\end{aligned}$$
   d'où la proposition au rang $n+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x^{12} \sin(\ln(x)) \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{12} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{12} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{12} \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{12} \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^{12} près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x^{12} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^{12} \sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^{12} \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x = 13^{-2n-2}.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{169} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^{12} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^{12} \sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^{12} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 13^{-2n-2} (-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^{12} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{169} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{169}\right)^n = -\frac{1}{169} \frac{1}{1+\frac{1}{169}} = -\frac{1}{170}.$$

Corrigé 28. ← page 7

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(2n+3)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(2n+3)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2n+3)x)}}{2n+3}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+3)x)}}{2n+3} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+3)x)}}{2n+3} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(2n+3)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+3)x)}}{2n+3}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(2n+3)x)}}{2n+3}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(2n+3)x)}}{2n+3}\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{2n+3}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(2n+3)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\frac{0!}{(2n+3)^{0+1}} = \frac{1}{2n+3}$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(2n+3)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(2n+3)x)}}{2n+3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2n+3},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(2n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(2n+3)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $k\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(2n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{2n+3}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+3)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{2n+3}\times\frac{k!}{(2n+3)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(2n+3)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3e^{(-3x)}}{1-e^{(-2x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3e^{(-3x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2x)}\right)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^3e^{(-(2n+3)x)}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = x^3e^{(-(2n+3)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x\in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^3e^{(-(2n+3)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^3e^{(-3x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-2x)}\in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x\mapsto x^3e^{(-3x)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2x)}\right)^n = \frac{x^3e^{(-3x)}}{1-e^{(-2x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=3$) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3e^{(-(2n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{6}{(2n+3)^4}.$$

Or : $\displaystyle\frac{1}{(2n+3)^4}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2^4n^4}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann d'exposant $4>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{6}{(2n+3)^4}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x\mapsto x^3e^{(-3x)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2x)}\right)^n = \frac{x^3e^{(-3x)}}{1-e^{(-2x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3e^{(-3x)}}{1-e^{(-2x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{(2n+3)^4},$$

d'où le résultat.

Corrigé 29. ← page 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2}x^2 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{2}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 2^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}} = \dfrac{1}{2}$, et :
   $$\int_0^1 x^1(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$
   et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^1(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{2}\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(P_n)}{=} -\frac{n+1}{2}\times 2^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 2^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$
   d'où la proposition au rang $n+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1],\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent

la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$ $x\sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x\ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x = 2^{-2n-2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2n-2}(-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{5}.$$

Corrigé 30. ← page 8

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-2(8n+7)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-2(8n+7)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-2(8n+7)x)}}{2(8n+7)}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-2(8n+7)x)}}{2(8n+7)} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-2(8n+7)x)}}{2(8n+7)} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-2(8n+7)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-2(8n+7)x)}}{2(8n+7)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-2(8n+7)x)}}{2(8n+7)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-2(8n+7)x)}}{2(8n+7)}\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{2(8n+7)}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-2(8n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(16n+14)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\frac{0!}{(16n+14)^{0+1}} = \frac{1}{2(8n+7)}$, et :
   $$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-2(8n+7)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-2(8n+7)x)}}{2(8n+7)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2(8n+7)},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-2\,(8\,n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(16\,n+14)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-2\,(8\,n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{2\,(8\,n+7)}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-2\,(8\,n+7)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{2\,(8\,n+7)}\times\frac{k!}{(16\,n+14)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(16\,n+14)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^4e^{(2\,x)}}{e^{(16\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x^4e^{(-14\,x)}}{1-\underbrace{e^{(-16\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^4e^{(-14\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-16\,x)}\right)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^4e^{(-2\,(8\,n+7)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(16\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-16\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\displaystyle\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1{,}1[$) avec $u = e^{(-16\,x)}$.

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^4e^{(-2\,(8\,n+7)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^4e^{(-2\,(8\,n+7)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^4e^{(-14)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-16\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^4e^{(-14)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-16\,x)}\right)^n = \frac{x^4e^{(2\,x)}}{e^{(16\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=4$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^4e^{(-2\,(8\,n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{3}{4\,(8\,n+7)^5}.$$

Or : $\displaystyle\frac{1}{(16\,n+14)^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16^5n^5}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^5}$ est une série de Riemann d'exposant $5>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{3}{4\,(8\,n+7)^5}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\displaystyle f : x \mapsto x^4e^{(-14)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-16\,x)}\right)^n = \frac{x^4e^{(2\,x)}}{e^{(16\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^4e^{(2\,x)}}{e^{(16\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{4\,(8\,n+7)^5},$$

d'où le résultat.

Corrigé 31. ← page 8

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^2$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 2\,x$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-3\,(2\,n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{3\,(2\,n+1)}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{3\,(2\,n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^2 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{3\,(2\,n+1)} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{3\,(2\,n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,x e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{3\,(2\,n+1)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2\,x e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{3\,(2\,n+1)}\mathrm{d}x.$$
   Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant $x \mapsto x$ et en intégrant le facteur exponentiel. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :
$$\int_0^{+\infty} x e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{3\,(2\,n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{3\,(2\,n+1)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{9\,(2\,n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{9\,(2\,n+1)^2}.$$
   On a donc, en conclusion :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{27\,(2\,n+1)^3},$$
   d'où le résultat.
2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-3\,x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-3\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 \frac{(-1)^n e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}.$$
   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^2 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-3\,x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = x^2 \sin\left(e^{(-3\,x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x=\frac{2}{27\,(2\,n+1)^3\,(2\,n+1)!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{(2\,n+1)!}$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2\,n+1)^3}\right)=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est d'exposant $3>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f:x\mapsto x^2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}=x^2\sin\left(e^{(-3\,x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}x^2\sin\left(e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^n}{27\,(2\,n+1)^3\,(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 32. ← page 8

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x^2\ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto\ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x\mapsto\frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x\mapsto x^2$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x\mapsto\frac{1}{3}x^3$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}x^3\ln(x)^{n+1}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{3}x^3\ln(x)^{n+1}=0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x^2\ln(x)^{n+1}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)^{n+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(n+1)x^2\ln(x)^n\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{3}(n+1)x^2\ln(x)^n\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{3}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln(x)^n\mathrm{d}x=3^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}}=\dfrac{1}{3}$, et :
$$\int_0^1 x^2(\ln(x))^0\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1} \mathrm{d}x = -\frac{n+1}{3}\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{3} \times 3^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 3^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x)) \mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^2 \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n}}{(2n)!} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2 \ln(x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n x^2 \ln(x)^{2n}}{(2n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^2 \cos(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2 \ln(x)^{2n}}{(2n)!} \mathrm{d}x = 3^{-2n-1}.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{9} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\displaystyle f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^2 \cos(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n-1}(-1)^n,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{3}{10}.$$

Corrigé 33. ← page 9

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)^k$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(k+1)\ln(x)^k}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x.$$

   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\displaystyle\frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \frac{1}{n+1}$, et :

$$\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

   et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_k)}{=} -\frac{k+1}{n+1} \times \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}},\end{aligned}$$

   d'où la proposition au rang $k+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^6}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(x)^6}{1-(-x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^6 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-x)^n \ln(x)^6\,\mathrm{d}x.$$

   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = (-x)^n \ln(x)^6.$$

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 0} (-x)^n \ln(x)^6$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^6$ près, d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^6 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{\ln(x)^6}{1+x}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 6$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)^n (-x)^n \ln(x)^6 \, \mathrm{d}x = \frac{6!}{(n+1)^7}.$$

Or : $\frac{1}{(n+1)^7} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^7}$, et la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^7}$ est une série de Riemann d'exposant $7 > 1$, donc elle converge.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^1 |f_n| = \sum_{n \geqslant 0} \frac{6!}{(n+1)^7}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)^6 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{\ln(x)^6}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^6}{1+x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n \ln(x)^6 \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, 6!}{(n+1)^7},$$

d'où le résultat.

Corrigé 34. ← page 9

1. On a, pour rappel, le développement en série entière usuel suivant :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans l'identité ci-dessus. Alors :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (x)^n.$$

Simplifions le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} \cdot (2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard: on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!}.$$

On en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (-1)^n x^n,$$

d'où le résultat, étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in]-1{,}1[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\right| \leqslant e^{(-2\,(n+1)x)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-i+2)x)} \mathrm{d}x\right) &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i+2)x)}}{-2\,n+i-2}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i-2}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i-2}{4\,(n+1)^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\,(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (-1)^n x^{n+1}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-2\,x)} \in]-1{,}1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-2\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{\sqrt{e^{(-2\,x)}+1}} \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (-1)^n e^{(-2\,(n+1)x)} \mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x) \frac{(-1)^n \binom{2\,n}{n} e^{(-2\,(n+1)x)}}{2^{2\,n}} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n \binom{2\,n}{n} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)}{2^{2\,n}}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \binom{2\,n}{n} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(x)}{2^{2\,n}}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1{,}1[$, et donc en particulier en $e^{(-2\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \binom{2\,n}{n} e^{(-2\,(n+1)x)}}{2^{2\,n}} = \frac{e^{(-2\,x)} \sin(x)}{\sqrt{e^{(-2\,x)}+1}}$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}}\int_0^{+\infty}|\sin{(x)}|e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}}\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}}\left[\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{-2\,n-2}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{\binom{2\,n}{n}}{2\cdot 2^{2\,n}(n+1)}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2\,n}{n}}{2\cdot 2^{2\,n}(n+1)}$ converge en trouvant un équivalent de son terme général et en concluant par comparaison. En utilisant la formule de Stirling, on sait démontrer que l'on a :

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

On en déduit :

$$\frac{\binom{2\,n}{n}}{2\cdot 2^{2\,n}(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}.$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2\,n}{n}}{2\cdot 2^{2\,n}(n+1)}$ converge. Toujours par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x\mapsto \sin{(x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\binom{2\,n}{n}e^{(-2\,(n+1)x)}}{2^{2\,n}} = \frac{e^{(-2\,x)}\sin{(x)}}{\sqrt{e^{(-2\,x)}+1}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin{(x)}}{\sqrt{e^{(-2\,x)}+1}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\binom{2\,n}{n}}{\left(4\,(n+1)^2+1\right)2^{2\,n}},$$

d'où le résultat.

Corrigé 35. ← page 9

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x^ke^{(-6\,(n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x\mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto(k+1)x^k$;
   — on intègre $x\mapsto e^{(-6\,(n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x\mapsto-\frac{e^{(-6\,(n+1)x)}}{6\,(n+1)}$.
   Comme $\lim_{x\to 0}-\frac{x^{k+1}e^{(-6\,(n+1)x)}}{6\,(n+1)}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^{k+1}e^{(-6\,(n+1)x)}}{6\,(n+1)}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty}x^{k+1}e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-6\,(n+1)x)}}{6\,(n+1)}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^ke^{(-6\,(n+1)x)}}{6\,(n+1)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^ke^{(-6\,(n+1)x)}}{6\,(n+1)}\mathrm{d}x.$$

   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{6\,(n+1)}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(6\,n+6)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\dfrac{0!}{(6\,n+6)^{0+1}} = \dfrac{1}{6\,(n+1)}$, et :
$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-6\,(n+1)x)}}{6\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{6\,(n+1)},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(6\,n+6)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{6\,(n+1)}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-6\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{6\,(n+1)} \times \frac{k!}{(6\,n+6)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(6\,n+6)^{k+2}},$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1{,}1[$, on a :
$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$
Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $e^{(-6\,x)} \in]-1{,}1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-6\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^3 \ln\left(e^{(-6\,x)}+1\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{(-6\,(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^3 \frac{(-1)^n e^{(-6\,(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^3 e^{(-6\,(n+1)x)}}{n+1}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^3 e^{(-6\,(n+1)x)}}{n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^3 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1{,}1[$, et donc en particulier en $e^{(-6\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{(-6\,(n+1)x)}}{n+1} = x^3 \ln\left(e^{(-6\,x)}+1\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 3$) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-6\,(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{216\,(n+1)^5}.$$
Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure et va même probablement vous paraître étrange : elle est choisie

parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^4}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ est d'exposant $4 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^3 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{(-6\,(n+1)x)}}{n+1} = x^3 \ln\left(e^{(-6\,x)} + 1\right)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x^3 \ln\left(e^{(-6\,x)} + 1\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{216\,(n+1)^5},$$

d'où le résultat.

