Intégrale avec des fonctions trigonométriques

Savoir calculer explicitement une intégrale dépendant d'une ou plusieurs fonctions trigonométriques, circulaires ou réciproques, en utilisant à bon escient l'exponentielle complexe ou les techniques de linéarisation.

Remarque sur le corrigé. Certaines intégrales de cette banque peuvent se calculer *via* une double intégration par parties (toute intégrale de la forme $\int_I \cos(ax)e^{-bx}\mathrm{d}x$ ou $\int_I \sin(ax)e^{-bx}\mathrm{d}x$, par exemple). Je n'utiliserai jamais cette technique dans ce contexte, puisque je ne la trouve ni efficace ni conceptuellement instructive.

Exercice 1. → page 10

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Calculer l'intégrale : $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x)^6 \,\mathrm{d}x$. → page 10

Exercice 3. Calculer l'intégrale : $\int_{-4}^{-2} \sinh(10\,x)^2 \sinh(x) \,\mathrm{d}x$. → page 11

Exercice 4. Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{1} \sinh(2\,x)^3 \sinh(x)^2 \,\mathrm{d}x$. → page 11

Exercice 5. Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)^6 \,\mathrm{d}x$. → page 11

Exercice 6. Calculer l'intégrale : $\int_{-13}^{1} \cosh(x)^2 \sinh(2\,x)^3 \,\mathrm{d}x$. → page 12

Exercice 7. Calculer l'intégrale : $\int_{-5}^{0} \sinh(4\,x)^2 \sinh(x)^4 \,\mathrm{d}x$. → page 12

Exercice 8. Calculer l'intégrale : $\int_{-14}^{4} \cosh(x)^2 \sinh(x)^4 \,\mathrm{d}x$. → page 13

Exercice 9. Calculer l'intégrale : $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \cos(x)^3 \sin(x)^3 \,\mathrm{d}x$. → page 13

Exercice 10. Calculer l'intégrale : $\int_{-3}^{0} \cosh(2\,x)^2 \cosh(x) \,\mathrm{d}x$. → page 13

Exercice 11. Calculer l'intégrale : $\int_{-4\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos(3\,x) \sin(121\,x)^4 \,\mathrm{d}x$. → page 14

Exercice 12. Calculer l'intégrale : $\int_{-17\pi}^{-3\pi} \cos(x)^2 e^{(4\,x)} \mathrm{d}x$. → page 14

Exercice 13. Calculer l'intégrale : $\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos(11\,x)^2 e^{(-12\,x)} \mathrm{d}x$. → page 15

Exercice 14. → page 15

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\, e^{x}\mathrm{d}x$. → page 16

Exercice 16. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{1} \sinh(x)^5\,\mathrm{d}x$. → page 16

Exercice 17. → page 16

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty} \cos(4x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty} \cos(4x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 18. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-8}^{24} \cosh(7x)^2 \sinh(9x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 17

Exercice 19. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)} \sin(3x)\,\mathrm{d}x$. → page 17

Exercice 20. → page 17

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-21x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-21x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 21. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{2\pi}^{4\pi} e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$. → page 18

Exercice 22. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} \cos(8x)^3 \cos(2x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 18

Exercice 23. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} e^{x} \sin(4x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 18

Exercice 24. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} e^{(2x)} \sin(7x)\,\mathrm{d}x$. → page 19

Exercice 25. → page 19

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2 \cos(x)^2 e^{(-5x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2 \cos(x)^2 e^{(-5x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 26. → page 20

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{(-7x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{(-7x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 27. Calculer l'intégrale : $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(4x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$. → page 20

Exercice 28. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{25\pi} \cos(2x)^4 \sin(x)\, \mathrm{d}x$. → page 21

Exercice 29. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} x e^{x} \sin(x)\, \mathrm{d}x$. → page 21

Exercice 30. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{3\pi} e^{x} \sin(6x)\, \mathrm{d}x$. → page 21

Exercice 31. → page 21

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x \cos(x)^2 e^{(-2x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x \cos(x)^2 e^{(-2x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 32. → page 22

1. Montrer que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} x \cos(x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{+\infty} x \cos(x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 33. Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^{0} \sinh(6x) \sinh(2x)^3\, \mathrm{d}x$. → page 23

Exercice 34. → page 23

1. Montrer que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} e^{(-x)} \sin(x)^2\, \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{+\infty} e^{(-x)} \sin(x)^2\, \mathrm{d}x$.