Corrigé 36. ← page 9

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(3\,n+2)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(3\,n+2)x)}$, qui est continue sur $[0, +\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(3\,n+2)x)}}{3\,n+2}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(3\,n+2)x)}}{3\,n+2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(3\,n+2)x)}}{3\,n+2} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(3\,n+2)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(3\,n+2)x)}}{3\,n+2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(3\,n+2)x)}}{3\,n+2}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(3\,n+2)x)}}{(3\,n+2)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(3\,n+2)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(3\,x)} - 1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-2\,x)}}{1 - \underbrace{e^{(-3\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-2\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-3\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{(-(3\,n+2)x)}\mathrm{d}x,$$

   où nous avons factorisé par $e^{(3\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-3\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1,1[$) avec $u = e^{(-3\,x)}$.
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[, \quad f_n(x) = xe^{(-(3\,n+2)x)}.$$

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} xe^{(-(3\,n+2)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-2)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-3\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$

converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-3\,x)}\right)^n = \dfrac{xe^x}{e^{(3\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(3\,n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(3\,n+2)^2}.$$

Or : $\dfrac{1}{(3\,n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3^2n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(3\,n+2)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-3\,x)}\right)^n = \dfrac{xe^x}{e^{(3\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(3\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3\,n+2)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 37. ← page 9

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(n+5)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(n+5)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+5)x)}}{n+5}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(n+5)x)}}{n+5} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(n+5)x)}}{n+5} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(n+5)x)}}{n+5}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(n+5)x)}}{n+5}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(n+5)x)}}{n+5}\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+5}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x = \dfrac{k!}{(n+5)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\dfrac{0!}{(n+5)^{0+1}} = \dfrac{1}{n+5}$, et :
$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(n+5)x)}}{n+5}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n+5},$$
et on a donc bien : $\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x = \dfrac{0!}{(n+5)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{n+5}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{n+5} \times \frac{k!}{(n+5)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(n+5)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3 e^{(-5\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{(-(n+5)x)} \mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^3 e^{(-(n+5)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^3 e^{(-(n+5)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^3 e^{(-5\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^3 e^{(-5\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{x^3 e^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=3$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3 e^{(-(n+5)x)} \mathrm{d}x = \frac{6}{(n+5)^4}.$$

Or : $\frac{1}{(n+5)^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann d'exposant $4>1$, donc elle converge.
Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{6}{(n+5)^4}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^3 e^{(-5\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{x^3 e^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(n+5)^4},$$

d'où le résultat.

Corrigé 38. ← page 10

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\frac{1}{7}\,x \in]-1,1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\frac{1}{7}\,x$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{7}\,x\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n+1}}{2n+1}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \ln(x)\,\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[,\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n+1}\ln(x)}{2\,n+1}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x\in]0,1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n+1}\ln(x)}{2\,n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1,1[$, et donc en particulier en $\frac{1}{7}\,x \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1} = \arctan\left(\frac{1}{7}\,x\right)\ln(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{\left(\frac{1}{7}\,x\right)^{2\,n+1}\ln(x)}{2\,n+1}\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{2\,n+1}}{4\,(2\,n+1)(n+1)^2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Pour justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure et va même probablement vous paraître étrange : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{2\,n+1}}{2\,n+1}$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{4\,(n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{7}x\right)^{2n+1}}{2n+1} = \arctan\left(\frac{1}{7}x\right) \ln(x)$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{7}x\right) \ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{2n+1}(-1)^n}{4(2n+1)(n+1)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 39. ← page 10

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(n+2)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(n+2)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+2)x)}}{n+2}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(n+2)x)}}{n+2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(n+2)x)}}{n+2} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(n+2)x)}}{n+2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(n+2)x)}}{n+2}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(n+2)x)}}{(n+2)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+2)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-2x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-2x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x.$$

   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = xe^{(-(n+2)x)}.$$

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} xe^{(-(n+2)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-2x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-2x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{xe^{(-2x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
   — il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(n+2)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+2)^2}.$$

   Or : $\frac{1}{(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.
   Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+2)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-2\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{xe^{(-2\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-2\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 40. ← page 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^2 \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^2$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{3}\,x^3$.
Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\,x^3 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{1}{3}\,x^3 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^3 \ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\,(n+1)x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{3}\,(n+1)x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{3}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\int_0^1 x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 3^{-n-1}\,(-1)^n\,n!$ ». Pour $n=0$, on a $\frac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}} = \frac{1}{3}$, et :
$$\int_0^1 x^2(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$
et on a donc bien : $\int_0^1 x^2(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{3}\int_0^1 x^2 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{3} \times 3^{-n-1}\,(-1)^n\,n! \\ &= 3^{-n-2}\,(-1)^{n+1}\,(n+1)!,\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $n+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n}}{(2n)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^2 \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\, x^2 \ln(x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0{,}1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, x^2 \ln(x)^{2n}}{(2n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1]$, et sa somme $f : x \mapsto x^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^2 \cos(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2 \ln(x)^{2n}}{(2n)!} \mathrm{d}x = 3^{-2n-1}.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{9} \in]-1{,}1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^2 \cos(\ln(x))$ est intégrable sur $]0{,}1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x))\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n-1} (-1)^n,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x))\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{3}{10}.$$

Corrigé 41. ← page 10

1. L'application $x \mapsto x^{16n} \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^{16n}$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{16n+1}}{16n+1}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{16n+1}\ln(x)}{16n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{16n+1}\ln(x)}{16n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^{16n} \ln(x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{16n+1}\ln(x)}{16n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{16n}}{16n+1} \mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{16n+1}}{(16n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(16n+1)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^{16}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-(-x^{16})}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^{16}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \left(-x^{16}\right)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,1[,\quad f_n(x) = \left(-x^{16}\right)^n \ln(x)\,.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x\in]0,1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-x^{16}\right)^n \ln(x)$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, d'une série géométrique de raison $x^{16}\in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x\mapsto \ln(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^{16\,n} = \dfrac{\ln(x)}{1+x^{16}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -(-1)^n\left(-x^{16}\right)^n\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(16\,n+1)^2}.$$
(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Or : $\dfrac{1}{(16\,n+1)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{16^2n^2}$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc elle converge.
Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n| = \sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(16\,n+1)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x\mapsto \ln(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^{16\,n} = \dfrac{\ln(x)}{1+x^{16}}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :
$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$
c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^{16}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{16\,n}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{(16\,n+1)^2},$$
d'où le résultat.

Corrigé 42. ← page 11

1. L'application $x\mapsto x^2e^{(-11\,(n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto x^2$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto 2\,x$;
— on intègre $x\mapsto e^{(-11\,(n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x\mapsto -\frac{e^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2e^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^2e^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^{+\infty} x^2e^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2e^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2\,xe^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{2\,xe^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)}\mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant $x \mapsto x$ et en intégrant le facteur exponentiel. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-11\,(n+1)x)}}{11\,(n+1)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-11\,(n+1)x)}}{121\,(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{121\,(n+1)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{(-11\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{1331\,(n+1)^3},$$

d'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$xe^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $e^{(-11\,x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-11\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2e^{\left(-11\,x+e^{(-11\,x)}\right)}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-11\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^2\frac{e^{(-11\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^2e^{(-11\,(n+1)x)}}{n!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^2e^{(-11\,(n+1)x)}}{n!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-11\,x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-11\,(n+1)x)}}{n!} = x^2e^{\left(-11\,x+e^{(-11\,x)}\right)}$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{(-11\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x = \frac{2}{1331\,(n+1)^3n!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{n!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-11\,(n+1)x)}}{n!} = x^2 e^{\left(-11\,x+e^{(-11\,x)}\right)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{\left(-11\,x+e^{(-11\,x)}\right)}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1331\,(n+1)^3 n!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 43. ← page 11

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(8\,n+5)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(8\,n+5)x)}$, qui est continue sur $[0, +\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(8\,n+5)x)}}{8\,n+5}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(8\,n+5)x)}}{8\,n+5} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(8\,n+5)x)}}{8\,n+5} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(8\,n+5)x)}}{8\,n+5}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(8\,n+5)x)}}{8\,n+5}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(8\,n+5)x)}}{8\,n+5}\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{8\,n+5}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(8\,n+5)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\frac{0!}{(8\,n+5)^{0+1}} = \frac{1}{8\,n+5}$, et :
   $$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(8\,n+5)x)}}{8\,n+5}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{8\,n+5},$$
   et on a donc bien : $\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(8\,n+5)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{8\,n+5}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{8\,n+5} \times \frac{k!}{(8\,n+5)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(8\,n+5)^{k+2}},$$
   d'où la proposition au rang $k+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{x^6 e^{(3\,x)}}{e^{(8\,x)} - 1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^6 e^{(-5\,x)}}{1 - \underbrace{e^{(-8\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^6 e^{(-5\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^6 e^{(-(8\,n+5)x)}\mathrm{d}x,$$
   où nous avons factorisé par $e^{(8\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-8\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour

$u \in]-1{,}1[)$ avec $u = e^{(-8\,x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^6 e^{(-(8\,n+5)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^6 e^{(-(8\,n+5)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^6 e^{(-5)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-8\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^6 e^{(-5)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n = \frac{x^6 e^{(3\,x)}}{e^{(8\,x)} - 1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 6$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^6 e^{(-(8\,n+5)x)} \mathrm{d}x = \frac{6!}{(8\,n+5)^7}.$$

Or : $\frac{1}{(8\,n+5)^7} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8^7 n^7}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^7}$ est une série de Riemann d'exposant $7 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{6!}{(8\,n+5)^7}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^6 e^{(-5)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n = \frac{x^6 e^{(3\,x)}}{e^{(8\,x)} - 1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^6 e^{(3\,x)}}{e^{(8\,x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6!}{(8\,n+5)^7},$$

d'où le résultat.

Corrigé 44. ← page 11

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)^k$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe).
Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(k+1)\ln(x)^k}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Comme $\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(k+1)x^n \ln(x)^k}{n+1} \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{(k+1)x^n \ln(x)^k}{n+1} \mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^k\, k!}{(n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \dfrac{1}{n+1}$, et :

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^n (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1} \, \mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^k \, \mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_k)}{=} -\frac{k+1}{n+1} \times \frac{(-1)^k\, k!}{(n+1)^{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}\,(k+1)!}{(n+1)^{k+2}},\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $k+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^6}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^6 \sum_{n=0}^{+\infty} (x)^n \, \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \ln(x)^6 \, \mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = x^n \ln(x)^6.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^n \ln(x)^6$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^6$ près, d'une série géométrique de raison $x \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^6 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\ln(x)^6}{1-x}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 6$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \ln(x)^6 \, \mathrm{d}x = \frac{6!}{(n+1)^7}.$$

Or : $\dfrac{1}{(n+1)^7} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^7}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^7}$ est une série de Riemann d'exposant $7 > 1$, donc elle converge.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{6!}{(n+1)^7}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)^6 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\ln(x)^6}{1-x}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^6}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6!}{(n+1)^7},$$

d'où le résultat.

Corrigé 45. ← page 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(5\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(5\,x)\right| \leqslant e^{(-(2\,n+1)x)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(5\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(5\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-5i+1)x)}\mathrm{d}x\right) &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-5i+1)x)}}{-2\,n+5i-1}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+5i-1}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-5i-1}{(2\,n+1)^2+25}\right) \\ &= \frac{5}{(2\,n+1)^2+25}.\end{aligned}$$

   D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(5\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(5\,x)\,\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(5\,x)}{(2\,n+1)!}.$$

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   - pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(5\,x)}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(5\,x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto \sin(5\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = \sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{(2\,n+1)!}\int_0^{+\infty}|\sin(5\,x)|e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{(2\,n+1)!}\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{(2\,n+1)!}\left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{-2\,n-1}\right]_0^{+\infty}\\ &=\frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{(2\,n+3)(2\,n+3)!}}{\frac{1}{(2\,n+1)(2\,n+1)!}}=\frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{(2\,n+3)!}{(2\,n+1)!}=\frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4\,n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0<1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{1}|f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f:x\mapsto\sin(5\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}=\sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5}{\left((2\,n+1)^2+25\right)(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 46. ← page 12

1. L'application $x\mapsto x^2e^{(-(2\,n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto x^2$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto 2\,x$;
— on intègre $x\mapsto e^{(-(2\,n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x\mapsto -\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}$.
Comme $\lim_{x\to 0}-\frac{x^2e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty}x^2e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^2e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\,xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2\,xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\int_0^{+\infty}xe^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant $x\mapsto x$ et en intégrant le facteur exponentiel. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty}xe^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x=\left[-\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^{+\infty}x^2e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x=\frac{2}{(2\,n+1)^3},$$

d'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(e^{(-x)}\right) \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 \frac{(-1)^n\, e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\, x^2 e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, x^2 e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = x^2 \sin\left(e^{(-x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} \mathrm{d}x = \frac{2}{(2\,n+1)^3\,(2\,n+1)!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{(2\,n+1)!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2\,n+1)^3}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = x^2 \sin\left(e^{(-x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(e^{(-x)}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n}{(2\,n+1)^3\,(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 47. ← page 12

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(n+5)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(n+5)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+5)x)}}{n+5}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(n+5)x)}}{n+5} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(n+5)x)}}{n+5} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(n+5)x)}}{n+5}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(n+5)x)}}{n+5}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(n+5)x)}}{(n+5)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+5)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-5\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x.$$

   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = xe^{(-(n+5)x)}.$$

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} xe^{(-(n+5)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-5\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-5\,x)} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{xe^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
   — il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(n+5)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+5)^2}.$$

   Or : $\frac{1}{(n+5)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.
   Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+5)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

   Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-5\,x)} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{xe^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-5\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+5)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 48. ← page 12

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x\ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{2}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 2^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}} = \dfrac{1}{2}$, et :

$$\int_0^1 x^1(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^1(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{2}\int_0^1 x\ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{2}\times 2^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 2^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2\,n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x\frac{(-1)^n\ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1],\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x\ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x \sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \mathrm{d}x = 2^{-2\,n-2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x \sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2\,n-2} (-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{5}.$$

Corrigé 49. ← page 12

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(2\,n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(2\,n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in]-1{,}1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} x \arctan\left(e^{(-x)}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x \frac{(-1)^n e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} \mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n x e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1{,}1[$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} = x \arctan\left(e^{(-x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^3}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure et va même probablement vous paraître étrange : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{2n+1}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} = x \arctan\left(e^{(-x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x \arctan\left(e^{(-x)}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 50. ← page 12

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(2\,n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(2\,n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(2\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-x)}}{1-\underbrace{e^{(-2\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(2\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-2\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\frac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1{,}1[$) avec $u = e^{(-2\,x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = xe^{(-(2\,n+1)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} xe^{(-(2\,n+1)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-1)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-2\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-1)}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n = \frac{xe^x}{e^{(2\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$

Or : $\frac{1}{(2\,n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^2 n^2}$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n| = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2\,n+1)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-1)}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n = \frac{xe^x}{e^{(2\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(2\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 51. ← page 13

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(4\,n+3)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(4\,n+3)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3}\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{4\,n+3}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(4\,n+3)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\displaystyle\frac{0!}{(4\,n+3)^{0+1}} = \frac{1}{4\,n+3}$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\,n+3},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(4\,n+3)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{4\,n+3}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{4\,n+3} \times \frac{k!}{(4\,n+3)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(4\,n+3)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^6 e^x}{e^{(4\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^6 e^{(-3\,x)}}{1-\underbrace{e^{(-4\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^6 e^{(-3\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-4\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^6 e^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(4\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-4\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\displaystyle\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1{,}1[$) avec $u = e^{(-4\,x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^6 e^{(-(4\,n+3)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^6 e^{(-(4\,n+3)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^6 e^{(-3)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-4\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^6 e^{(-3)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-4\,x)}\right)^n = \dfrac{x^6 e^x}{e^{(4\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=6$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^6 e^{(-(4\,n+3)x)} \mathrm{d}x = \frac{6!}{(4\,n+3)^7}.$$

Or : $\dfrac{1}{(4\,n+3)^7} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4^7 n^7}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^7}$ est une série de Riemann d'exposant $7 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{6!}{(4\,n+3)^7}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^6 e^{(-3)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-4\,x)}\right)^n = \dfrac{x^6 e^x}{e^{(4\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^6 e^x}{e^{(4\,x)}-1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6!}{(4\,n+3)^7},$$

d'où le résultat.

Corrigé 52. ← page 13

1. L'application $x \mapsto x^{2\,n} \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^{2\,n}$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$.
Comme $\lim_{x\to 0} \frac{x^{2\,n+1}\ln(x)}{2\,n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{x^{2\,n+1}\ln(x)}{2\,n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^{2\,n} \ln(x) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2\,n+1}\ln(x)}{2\,n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2\,n}}{2\,n+1} \mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(x^2\right)^n \ln(x) \,\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \left(x^2\right)^n \ln(x).$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \left(x^2\right)^n \ln(x)$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, d'une série géométrique de raison $x^2 \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2\,n} = \frac{\ln(x)}{1-x^2}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\left(x^2\right)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Or : $\frac{1}{(2\,n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^2 n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2\,n+1)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2\,n} = \frac{\ln(x)}{1-x^2}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(2\,n+1)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. ← page 13

1. L'application $x \mapsto x e^{(-(n+3)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(n+3)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+3)x)}}{n+3}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(n+3)x)}}{n+3} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(n+3)x)}}{n+3} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(n+3)x)}}{n+3}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(n+3)x)}}{n+3}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(n+3)x)}}{(n+3)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+3)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = xe^{(-(n+3)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} xe^{(-(n+3)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-3\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-3\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{xe^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(n+3)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+3)^2}.$$

Or : $\frac{1}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+3)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-3\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-x)}\right)^n = \frac{xe^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-3\,x)}}{1-e^{(-x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 54. ← page 13

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(4\,n+3)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(4\,n+3)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(4\,n+3)x)}}{4\,n+3}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(4\,n+3)x)}}{(4\,n+3)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(4\,n+3)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{x}}{e^{(4\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-3\,x)}}{1-\underbrace{e^{(-4\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-4\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{(-(4\,n+3)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(4\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-4\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour

$u \in]-1,1[)$ avec $u = e^{(-4x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = xe^{(-(4n+3)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} xe^{(-(4n+3)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-3)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-4x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-3)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-4x)}\right)^n = \dfrac{xe^x}{e^{(4x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(4n+3)x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{(4n+3)^2}.$$

Or : $\dfrac{1}{(4n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4^2 n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(4n+3)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-3)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-4x)}\right)^n = \dfrac{xe^x}{e^{(4x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(4x)}-1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 55. ← page 14

1. On a, pour rappel, le développement en série entière usuel suivant :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans l'identité ci-dessus. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x \in]-1,1[$, et on peut donc évaluer en $-x$ cette égalité pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x)^n.$$

Simplifions le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} \cdot (2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard: on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n} n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $(-x)^n = (-1)^n x^n$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x^n,$$

d'où le résultat, étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(2\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\right| \leqslant e^{(-2\,(n+1)x)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-2i+2)x)}\mathrm{d}x\right) &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-2i+2)x)}}{-2\,n+2i-2}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+2i-2}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{-2\,n-2i-2}{4\,(n+1)^2+4}\right)\\ &= \frac{1}{2\left((n+1)^2+1\right)}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{x}{\sqrt{-x+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x^{n+1}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-2\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-2\,x)}\sin(2\,x)}{\sqrt{-e^{(-2\,x)}+1}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(2\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(2\,x)\,\frac{\binom{2\,n}{n} e^{(-2\,(n+1)x)}}{2^{2\,n}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{\binom{2\,n}{n} e^{(-2\,(n+1)x)} \sin(2\,x)}{2^{2\,n}}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x\in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2\,n}{n}e^{(-2\,(n+1)x)}\sin(2\,x)}{2^{2\,n}}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(2\,x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1{,}1[$, et donc en particulier en $e^{(-2\,x)}\in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $\displaystyle f : x\mapsto \sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2\,n}{n}e^{(-2\,(n+1)x)}}{2^{2\,n}}=\frac{e^{(-2\,x)}\sin(2\,x)}{\sqrt{-e^{(-2\,x)}+1}}$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\frac{\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}}\int_0^{+\infty}|\sin(2\,x)|e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}}\int_0^{+\infty}e^{(-2\,(n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &=\frac{\binom{2\,n}{n}}{2^{2\,n}}\left[\frac{e^{(-2\,(n+1)x)}}{-2\,n-2}\right]_0^{+\infty}\\ &=\frac{\binom{2\,n}{n}}{2\cdot 2^{2\,n}(n+1)}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2\,n}{n}}{2\cdot 2^{2\,n}(n+1)}$ converge en trouvant un équivalent de son terme général et en concluant par comparaison. En utilisant la formule de Stirling, on sait démontrer que l'on a :

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2^{2n}}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

On en déduit :

$$\frac{\binom{2\,n}{n}}{2\cdot 2^{2\,n}(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2\,n}{n}}{2\cdot 2^{2\,n}(n+1)}$ converge. Toujours par comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\displaystyle f : x\mapsto\sin(2\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2\,n}{n}e^{(-2\,(n+1)x)}}{2^{2\,n}}=\frac{e^{(-2\,x)}\sin(2\,x)}{\sqrt{-e^{(-2\,x)}+1}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-2\,x)}\sin(2\,x)}{\sqrt{-e^{(-2\,x)}+1}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2\,n}{n}}{2\left((n+1)^2+1\right)2^{2\,n}},$$

d'où le résultat.