Exercice 35. Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^{1} \cosh(8x) \cosh(x)^2\, \mathrm{d}x$. → page 24

Exercice 36. → page 24

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x$.

Exercice 37. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} \sin(5x)^2 \sin(x)^4\, \mathrm{d}x$. → page 25

Exercice 38. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\pi} \cos(2x)^2 e^{(2x)} \mathrm{d}x$. → page 25

Exercice 39. → page 26

1. Montrer que l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)\, \mathrm{d}x$ converge.

2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 40. → page 26

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(12\,x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(12\,x)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 41. → page 27

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x \cos(3\,x)^2 e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x \cos(3\,x)^2 e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 42. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{0} \cos(2\,x) e^{x}\mathrm{d}x$. → page 28

Exercice 43. → page 28

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\infty} e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\infty} e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 44. → page 28

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{11}{3}\pi}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{11}{3}\pi}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 45. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} x e^{(-3\,x)} \sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 29

Exercice 46. → page 30

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 47. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} \cos(x)^4 \sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x$. → page 31

Exercice 48. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} x e^{(-3\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$. → page 31

Exercice 49. → page 31

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2 e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2 e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 50. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \cos(5x)\cos(x)^3 \,\mathrm{d}x.$ → page 32

Exercice 51. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} e^{(-4x)}\sin(6x)^2 \,\mathrm{d}x.$ → page 32

Exercice 52. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\pi}^{5\pi} \cos(107x)^2\sin(12x)^2 \,\mathrm{d}x.$ → page 33

Exercice 53. → page 33

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x\cos(2x)^2 e^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x\cos(2x)^2 e^{(-2x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 54. → page 34

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{(-7x)}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{(-7x)}\sin(3x)\,\mathrm{d}x.$

Exercice 55. → page 34

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(4x)^2 e^{(-7x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(4x)^2 e^{(-7x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 56. → page 35

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{32\pi}^{+\infty} \cos(4x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{32\pi}^{+\infty} \cos(4x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 57. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(2x)}\sin(11x)\,\mathrm{d}x.$ → page 36

Exercice 58. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \sin(11x)^3\sin(x)^2 \,\mathrm{d}x.$ → page 36

Exercice 59. → page 36

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(5x)^2 e^{(-12x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(5x)^2 e^{(-12x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 60. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)}\sin(5x)^2 \,\mathrm{d}x.$ → page 37

Exercice 61. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{2}^{51} \cosh(x)^4\sinh(2x)^2 \,\mathrm{d}x.$ → page 38

Exercice 62. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-3}^{2} \sinh(9x)^2 \sinh(2x)^2 \,\mathrm{d}x$. → page 38

Exercice 63. → page 38

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{4}{3}\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2x)\, e^{(-3x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{4}{3}\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2x)\, e^{(-3x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 64. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(x)^4 \,\mathrm{d}x$. → page 39

Exercice 65. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\pi} e^{x} \sin(2x) \,\mathrm{d}x$. → page 39

Exercice 66. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \cos(x)^2 \sin(3x)^3 \,\mathrm{d}x$. → page 40

Exercice 67. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \sin(65x)^4 \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x$. → page 40

Exercice 68. → page 40

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x \cos(2x)^2\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x \cos(2x)^2\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 69. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{0} \cos(x)^3 \,\mathrm{d}x$. → page 41

Exercice 70. → page 41

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos(3x)^2\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos(3x)^2\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 71. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{0} \cosh(2x)^3 \sinh(4x)^3 \,\mathrm{d}x$. → page 42

Exercice 72. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} \sin(2x)^3 \sin(x)^3 \,\mathrm{d}x$. → page 42

Exercice 73. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{3} \cosh(x)^3 \sinh(x)^2 \,\mathrm{d}x$. → page 43

Exercice 74. → page 43

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} \cos(x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} \cos(x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 75. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-4\pi}^{2\pi} \cos(6x)\, e^{(9x)} \mathrm{d}x$. → page 44

Exercice 76. → page 44

1. Montrer que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2 \, \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2 \, \mathrm{d}x$.

Exercice 77. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{3\pi} \cos(x) \sin(3x)^3 \, \mathrm{d}x$. → page 45

Exercice 78. → page 45

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(5x)^2 e^{(-42x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(5x)^2 e^{(-42x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 79. → page 46

1. Montrer que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} x e^{(-3x)} \sin(11x)^2 \, \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{+\infty} x e^{(-3x)} \sin(11x)^2 \, \mathrm{d}x$.