Corrigé 56. ← page 14

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)\right|\leqslant e^{(-(2\,n+1)x)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n-i+1)x)}\mathrm{d}x\right) &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2\,n-i+1)x)}}{-2\,n+i-1}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2\,n+i-1}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2\,n-i-1}{(2\,n+1)^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{(2\,n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2n)!}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x)\,\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)}{(2\,n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)}{(2\,n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!} = \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n)!}\int_0^{+\infty} |\sin(x)|e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(2\,n)!}\int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x &\\ = \frac{1}{(2\,n)!}\left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{-2\,n-1}\right]_0^{+\infty}&\\ = \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n)!}.&\end{aligned}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n)!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{(2\,n+3)(2\,n+2)!}}{\frac{1}{(2\,n+1)(2\,n)!}} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\,\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\,\frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n)!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!} = \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left((2\,n+1)^2+1\right)(2\,n)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 57. ← page 14

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
   Or, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\frac{1}{4}\,x \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\frac{1}{4}\,x$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{4}\,x\right) \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{4}\,x\right)^{2\,n}}{(2n)!}\mathrm{d}x$$
   $$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln(x)\,\frac{(-1)^n \left(\frac{1}{4}\,x\right)^{2\,n}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x.$$
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{4}\,x\right)^{2\,n} \ln(x)}{(2\,n)!}.$$
   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{4}\,x\right)^{2\,n} \ln(x)}{(2\,n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\frac{1}{4}\,x \in \mathbb{R}$; par conséquent

la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{4}x\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)\ln(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{\left(\frac{1}{4}x\right)^{2n}\ln(x)}{(2n)!}\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{(2n+1)^2\,(2n)!}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{4}x\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)\ln(x)$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1\cos\left(\frac{1}{4}x\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}(-1)^n}{(2n+1)^2\,(2n)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 58. ← page 14

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-(2n+1)x)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-(2n+1)x)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-(2n+1)x)}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{(-(2n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-(2n+1)x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2n-i+1)x)}\mathrm{d}x\right) &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2n-i+1)x)}}{-2n+i-1}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-2n+i-1}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-2n-i-1}{(2n+1)^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{(2n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2n)!}\mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x)\, \frac{(-1)^n\, e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\, e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)}{(2\,n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, e^{(-(2\,n+1)x)} \sin(x)}{(2\,n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme f : $\displaystyle x \mapsto \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!} = \cos\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n)!} \int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(2\,n)!} \int_0^{+\infty} e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{(2\,n)!} \left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{-2\,n-1}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n)!}.$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n)!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{(2\,n+3)(2\,n+2)!}}{\frac{1}{(2\,n+1)(2\,n)!}} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{1}{2\,(2\,n+1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n)!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!} = \cos\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left((2\,n+1)^2+1\right)(2\,n)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 59. ← page 14

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(7\,n+6)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(7\,n+6)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(7\,n+6)x)}}{(7\,n+6)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(7\,n+6)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(7\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-6\,x)}}{1-\underbrace{e^{(-7\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-6\,x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-7\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(7\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-7\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1,1[$) avec $u = e^{(-7\,x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = xe^{(-(7\,n+6)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} xe^{(-(7\,n+6)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-6)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-7\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-6)} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-7\,x)}\right)^n = \frac{xe^x}{e^{(7\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(7\,n+6)^2}.$$

Or : $\dfrac{1}{(7\,n+6)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{7^2n^2}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(7\,n+6)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-6)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-7\,x)}\right)^n = \dfrac{xe^x}{e^{(7\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{(7\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(7\,n+6)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 60. ← page 15

1. L'application $x \mapsto xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-7\,(2\,n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{7\,(2\,n+1)}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{7\,(2\,n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{7\,(2\,n+1)} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{7\,(2\,n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{7\,(2\,n+1)}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{49\,(2\,n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{49\,(2\,n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-7\,x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-7\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\sin\left(e^{(-7\,x)}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{e^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x\frac{(-1)^n e^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-7\,x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = x\sin\left(e^{(-7\,x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x=\frac{1}{49\,(2\,n+1)^2\,(2\,n+1)!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{(2\,n+1)!}$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2\,n+1)^2}\right)=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f:x\mapsto x\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,e^{(-7\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}=x\sin\left(e^{(-7\,x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}x\sin\left(e^{(-7\,x)}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{49\,(2\,n+1)^2\,(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 61. ← page 15

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x^n\ln(x)^k$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x\mapsto\ln(x)^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x\mapsto\frac{(k+1)\ln(x)^k}{x}$;
   — on intègre $x\mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}=0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1x^n\ln(x)^{k+1}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^1x^n\ln(x)^k\mathrm{d}x=\frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}=\dfrac{1}{n+1}$, et :
   $$\int_0^1x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1} \mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^k \mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} -\frac{k+1}{n+1} \times \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 e^x \ln(x)^4 \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln(x)^4 \frac{x^n}{n!} \mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)^4}{n!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \ln(x)^4}{n!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^4$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $x \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^4 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ln(x)^4$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=4$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)^4}{n!} \mathrm{d}x = \frac{24}{(n+1)^5 n!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{n!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(n+1)^5}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^5}$ est d'exposant $5 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)^4 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ln(x)^4$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 e^x \ln(x)^4 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24}{(n+1)^5 n!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 62. ← page 15

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)^k$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(k+1)\ln(x)^k}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(k+1)x^n \ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \dfrac{1}{n+1}$, et :
$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_k)}{=} -\frac{k+1}{n+1} \times \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}},\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^{11}}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^{11} \sum_{n=0}^{+\infty} (x)^n\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \ln(x)^{11}\,\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = x^n \ln(x)^{11}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 0} x^n \ln(x)^{11}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^{11}$ près, d'une série géométrique de raison $x \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^{11} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{\ln(x)^{11}}{1-x}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 11$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 -x^n \ln(x)^{11} \, \mathrm{d}x = \frac{11!}{(n+1)^{12}}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Or : $\dfrac{1}{(n+1)^{12}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{12}}$, et la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{12}}$ est une série de Riemann d'exposant $12 > 1$, donc elle converge.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^1 |f_n| = \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{11!}{(n+1)^{12}}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)^{11} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{\ln(x)^{11}}{1-x}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^{11}}{1-x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-11!}{(n+1)^{12}},$$

d'où le résultat.

Corrigé 63. ← page 15

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-(2n+1)x)} \sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-(2n+1)x)} \sin(x)\right| \leqslant e^{(-(2n+1)x)}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-(2n+1)x)} \mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-(2n+1)x)} \sin(x) \, \mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-(2n+1)x)} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2n-i+1)x)} \mathrm{d}x\right) &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(2n-i+1)x)}}{-2n+i-1}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{-2n+i-1}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(-\frac{-2n-i-1}{(2n+1)^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{(2n+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin(x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(x)\,\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}\sin(x)}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto \sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = \sin(x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)!}\int_0^{+\infty}|\sin(x)|e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{(2\,n+1)!}\int_0^{+\infty}e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2\,n+1)!}\left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{-2\,n-1}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{(2\,n+3)(2\,n+3)!}}{\frac{1}{(2\,n+1)(2\,n+1)!}} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{(2\,n+3)!}{(2\,n+1)!} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\displaystyle f : x \mapsto \sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = \sin(x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\sinh\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left((2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 64. ← page 16

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x^k e^{(-(26\,n+25)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x\mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x\mapsto e^{(-(26\,n+25)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x\mapsto -\frac{e^{(-(26\,n+25)x)}}{26\,n+25}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(26\,n+25)x)}}{26\,n+25} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(26\,n+25)x)}}{26\,n+25} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(26\,n+25)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(26\,n+25)x)}}{26\,n+25}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-(26\,n+25)x)}}{26\,n+25}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-(26\,n+25)x)}}{26\,n+25}\mathrm{d}x$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{26\,n+25}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(26\,n+25)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(26\,n+25)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\dfrac{0!}{(26\,n+25)^{0+1}} = \dfrac{1}{26\,n+25}$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(26\,n+25)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(26\,n+25)x)}}{26\,n+25}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{26\,n+25},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(26\,n+25)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(26\,n+25)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(26\,n+25)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{26\,n+25}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(26\,n+25)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{26\,n+25}\times\frac{k!}{(26\,n+25)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(26\,n+25)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^5 e^x}{e^{(26\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x^5 e^{(-25\,x)}}{1-\underbrace{e^{(-26\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^5 e^{(-25\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-26\,x)}\right)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^5 e^{(-(26\,n+25)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(26\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-26\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u\in]-1,1[$) avec $u=e^{(-26\,x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = x^5 e^{(-(26\,n+25)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 0} x^5 e^{(-(26\,n+25)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^5 e^{(-25)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-26\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^5 e^{(-25)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-26\,x)}\right)^n = \dfrac{x^5 e^x}{e^{(26\,x)} - 1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 5$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^5 e^{(-(26\,n+25)x)} \mathrm{d}x = \frac{120}{(26\,n+25)^6}.$$

Or : $\dfrac{1}{(26\,n+25)^6} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{26^6 n^6}$, et la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^6}$ est une série de Riemann d'exposant $6 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{120}{(26\,n+25)^6}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^5 e^{(-25)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-26\,x)}\right)^n = \dfrac{x^5 e^x}{e^{(26\,x)} - 1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^5 e^x}{e^{(26\,x)} - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{120}{(26\,n+25)^6},$$

d'où le résultat.

Corrigé 65. ← page 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2} x^2$.
Comme $\lim_{x \to 0} \frac{1}{2} x^2 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x \to 1} \frac{1}{2} x^2 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x \ln(x)^{n+1} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1) x \ln(x)^n \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{2}(n+1) x \ln(x)^n \mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{2}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\int_0^1 x \ln(x)^n \mathrm{d}x = 2^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}} = \dfrac{1}{2}$, et :
$$\int_0^1 x^1 (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^1(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(2)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \ln(x)^{n+1} \mathrm{d}x = -\frac{n+1}{2}\int_0^1 x\ln(x)^n \mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{2} \times 2^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 2^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x\ln(x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x\ln(x)^{2n}}{(2n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x\cos(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\ln(x)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x = 2^{-2n-1}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x\cos(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2\,n-1}(-1)^n\,,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}.$$

Corrigé 66. ← page 16

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x^5\ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0{,}1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto\ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x\mapsto\frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x\mapsto x^5$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x\mapsto\frac{1}{6}x^6$.
Comme $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{6}x^6\ln(x)^{n+1}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{6}x^6\ln(x)^{n+1}=0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x^5\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6\ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{1}{6}(n+1)x^5\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1\frac{1}{6}(n+1)x^5\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{6}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^5\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 6^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(6)^{0+1}}=\dfrac{1}{6}$, et :
$$\int_0^1 x^5(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{6},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^5(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(6)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $n\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^5\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{6}\int_0^1 x^5\ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{6}\times 6^{-n-1}(-1)^n n!\\ &= 6^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $n+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Or, pour tout $x\in]0{,}1]$, on a : $\ln(x)\in\mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^5\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^5\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2\,n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^5\frac{(-1)^n\ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1],\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\, x^5 \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0{,}1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, x^5 \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^5 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1]$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto x^5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x^5 \sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^5 \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \mathrm{d}x = 6^{-2\,n-2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0{,}1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{36} \in]-1{,}1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\displaystyle f : x \mapsto x^5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x^5 \sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0{,}1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^5 \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 6^{-2\,n-2} (-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^5 \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{36} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{36}\right)^n = -\frac{1}{36} \frac{1}{1+\frac{1}{36}} = -\frac{1}{37}.$$

Corrigé 67. ← page 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^2 \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0{,}1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^2$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$.
Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}x^3 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{1}{3}x^3 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(n+1)x^2 \ln(x)^n \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{3}(n+1)x^2 \ln(x)^n \mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{3}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 3^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}} = \dfrac{1}{3}$, et :
$$\int_0^1 x^2(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{3}\int_0^1 x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{3} \times 3^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 3^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $n+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $2\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $2\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \sin(2\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^2 \frac{(-1)^n(2\ln(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2 (2\ln(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^2(2\ln(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $2\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2\ln(x))^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^2\sin(2\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^2(2\ln(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x = 3^{-2n-2}2^{2n+1}.$$
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{4}{9} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2\ln(x))^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^2 \sin(2\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n-2} 2^{2n+1} (-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\ln(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)^n = -\frac{2}{9}\frac{1}{1+\frac{4}{9}} = -\frac{2}{13}.$$

Corrigé 68. ← page 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^{123}\ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^{123}$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{124}x^{124}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{124}x^{124}\ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{1}{124}x^{124}\ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x^{123}\ln(x)^{n+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{124}x^{124}\ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{124}(n+1)x^{123}\ln(x)^n\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{124}(n+1)x^{123}\ln(x)^n\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{124}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\int_0^1 x^{123}\ln(x)^n\mathrm{d}x = 124^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\frac{(-1)^0 0!}{(124)^{0+1}} = \frac{1}{124}$, et :
   $$\int_0^1 x^{123}(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{124}x^{124}\right]_0^1 = \frac{1}{124},$$
   et on a donc bien : $\int_0^1 x^{123}(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(124)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x^{123}\ln(x)^{n+1}\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{124}\int_0^1 x^{123}\ln(x)^n\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{124}\times 124^{-n-1}(-1)^n n!\\ &= 124^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$
   d'où la proposition au rang $n+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 x^{123}\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{123}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{123}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{123}\ln(x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{123}\ln(x)^{2n}}{(2n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^{123} près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x^{123}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^{123}\cos(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{123}\ln(x)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x = 124^{-2n-1}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{15376} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^{123}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^{123}\cos(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^{123}\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 124^{-2n-1}(-1)^n,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^{123}\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{124}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{15376}\right)^n = \frac{1}{124}\frac{1}{1+\frac{1}{15376}} = \frac{124}{15377}.$$

Corrigé 69. ← page 17

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-7(n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :

— on dérive $x \mapsto x^2$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 2\,x$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-7\,(n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2 e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^2 e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-7\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2 e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,x e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2\,x e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)}\mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{(-7\,(n+1)x)}\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant $x \mapsto x$ et en intégrant le facteur exponentiel. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} x e^{(-7\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-7\,(n+1)x)}}{7\,(n+1)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-7\,(n+1)x)}}{49\,(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{49\,(n+1)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-7\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{343\,(n+1)^3},$$

d'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-7\,x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-7\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{\left(-7\,x + e^{(-7\,x)}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-7\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^{(-7\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^2 e^{(-7\,(n+1)x)}}{n!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^2 e^{(-7\,(n+1)x)}}{n!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-7\,x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-7\,(n+1)x)}}{n!} = x^2 e^{\left(-7\,x + e^{(-7\,x)}\right)}$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{(-7\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x = \frac{2}{343\,(n+1)^3 n!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{n!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-7\,(n+1)x)}}{n!} = x^2 e^{\left(-7\,x + e^{(-7\,x)}\right)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{\left(-7\,x + e^{(-7\,x)}\right)}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{343\,(n+1)^3 n!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 70. ← page 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-2\,(2\,n+1)x)} \sin(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $\left|e^{(-2\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\right| \leqslant e^{(-2\,(2\,n+1)x)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(2\,n+1)x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(4\,n-i+2)x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(4\,n-i+2)x)}}{-4\,n+i-2}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-4\,n+i-2}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-4\,n-i-2}{4\,(2\,n+1)^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{4\,(2\,n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-2\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \arctan\left(e^{(-2\,x)}\right) \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{(-2\,(2\,n+1)x)}}{2n+1}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x)\, \frac{(-1)^n\, e^{(-2\,(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\, e^{(-2\,(2\,n+1)x)} \sin(x)}{2\,n+1}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, e^{(-2\,(2\,n+1)x)} \sin(x)}{2\,n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1,1[$, et donc en particulier en $e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{(-2\,(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = \arctan\left(e^{(-2\,x)}\right) \sin(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,n+1}\int_0^{+\infty} |\sin(x)|e^{(-2\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{2\,n+1}\int_0^{+\infty} e^{(-2\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\,n+1}\left[\frac{e^{(-2\,(2\,n+1)x)}}{-4\,n-2}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{2\,(2\,n+1)^2}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2\,(2\,n+1)^2}$ converge en trouvant un équivalent de son terme général et en concluant par comparaison. On a aisément :

$$\frac{1}{2\,(2\,n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}.$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2\,(2\,n+1)^2}$ converge. Toujours par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{(-2\,(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = \arctan\left(e^{(-2\,x)}\right) \sin(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(e^{(-2\,x)}\right) \sin(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(4\,(2\,n+1)^2+1\right)(2\,n+1)},$$

d'où le résultat.

Corrigé 71. ← page 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^9 \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au

théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment [0,1].)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur]0,1], de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^9$, qui est continue sur]0,1] ; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{10}x^{10}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{10}x^{10}\ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{10}x^{10}\ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^9 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x^{10}\ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{10}(n+1)x^9\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{10}(n+1)x^9\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{10}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\int_0^1 x^9\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 10^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\frac{(-1)^0 0!}{(10)^{0+1}} = \frac{1}{10}$, et :

$$\int_0^1 x^9(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x^{10}\right]_0^1 = \frac{1}{10},$$

et on a donc bien : $\int_0^1 x^9(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(10)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^9\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{10}\int_0^1 x^9\ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(P_n)}{=} -\frac{n+1}{10}\times 10^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 10^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $2\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $2\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^9\cos(2\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^9\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^9\frac{(-1)^n(2\ln(x))^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^9(2\ln(x))^{2n}}{(2n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur]0,1], et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^9(2\ln(x))^{2n}}{(2n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^9 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $2\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur]0,1], et sa somme $f : x \mapsto x^9\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2\ln(x))^{2n}}{(2n)!} = x^9\cos(2\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur]0,1] en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^9\,(2\,\ln(x))^{2\,n}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x=10^{-2\,n-1}2^{2\,n}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0{,}1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1}=(-\ln(x))^{2n+1}=(-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1}=-(\ln(x))^{2n+1}$.)
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{25}\in]-1{,}1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1|f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f\,:\,x\mapsto x^9\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2\,\ln(x))^{2\,n}}{(2\,n)!}=x^9\cos(2\,\ln(x))$ est intégrable sur $]0{,}1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^9\cos(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}10^{-2\,n-1}2^{2\,n}\,(-1)^n\,,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^9\cos(2\,\ln(x))\,\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{25}\right)^n=\frac{1}{10}\frac{1}{1+\frac{1}{25}}=\frac{5}{52}.$$

Corrigé 72. ← page 18

1. L'application $x\mapsto x^n\ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto\ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x\mapsto\frac{1}{x}$;
— on intègre $x\mapsto x^n$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}=0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x=-\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1=-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(x)^n\,\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0{,}1[,\quad f_n(x)=x^n\ln(x)\,.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x\in]0{,}1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}f_n(x)=\sum_{n\geqslant 0}x^n\ln(x)$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, d'une série géométrique de raison $x\in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}f_n$ converge

simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 -x^n \ln(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Or : $\dfrac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 73. ← page 18

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(2n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(2n+1)x)}$, qui est continue sur $[0, +\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\mathrm{d}x.$$

   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{2n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \dfrac{k!}{(2n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\dfrac{0!}{(2n+1)^{0+1}} = \dfrac{1}{2n+1}$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(2n+1)x)}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2n+1},$$

   et on a donc bien : $\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \dfrac{0!}{(2n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{2n+1}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2n+1)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{2n+1} \times \frac{k!}{(2n+1)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(2n+1)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{10}e^x}{e^{(2\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^{10}e^{(-x)}}{1-\underbrace{e^{(-2\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{10}e^{(-x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{10}e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(2\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-2\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1{,}1[$) avec $u = e^{(-2\,x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^{10}e^{(-(2\,n+1)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{10}e^{(-(2\,n+1)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^{10}e^{(-1)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-2\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^{10}e^{(-1)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n = \frac{x^{10}e^x}{e^{(2\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=10$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{10}e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{10!}{(2\,n+1)^{11}}.$$

Or : $\dfrac{1}{(2\,n+1)^{11}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^{11}n^{11}}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{11}}$ est une série de Riemann d'exposant $11>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{10!}{(2\,n+1)^{11}}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^{10}e^{(-1)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n = \frac{x^{10}e^x}{e^{(2\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{10}e^x}{e^{(2\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{10!}{(2\,n+1)^{11}},$$

d'où le résultat.

Corrigé 74. ← page 18

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)^k$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :

— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(k+1)\ln(x)^k}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\displaystyle\frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \frac{1}{n+1}$, et :

$$\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n\ln(x)^k\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_k)}{=} -\frac{k+1}{n+1}\times\frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}}\\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}},\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(x)\ln(x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln(x)^3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2\,n+1}}{2n+1}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \ln(x)^3\,\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{2\,n+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[,\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}\ln(x)^3}{2\,n+1}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}\ln(x)^3}{2\,n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^3$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1,1[$, et donc en particulier en $x \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \displaystyle\ln(x)^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{2\,n+1} = \arctan(x)\ln(x)^3$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=3$) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 -\frac{x^{2\,n+1}\ln(x)^3}{2\,n+1}\mathrm{d}x=\frac{3}{8\,(2\,n+1)(n+1)^4}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0{,}1]$, de sorte que : $|\ln(x)|=-\ln(x)$.) Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure et va même probablement vous paraître étrange : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{2\,n+1}$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{16\,(n+1)^4}\right)=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}$ est d'exposant $4>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x\mapsto \ln(x)^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{2\,n+1}=\arctan(x)\ln(x)^3$ est intégrable sur $]0{,}1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \arctan(x)\ln(x)^3\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{3\,(-1)^n}{8\,(2\,n+1)(n+1)^4},$$

d'où le résultat.

Corrigé 75. ← page 18

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x^2\ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0{,}1]$.)
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x\mapsto\ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x\mapsto\frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
— on intègre $x\mapsto x^2$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x\mapsto\frac{1}{3}\,x^3$.
Comme $\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\,x^3\ln(x)^{n+1}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to1}\frac{1}{3}\,x^3\ln(x)^{n+1}=0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^2\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}\,x^3\ln(x)^{n+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}\,(n+1)x^2\ln(x)^n\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{3}\,(n+1)x^2\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{3}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\int_0^1 x^2\ln(x)^n\,\mathrm{d}x=3^{-n-1}\,(-1)^n\,n!$ ». Pour $n=0$, on a $\frac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}}=\frac{1}{3}$, et :

$$\int_0^1 x^2(\ln(x))^0\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1=\frac{1}{3},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(3)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{3}\int_0^1 x^2\ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{3}\times 3^{-n-1}(-1)^n n!\\ &= 3^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^2\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2\ln(x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^2\ln(x)^{2n}}{(2n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^2 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^2\cos(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2\ln(x)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x = 3^{-2n-1}.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{9} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\displaystyle f : x \mapsto x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^2\cos(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n-1}(-1)^n\,,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^2 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{3}{10}.$$

Corrigé 76. ← page 19

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-5\,(n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-5\,(n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-5\,(n+1)x)}}{5\,(n+1)}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-5\,(n+1)x)}}{5\,(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-5\,(n+1)x)}}{5\,(n+1)} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-5\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-5\,(n+1)x)}}{5\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-5\,(n+1)x)}}{5\,(n+1)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-5\,(n+1)x)}}{5\,(n+1)}\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{5\,(n+1)}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-5\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(5\,n+5)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\displaystyle\frac{0!}{(5\,n+5)^{0+1}} = \frac{1}{5\,(n+1)}$, et :
$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-5\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-5\,(n+1)x)}}{5\,(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{5\,(n+1)},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-5\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(5\,n+5)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-5\,(n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{5\,(n+1)}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-5\,(n+1)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{5\,(n+1)} \times \frac{k!}{(5\,n+5)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(5\,n+5)^{k+2}},$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$xe^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}.$$
Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-5\,x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-5\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{\left(-5\,x+e^{(-5\,x)}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^4 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-5\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^4\frac{e^{(-5\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^4 e^{(-5\,(n+1)x)}}{n!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^4 e^{(-5\,(n+1)x)}}{n!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^4 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-5\,x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-5\,(n+1)x)}}{n!} = x^4 e^{\left(-5\,x+e^{(-5\,x)}\right)}$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=4$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^4 e^{(-5\,(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x = \frac{24}{3125\,(n+1)^5 n!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{n!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^5}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^5}$ est d'exposant $5 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-5\,(n+1)x)}}{n!} = x^4 e^{\left(-5\,x+e^{(-5\,x)}\right)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{\left(-5\,x+e^{(-5\,x)}\right)}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24}{3125\,(n+1)^5 n!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 77. ← page 19

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)^2$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :

— on dérive $x \mapsto \ln(x)^2$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)^2}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)^2}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)^2}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2\,x^n\ln(x)}{n+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{2\,x^n\ln(x)}{n+1}\mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant le logarithme et en intégrant la fonction puissance. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(n+1)^3},$$

d'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\frac{1}{10}x \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\frac{1}{10}x$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 \ln(x)^2 \sin\left(\frac{1}{10}x\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{10}x\right)^{2\,n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \ln(x)^2 \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{10}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{10}x\right)^{2\,n+1}\ln(x)^2}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{10}x\right)^{2\,n+1}\ln(x)^2}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^2$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\frac{1}{10}x \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{10}x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = \ln(x)^2\sin\left(\frac{1}{10}x\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{10}x\right)^{2\,n+1}\ln(x)^2}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2\,n+1}}{4\,(n+1)^3\,(2\,n+1)!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{8\,(n+1)^3}\right)=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est d'exposant $3>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f:x\mapsto\ln(x)^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{10}\,x\right)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}=\ln(x)^2\sin\left(\frac{1}{10}\,x\right)$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1\ln(x)^2\sin\left(\frac{1}{10}\,x\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2\,n+1}(-1)^n}{4\,(n+1)^3\,(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 78. ← page 19

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\sin(5\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\sin(5\,x)\right|\leqslant e^{(-3\,(2\,n+1)x)}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\sin(5\,x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(6\,n-5i+3)x)}\mathrm{d}x\right)&=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(6\,n-5i+3)x)}}{-6\,n+5i-3}\right]_0^{+\infty}\right)\\&=\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-6\,n+5i-3}\right)\\&=\mathrm{Im}\left(-\frac{-6\,n-5i-3}{9\,(2\,n+1)^2+25}\right)\\&=\frac{5}{9\,(2\,n+1)^2+25}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\sinh(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-3\,x)}\in\mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-3\,x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\sin(5\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x\\&\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(5\,x)\,\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\sin(5\,x)}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\sin(5\,x)}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(5\,x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-3\,x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto \sin(5\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = \sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)!}\int_0^{+\infty}|\sin(5\,x)|e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{(2\,n+1)!}\int_0^{+\infty}e^{(-3\,(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2\,n+1)!}\left[\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{-6\,n-3}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{3\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}.\end{aligned}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^{\alpha}u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{3\,(2\,n+3)(2\,n+3)!}}{\frac{1}{3\,(2\,n+1)(2\,n+1)!}} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{(2\,n+3)!}{(2\,n+1)!} = \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\frac{1}{2\,(2\,n+3)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3\,(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\displaystyle f : x \mapsto \sin(5\,x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(-3\,(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = \sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\sin(5\,x)\sinh\left(e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5}{\left(9\,(2\,n+1)^2+25\right)(2\,n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 79. ← page 19

1. L'application $x \mapsto x^{2\,n}\ln(x)^2$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :

— on dérive $x \mapsto \ln(x)^2$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^{2n}$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{x^{2n+1}\ln(x)^2}{2n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{x^{2n+1}\ln(x)^2}{2n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^{2n}\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+1}\ln(x)^2}{2n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^{2n}\ln(x)}{2n+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{2x^{2n}\ln(x)}{2n+1}\mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\,\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant le logarithme et en intégrant la fonction puissance. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+1}\ln(x)}{2n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^1 x^{2n}\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3},$$

d'où le résultat.

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{1-(-x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \left(-x^2\right)^n \ln(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \left(-x^2\right)^n \ln(x)^2.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\left(-x^2\right)^n \ln(x)^2$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^2$ près, d'une série géométrique de raison $x^2 \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^{2n} = \frac{\ln(x)^2}{1+x^2}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)^n\left(-x^2\right)^n \ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}.$$

Or : $\displaystyle\frac{1}{(2n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^3 n^3}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^3}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^{2n} = \frac{\ln(x)^2}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^n}{(2\,n+1)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 80. ← page 20

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(2\,n+7)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(2\,n+7)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2\,n+7)x)}}{2\,n+7}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(2\,n+7)x)}}{2\,n+7} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(2\,n+7)x)}}{2\,n+7} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+7)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(2\,n+7)x)}}{2\,n+7}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-(2\,n+7)x)}}{2\,n+7}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(2\,n+7)x)}}{(2\,n+7)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(2\,n+7)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{(-7\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-7\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+7)x)}\mathrm{d}x.$$

   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = xe^{(-(2\,n+7)x)}.$$

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} xe^{(-(2\,n+7)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-7\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-2\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto xe^{(-7\,x)}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n = \frac{xe^{(-7\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
   — il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+7)^2}.$$

   Or : $\frac{1}{(2\,n+7)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^2n^2}$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2\,n+7)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

   Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto xe^{(-7\,x)}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-2\,x)}\right)^n = \frac{xe^{(-7\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-7\,x)}}{1-e^{(-2\,x)}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+7)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 81. ← page 20

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(n+1)x)}}{(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in]-1,1[$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\ln\left(e^{(-x)}+1\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x\frac{(-1)^n e^{(-(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n xe^{(-(n+1)x)}}{n+1}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n xe^{(-(n+1)x)}}{n+1}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $]-1,1[$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{(-(n+1)x)}}{n+1} = x\ln\left(e^{(-x)}+1\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure et va même probablement vous paraître étrange : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x\mapsto x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{(-(n+1)x)}}{n+1} = x\ln\left(e^{(-x)}+1\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}x\ln\left(e^{(-x)}+1\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 82. ← page 20

1. L'application $x\mapsto xe^{(-(4\,n+11)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x\mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto 1$;
   — on intègre $x\mapsto e^{(-(4\,n+11)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x\mapsto-\frac{e^{(-(4\,n+11)x)}}{4\,n+11}$.
   Comme $\lim_{x\to 0}-\frac{xe^{(-(4\,n+11)x)}}{4\,n+11}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}-\frac{xe^{(-(4\,n+11)x)}}{4\,n+11}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty}xe^{(-(4\,n+11)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(4\,n+11)x)}}{4\,n+11}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-(4\,n+11)x)}}{4\,n+11}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(4\,n+11)x)}}{(4\,n+11)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(4\,n+11)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{(-11\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}xe^{(-11\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-4\,x)}\right)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}xe^{(-(4\,n+11)x)}\mathrm{d}x.$$

   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\quad f_n(x)=xe^{(-(4\,n+11)x)}.$$

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x\in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0}f_n(x)=\sum_{n\geqslant 0}xe^{(-(4\,n+11)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $xe^{(-11\,x)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-4\,x)}\in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x\mapsto xe^{(-11\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-4\,x)}\right)^n = \frac{xe^{(-11\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}xe^{(-(4\,n+11)x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{(4\,n+11)^2}.$$

Or : $\dfrac{1}{(4\,n+11)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4^2n^2}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|=\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(4\,n+11)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f:x\mapsto xe^{(-11\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-4\,x)}\right)^n=\dfrac{xe^{(-11\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{(-11\,x)}}{1-e^{(-4\,x)}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4\,n+11)^2},$$

d'où le résultat.

Corrigé 83. ← page 20

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'application $x\mapsto x^3\ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x\mapsto\ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x\mapsto\frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
   — on intègre $x\mapsto x^3$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x\mapsto\frac14 x^4$.
   Comme $\lim_{x\to 0}\frac14 x^4\ln(x)^{n+1}=0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1}\frac14 x^4\ln(x)^{n+1}=0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x^3\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac14 x^4\ln(x)^{n+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac14(n+1)x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac14(n+1)x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{4}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\int_0^1 x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x=4^{-n-1}(-1)^n\,n!$ ». Pour $n=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(4)^{0+1}}=\dfrac14$, et :
   $$\int_0^1 x^3(\ln(x))^0\mathrm{d}x=\left[\frac14 x^4\right]_0^1=\frac14,$$
   et on a donc bien : $\int_0^1 x^3(\ln(x))^0\mathrm{d}x=\dfrac{(-1)^0 0!}{(4)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $n\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x^3\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{n+1}{4}\int_0^1 x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x&\overset{(\mathrm{P}_n)}{=}-\frac{n+1}{4}\times 4^{-n-1}(-1)^n\,n!\\&=4^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$
   d'où la proposition au rang $n+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^3 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2\,n}}{(2n)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^3 \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^3 \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^3 \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^3 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!} = x^3 \cos(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3 \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x = 4^{-2\,n-1}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{16} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!} = x^3 \cos(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^3 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-2\,n-1}\,(-1)^n\,,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^3 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{16}\right)^n = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{16}} = \frac{4}{17}.$$

Corrigé 84. ← page 20

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)^k$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(k+1)\ln(x)^k}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Comme $\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)^{k+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{(k+1)x^n\ln(x)^k}{n+1}\mathrm{d}x.$$
D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \dfrac{1}{n+1}$, et :
$$\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln(x)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n\ln(x)^k\,\mathrm{d}x &\overset{(P_k)}{=} -\frac{k+1}{n+1} \times \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}},\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \cosh(x)\ln(x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln(x)^3 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \ln(x)^3\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \frac{x^{2n}\ln(x)^3}{(2n)!}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2\,n}\ln(x)^3}{(2\,n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^3$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $x \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} = \cosh(x)\ln(x)^3$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 3$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^{2\,n}\ln(x)^3}{(2\,n)!}\mathrm{d}x = \frac{6}{(2\,n+1)^4\,(2\,n)!}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{(2\,n)!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2\,n+1)^4}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ est d'exposant $4 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} = \cosh(x)\ln(x)^3$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \cosh(x)\ln(x)^3\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{6}{(2\,n+1)^4\,(2\,n)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 85. ← page 21

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
— on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Comme $\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^1 e^x \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln(x)\,\frac{x^n}{n!}\mathrm{d}x.$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{n!}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \ln(x)}{n!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $x \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ln(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^n \ln(x)}{n!}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2 n!}.$$
(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\dfrac{1}{n!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :
$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ln(x)$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :
$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$
c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :
$$\int_0^1 e^x \ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2 n!},$$
d'où le résultat.

Corrigé 86. ← page 21

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-(-x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-x)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = (-x)^n \ln(x).$$
   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-x)^n \ln(x)$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, d'une série géométrique de raison $-x \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{\ln(x)}{1+x}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
   — il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -(-1)^n(-x)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$
   (Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Or : $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.
   Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n| = \sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

   Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{\ln(x)}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :
$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$
   c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{(n+1)^2},$$
   d'où le résultat.

Corrigé 87. ← page 21

1. L'application $x \mapsto x^{2\,n} \ln(x)^2$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^2$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^{2\,n}$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{2\,n+1}\ln(x)^2}{2\,n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{2\,n+1}\ln(x)^2}{2\,n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2\,n+1}\ln(x)^2}{2\,n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2\,x^{2\,n}\ln(x)}{2\,n+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{2\,x^{2\,n}\ln(x)}{2\,n+1}\mathrm{d}x.$$
   Pour calculer $\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)\,\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant le logarithme et en intégrant la fonction puissance. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :
   $$\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2\,n+1}\ln(x)}{2\,n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2\,n}}{2\,n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$
   On a donc, en conclusion :
   $$\int_0^1 x^{2\,n}\ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2\,n+1)^3},$$
   d'où le résultat.
2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(x^2\right)^n \ln(x)^2\,\mathrm{d}x.$$
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1[,\quad f_n(x) = \left(x^2\right)^n \ln(x)^2.$$
   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0{,}1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \left(x^2\right)^n \ln(x)^2$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)^2$ près, d'une série géométrique de raison $x^2 \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x)^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2\,n} = \frac{\ln(x)^2}{1-x^2}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
   — il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2\right)^n \ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2\,n+1)^3}.$$
   Or : $\frac{1}{(2\,n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^3 n^3}$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n| = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2\,n+1)^3}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \dfrac{\ln(x)^2}{1-x^2}$ est intégrable sur $]0,1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{1-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 88. ← page 21

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto e^{(-(n+1)x)} \sin(3x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $\left|e^{(-(n+1)x)} \sin(3x)\right| \leqslant e^{(-(n+1)x)}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence), donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(3x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Pour la calculer, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(n-3i+1)x)}\mathrm{d}x\right) &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n-3i+1)x)}}{-n+3i-1}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-n+3i-1}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(-\frac{-n-3i-1}{(n+1)^2+9}\right)\\ &= \frac{3}{(n+1)^2+9}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$xe^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(3x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(3x)\,\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{e^{(-(n+1)x)} \sin(3x)}{n!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{(-(n+1)x)} \sin(3x)}{n!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\sin(3x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en

$e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f \,:\, x \mapsto \sin(3\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!} = e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3\,x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} |\sin(3\,x)| e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \left[\frac{e^{(-(n+1)x)}}{-n-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)n!}.$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)n!}$ converge en utilisant la règle de D'Alembert (il marcherait également d'utiliser la méthode « $n^\alpha u_n$ »). Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{1}{(n+2)(n+1)!}}{\frac{1}{(n+1)n!}} = \frac{n+1}{n+2} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)n!}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{1} |f_n|$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f \,:\, x \mapsto \sin(3\,x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!} = e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3\,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} e^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \sin(3\,x)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{\left((n+1)^2+9\right) n!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 89. ← page 22

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(11\,n+10)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(11\,n+10)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(11\,n+10)x)}}{11\,n+10}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1} e^{(-(11\,n+10)x)}}{11\,n+10} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1} e^{(-(11\,n+10)x)}}{11\,n+10} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(11\,n+10)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1} e^{(-(11\,n+10)x)}}{11\,n+10} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(11\,n+10)x)}}{11\,n+10} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(11\,n+10)x)}}{11\,n+10} \mathrm{d}x$$

   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{11\,n+10}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(11\,n+10)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\dfrac{0!}{(11\,n+10)^{0+1}} = \dfrac{1}{11\,n+10}$, et :
$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(11\,n+10)x)}}{11\,n+10}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{11\,n+10},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(11\,n+10)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{11\,n+10}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{11\,n+10}\times\frac{k!}{(11\,n+10)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(11\,n+10)^{k+2}},$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{11}e^x}{e^{(11\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^{11}e^{(-10\,x)}}{1-\underbrace{e^{(-11\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{11}e^{(-10\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-11\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{11}e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x,$$
où nous avons factorisé par $e^{(11\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-11\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1{,}1[$) avec $u = e^{(-11\,x)}$.
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^{11}e^{(-(11\,n+10)x)}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{11}e^{(-(11\,n+10)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^{11}e^{(-10)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-11\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^{11}e^{(-10)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-11\,x)}\right)^n = \frac{x^{11}e^x}{e^{(11\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k=11$) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{11}e^{(-(11\,n+10)x)}\mathrm{d}x = \frac{11!}{(11\,n+10)^{12}}.$$
Or : $\dfrac{1}{(11\,n+10)^{12}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{11^{12}n^{12}}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{12}}$ est une série de Riemann d'exposant $12>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{11!}{(11\,n+10)^{12}}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^{11}e^{(-10)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-11\,x)}\right)^n = \frac{x^{11}e^x}{e^{(11\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{11}e^x}{e^{(11\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{11!}{(11\,n+10)^{12}},$$

d'où le résultat.

Corrigé 90. ← page 22

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^3 \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^3$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{4}x^4$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{4}x^4 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{4}x^4 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^1 x^3 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 \ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4}(n+1)x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{4}(n+1)x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{4}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^3 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = 4^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(4)^{0+1}} = \dfrac{1}{4}$, et :
   $$\int_0^1 x^3(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$
   et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^3(\ln(x))^0\mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(4)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{4}\int_0^1 x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{4} \times 4^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 4^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$
   d'où la proposition au rang $n+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^3 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2\,n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^3 \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n\, x^3 \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, x^3 \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^3 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $f : x \mapsto x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x^3 \sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^3 \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \mathrm{d}x = 4^{-2\,n-2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{16} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = x^3 \sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-2\,n-2} (-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{16} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{16}\right)^n = -\frac{1}{16} \frac{1}{1+\frac{1}{16}} = -\frac{1}{17}.$$

Corrigé 91. ← page 22

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-(7\,n+6)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^2$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 2\,x$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(7\,n+6)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^2 e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2 e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-(7\,n+6)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2 e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,x e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2\,x e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6} \mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x$, on recommence, en dérivant $x \mapsto x$ et en intégrant le facteur exponentiel. Les hypothèses de la formule de l'intégration par parties se vérifient semblablement, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(7\,n+6)x)}}{7\,n+6}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(7\,n+6)x)}}{(7\,n+6)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(7\,n+6)^2}.$$

On a donc, en conclusion :

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{(7\,n+6)^3},$$

d'où le résultat.

2. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^x}{e^{(7\,x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{(-6\,x)}}{1-\underbrace{e^{(-7\,x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2e^{(-6\,x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-7\,x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^2e^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(7\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-7\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\displaystyle\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1{,}1[$) avec $u = e^{(-7\,x)}$.

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^2e^{(-(7\,n+6)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^2e^{(-(7\,n+6)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^2e^{(-6)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-7\,x)} \in]-1{,}1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^2e^{(-6)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-7\,x)}\right)^n = \frac{x^2e^x}{e^{(7\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2e^{(-(7\,n+6)x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{(7\,n+6)^3}.$$

Or : $\displaystyle\frac{1}{(7\,n+6)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{7^3n^3}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(7\,n+6)^3}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^2e^{(-6)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-7\,x)}\right)^n = \frac{x^2e^x}{e^{(7\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^x}{e^{(7\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(7\,n+6)^3},$$

d'où le résultat.

Corrigé 92. ← page 22

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(2\,n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(2\,n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^{+\infty} xe^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$
2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\int_0^{+\infty} x\sin\left(e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x\frac{(-1)^n e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x.$$
   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n xe^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}.$$
   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n xe^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!} = x\sin\left(e^{(-x)}\right)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;
   — il reste à vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{xe^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n+1)!}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\,n+1)^2(2\,n+1)!}.$$
   Pour justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{(2\,n+1)!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :
   $$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2\,n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{(-(2n+1)x)}}{(2n+1)!} = x \sin\left(e^{(-x)}\right)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x \sin\left(e^{(-x)}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 (2n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 93. ← page 22

1. L'application $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^n$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^1 \ln(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln(x) \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x.$$

   L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}\ln(x)}{(2n+1)!}.$$

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
   — pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}\ln(x)}{(2n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $\ln(x)$ près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $x \in \mathbb{R}$; par conséquent

la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1[$, et sa somme $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$ $\ln(x)\sin(x)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0{,}1[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^{2n+1}\ln(x)}{(2n+1)!}\mathrm{d}x = \frac{1}{4(n+1)^2(2n+1)!}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0{,}1]$, de sorte que : $|\ln(x)| = -\ln(x)$.) Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{(2n+1)!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{4(n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \ln(x)\sin(x)$ est intégrable sur $]0{,}1[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 \ln(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{4(n+1)^2(2n+1)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 94. ← page 23

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^3 \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0{,}1]$.)
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0{,}1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^3$, qui est continue sur $]0{,}1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{4}x^4$.
   Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{4}x^4\ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{1}{4}x^4\ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^3\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4}(n+1)x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{4}(n+1)x^3\ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{4}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^3 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 4^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(4)^{0+1}} = \dfrac{1}{4}$, et :

$$\int_0^1 x^3(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^3(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(4)^{0+1}}$, d'où P_0.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{4}\int_0^1 x^3 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{4} \times 4^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 4^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, pour tout $x \in]0{,}1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^3 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^3 \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^3 \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0{,}1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^3 \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^3 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1]$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto x^3 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^3 \sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^3 \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x = 4^{-2n-2}.$$

(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0{,}1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{16} \in]-1{,}1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^3 \sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-2n-2}(-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^3 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{16}\right)^n = -\frac{1}{16}\frac{1}{1+\frac{1}{16}} = -\frac{1}{17}.$$

Corrigé 95. ← page 23

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-3(2n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-3(2n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-3(2n+1)x)}}{3(2n+1)}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-3(2n+1)x)}}{3(2n+1)} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-3(2n+1)x)}}{3(2n+1)} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-3(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-3(2n+1)x)}}{3(2n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-3(2n+1)x)}}{3(2n+1)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-3(2n+1)x)}}{3(2n+1)}\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{3(2n+1)}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-3(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(6n+3)^{k+1}}$ ». Pour $k=0$, on a $\frac{0!}{(6n+3)^{0+1}} = \frac{1}{3(2n+1)}$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-3(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-3(2n+1)x)}}{3(2n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3(2n+1)},$$

et on a donc bien : $\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-3(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(6n+3)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-3(2n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{3(2n+1)}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-3(2n+1)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{3(2n+1)} \times \frac{k!}{(6n+3)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(6n+3)^{k+2}},$$

d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3 e^{(3x)}}{e^{(6x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x^3 e^{(-3x)}}{1-\underbrace{e^{(-6x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3 e^{(-3x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-6x)}\right)^n \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^3 e^{(-3(2n+1)x)}\mathrm{d}x,$$

où nous avons factorisé par $e^{(6\,x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-6\,x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour $u \in]-1,1[$) avec $u = e^{(-6\,x)}$.

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^3 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^3 e^{(-3\,(2\,n+1)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^3 e^{(-3)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-6\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^3 e^{(-3)} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-6\,x)}\right)^n = \dfrac{x^3 e^{(3\,x)}}{e^{(6\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 3$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3 e^{(-3\,(2\,n+1)x)} \mathrm{d}x = \frac{2}{27\,(2\,n+1)^4}.$$

Or : $\dfrac{1}{(6\,n+3)^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6^4 n^4}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann d'exposant $4 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{27\,(2\,n+1)^4}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^3 e^{(-3)} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-6\,x)}\right)^n = \dfrac{x^3 e^{(3\,x)}}{e^{(6\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(3\,x)}}{e^{(6\,x)}-1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{27\,(2\,n+1)^4},$$

d'où le résultat.

Corrigé 96. ← page 23

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^6 \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)

   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :

   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;

   — on intègre $x \mapsto x^6$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{7}\,x^7$.

   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{7}\,x^7 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{7}\,x^7 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^6 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{7}\,x^7 \ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{7}\,(n+1)x^6 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{7}\,(n+1)x^6 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{7}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^6 \ln(x)^n \, \mathrm{d}x = 7^{-n-1} (-1)^n \, n!$ ». Pour $n = 0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(7)^{0+1}} = \dfrac{1}{7}$, et :
$$\int_0^1 x^6 (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{7}\, x^7\right]_0^1 = \frac{1}{7},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^6 (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(7)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^6 \ln(x)^{n+1} \, \mathrm{d}x = -\frac{n+1}{7} \int_0^1 x^6 \ln(x)^n \, \mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{7} \times 7^{-n-1} (-1)^n \, n! \\ &= 7^{-n-2} (-1)^{n+1} (n+1)!,\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $n+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Or, pour tout $x \in]0{,}1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^6 \sin(\ln(x)) \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 x^6 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^6 \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0{,}1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^6 \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0{,}1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^6 \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^6 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0{,}1]$, et sa somme $f : x \mapsto x^6 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^6 \sin(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0{,}1]$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^6 \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{d}x = 7^{-2n-2}.$$
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{49} \in]-1{,}1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^6 \sin(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^6 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 7^{-2n-2}(-1)^{n+1},$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^6 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{49}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{49}\right)^n = -\frac{1}{49}\frac{1}{1+\frac{1}{49}} = -\frac{1}{50}.$$

Corrigé 97. ← page 24

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(8n+7)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(8n+7)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(8n+7)x)}}{8n+7}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(8n+7)x)}}{8n+7} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(8n+7)x)}}{8n+7} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :
   $$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(8n+7)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(8n+7)x)}}{8n+7}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-(8n+7)x)}}{8n+7}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{(k+1)x^k e^{(-(8n+7)x)}}{8n+7}\mathrm{d}x.$$
   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{8n+7}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).
2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(8n+7)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\frac{0!}{(8n+7)^{0+1}} = \frac{1}{8n+7}$, et :
   $$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(8n+7)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(8n+7)x)}}{8n+7}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{8n+7},$$
   et on a donc bien : $\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(8n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(8n+7)^{0+1}}$, d'où P_0.
   À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
   $$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(8n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{8n+7}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(8n+7)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{8n+7}\times\frac{k!}{(8n+7)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(8n+7)^{k+2}},$$
   d'où la proposition au rang $k+1$.
   Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.
3. On aimerait écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
   $$\int_0^{+\infty}\frac{x^4 e^x}{e^{(8x)}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x^4 e^{(-7x)}}{1-\underbrace{e^{(-8x)}}_{<1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^4 e^{(-7x)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{(-8x)}\right)^n\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^4 e^{(-(8n+7)x)}\mathrm{d}x,$$
   où nous avons factorisé par $e^{(8x)}$ au dénominateur pour faire apparaître $e^{(-8x)}$, et bien avoir un terme inférieur à 1 strictement : c'est essentiel pour utiliser la formule $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (valable uniquement pour

$u \in]-1,1[$) avec $u = e^{(-8\,x)}$.
L'égalité ($*$) est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^4 e^{(-(8\,n+7)x)}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^4 e^{(-(8\,n+7)x)}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par $x^4 e^{(-7)}$ près, d'une série géométrique de raison $e^{(-8\,x)} \in]-1,1[$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^4 e^{(-7)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n = \frac{x^4 e^x}{e^{(8\,x)}-1}$ est clairement continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 4$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^4 e^{(-(8\,n+7)x)}\mathrm{d}x = \frac{24}{(8\,n+7)^5}.$$

Or : $\frac{1}{(8\,n+7)^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8^5 n^5}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^5}$ est une série de Riemann d'exposant $5 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{24}{(8\,n+7)^5}$ converge également, ce qu'on voulait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^4 e^{(-7)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{(-8\,x)}\right)^n = \frac{x^4 e^x}{e^{(8\,x)}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4 e^x}{e^{(8\,x)}-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{24}{(8\,n+7)^5},$$

d'où le résultat.

Corrigé 98. ← page 24

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^k e^{(-(2\,n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto x^{k+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto (k+1)x^k$;
   — on intègre $x \mapsto e^{(-(2\,n+1)x)}$, qui est continue sur $[0,+\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}$.
   Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{x^{k+1}e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{k+1}e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{k+1}e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(k+1)x^k e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\mathrm{d}x.$$

   D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{k+1}{2\,n+1}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons P_k la proposition : « $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k!}{(2\,n+1)^{k+1}}$ ». Pour $k = 0$, on a $\dfrac{0!}{(2\,n+1)^{0+1}} = \dfrac{1}{2\,n+1}$, et :
$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{2\,n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\,n+1},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^0 e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{0!}{(2\,n+1)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Montrons P_{k+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x = \frac{k+1}{2\,n+1}\int_0^{+\infty} x^k e^{(-(2\,n+1)x)}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{P}_k)}{=} \frac{k+1}{2\,n+1} \times \frac{k!}{(2\,n+1)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(2\,n+1)^{k+2}},$$
d'où la proposition au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$x\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}.$$
Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^3 \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2n)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^3 \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^3 e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
— pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^3 e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^3 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x^3 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!} = x^3 \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)}$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;
— il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente (où l'on pose $k = 3$) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x = \frac{6}{(2\,n+1)^4\,(2\,n)!}.$$
Pour justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note

que le facteur $\dfrac{1}{(2\,n)!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(2\,n+1)^4}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ est d'exposant $4 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(2\,n+1)x)}}{(2\,n)!} = x^3 \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x^3 \cosh\left(e^{(-x)}\right) e^{(-x)} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(2\,n+1)^4\,(2\,n)!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 99. ← page 24

1. L'application $x \mapsto xe^{(-(n+1)x)}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge.
Nous allons à présent la calculer en intégrant par parties :
— on dérive $x \mapsto x$, qui est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1$;
— on intègre $x \mapsto e^{(-(n+1)x)}$, qui est continue sur $[0, +\infty[$; une primitive est $x \mapsto -\frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1}$.
Comme $\lim_{x\to 0} -\frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-(n+1)x)} \mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n+1} \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-(n+1)x)}}{(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$xe^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $e^{(-x)}$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{\left(-x+e^{(-x)}\right)} \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!} \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n!}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $e^{(-x)} \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $f : x \mapsto x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!} = xe^{\left(-x+e^{(-x)}\right)}$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues ;

— il reste à vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{(-(n+1)x)}}{n!}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2 n!}.$$

Pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$, voici une approche parmi d'autres (celle choisie n'est pas nécessairement la meilleure : elle est choisie parce qu'elle est la plus rapide à coder) : on note que le facteur $\frac{1}{n!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge également, ce qu'on voulait démontrer. Il aurait également été possible de démontrer la convergence avec la règle de D'Alembert ou la méthode « $n^\alpha u_n$ ».

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(-(n+1)x)}}{n!} = xe^{\left(-x+e^{(-x)}\right)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^{+\infty} xe^{\left(-x+e^{(-x)}\right)}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 n!},$$

d'où le résultat.

Corrigé 100. ← page 24

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^5 \ln(x)^n$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 d'après le théorème des croissances comparées, ce qui démontre l'intégrabilité grâce au théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (plus de détails seraient exigibles en principe). Ainsi l'intégrale de l'énoncé converge. (On pouvait aussi, simplement, parler de prolongement par continuité sur le segment $[0,1]$.)
   Démontrons à présent la relation de l'énoncé, en intégrant par parties :
   — on dérive $x \mapsto \ln(x)^{n+1}$, qui est de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée $x \mapsto \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$;
   — on intègre $x \mapsto x^5$, qui est continue sur $]0,1]$; une primitive est $x \mapsto \frac{1}{6}x^6$.
   Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{6}x^6 \ln(x)^{n+1} = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées) et $\lim_{x\to 1} \frac{1}{6}x^6 \ln(x)^{n+1} = 0$, l'intégration par parties est licite et on a :

$$\int_0^1 x^5 \ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 \ln(x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{6}(n+1)x^5 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{6}(n+1)x^5 \ln(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat, par linéarité de l'intégrale (pour mettre en facteur le coefficient constant $\frac{n+1}{6}$, et reconnaître l'identité de l'énoncé).

2. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons démontrer l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\displaystyle\int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x = 6^{-n-1}(-1)^n n!$ ». Pour $n=0$, on a $\dfrac{(-1)^0 0!}{(6)^{0+1}} = \dfrac{1}{6}$, et :
$$\int_0^1 x^5 (\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{6},$$
et on a donc bien : $\displaystyle\int_0^1 x^5(\ln(x))^0 \mathrm{d}x = \frac{(-1)^0 0!}{(6)^{0+1}}$, d'où P_0.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Pour cela, on note que d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^5 \ln(x)^{n+1} \,\mathrm{d}x = -\frac{n+1}{6}\int_0^1 x^5 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x &\overset{(\mathrm{P}_n)}{=} -\frac{n+1}{6} \times 6^{-n-1}(-1)^n n! \\ &= 6^{-n-2}(-1)^{n+1}(n+1)!,\end{aligned}$$
d'où la proposition au rang $n+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

3. On rappelle le développement en série entière suivant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\ln(x) \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'utiliser cette identité en remplaçant x par $\ln(x)$. On aimerait alors écrire, *sous réserve d'existence des objets en jeu* :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^5 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^5 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2\,n}}{(2n)!}\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^5 \frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
L'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^5 \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}.$$
Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1]$, et intégrable comme on l'a implicitement démontré dans la question précédente ;
- pour tout $x \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^5 \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}$ converge puisqu'il s'agit, à multiplication par x^5 près, du développement en série entière d'une fonction de référence (que nous avons rappelé en début de résolution), dont on sait qu'elle converge sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en $\ln(x) \in \mathbb{R}$; par conséquent la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, et sa somme $\displaystyle f : x \mapsto x^5 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!} = x^5\cos(\ln(x))$ est évidemment continue (par morceaux) sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues ;
- il reste à vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; pour cela on remarque que l'on a, d'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^5 \ln(x)^{2\,n}}{(2\,n)!}\mathrm{d}x = 6^{-2\,n-1}.$$
(Attention à ne pas oublier que le logarithme est négatif sur $]0,1]$, de sorte que : $|\ln(x)|^{2n+1} = (-\ln(x))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\ln(x))^{2n+1} = -(\ln(x))^{2n+1}$.)
On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{36} \in]-1,1[$, donc elle converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n|$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $f : x \mapsto x^5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(x)^{2n}}{(2n)!} = x^5 \cos(\ln(x))$ est intégrable sur $]0,1]$, et d'autre part qu'on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, au vu des calculs effectués plus haut :

$$\int_0^1 x^5 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 6^{-2n-1}(-1)^n\,,$$

d'où le résultat. Comme cette somme est géométrique, on sait la calculer explicitement. On a alors :

$$\int_0^1 x^5 \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{36}\right)^n = \frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{1}{36}} = \frac{6}{37}.$$