Exercice 80. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} x e^{x} \sin(3x) \, \mathrm{d}x$. → page 46

Exercice 81. → page 46

1. Montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} e^{(-4x)} \sin(13x)^2 \, \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{\pi}^{+\infty} e^{(-4x)} \sin(13x)^2 \, \mathrm{d}x$.

Exercice 82. → page 47

1. Montrer que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(2x) \, \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{+\infty} x e^{(-x)} \sin(2x) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 83. Calculer l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{18\pi} \sin(24x)^2 \sin(x)^2 \, \mathrm{d}x$. → page 48

Exercice 84. → page 48

1. Montrer que l'intégrale $\int_{3\pi}^{+\infty} x^2 \cos(x) e^{(-2x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{3\pi}^{+\infty} x^2 \cos(x) e^{(-2x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 85. → page 49

1. Montrer que l'intégrale $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 \cos(28x) e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 \cos(28x) e^{(-x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 86. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} x\cos(x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x.$ → page 49

Exercice 87. → page 49

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2\cos(2\,x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2\cos(2\,x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 88. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sinh(12\,x)^2\sinh(3\,x)^3\,\mathrm{d}x.$ → page 50

Exercice 89. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-7}^{5} \sinh(44\,x)\sinh(3\,x)^3\,\mathrm{d}x.$ → page 51

Exercice 90. → page 51

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-5\,x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-5\,x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x.$

Exercice 91. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sin(5\,x)^4\sin(x)\,\mathrm{d}x.$ → page 52

Exercice 92. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{2} \cosh(3\,x)^3\sinh(x)\,\mathrm{d}x.$ → page 52

Exercice 93. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x.$ → page 52

Exercice 94. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{1} \cosh(2\,x)^2\cosh(x)\,\mathrm{d}x.$ → page 53

Exercice 95. → page 53

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 96. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{1} \cosh(3\,x)\sinh(x)^3\,\mathrm{d}x.$ → page 53

Exercice 97. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \cos(3\,x)\sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x.$ → page 54

Exercice 98. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{14}{3}\pi} \cos(x)^2\sin(x)^3\,\mathrm{d}x.$ → page 54

Exercice 99. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-6\,\pi}^{0} \cos(6\,x)^4\cos(x)\,\mathrm{d}x.$ → page 54

Exercice 100. → page 55

1. Montrer que l'intégrale $\int_{2\pi}^{+\infty} \cos(3x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer l'intégrale : $\int_{2\pi}^{+\infty} \cos(3x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$.

Corrigé 1. ← page 1

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2$ est continue sur $[-\frac{1}{6}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{6}\pi, +\infty[$, on a :
$$0 \leqslant x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2 \leqslant x^2 e^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-x)} = x^4 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$x^2 e^{(-x)} = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-\frac{1}{6}\pi, 1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\, x^2 (\cos(2x) - 1) e^{(-x)}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{((2i-1)\,x)} \mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\Bigg(-\left(\frac{1}{360} i - \frac{1}{180}\right) \sqrt{3}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} + \left(\frac{1}{180} i + \frac{1}{360}\right) \pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} - \left(\frac{1}{50} i + \frac{2}{75}\right) \sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} - \Bigg(\frac{2}{75} i$$
et donc :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{180}\sqrt{3}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} + \frac{1}{360}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} - \frac{2}{75}\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} + \frac{1}{50}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} - \frac{2}{125}\sqrt{3} e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} - \frac{11}{125} e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)}.$$
On calcule de même $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x = -\frac{1}{36}\left(12\pi - \pi^2 - 72\right) e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)}$. On peut conclure :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{360}\sqrt{3}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} + \frac{1}{80}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} + \frac{1}{75}\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} - \frac{53}{300}\pi e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} + \frac{1}{125}\sqrt{3} e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} + \frac{261}{250} e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)}.$$

Corrigé 2. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. ← page 1
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned}\sin(x)^6 &= \frac{1}{-64}\left(e^{(i\,x)} - e^{(-i\,x)}\right)^6 \\ &= \frac{1}{-64}\left(e^{(6i\,x)} - 6\,e^{(4i\,x)} + 15\,e^{(2i\,x)} + 15\,e^{(-2i\,x)} - 6\,e^{(-4i\,x)} + e^{(-6i\,x)} - 20\right) \\ &= -\frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) - \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x)^6 \,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(-\frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) - \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{5}{16}x - \frac{1}{192}\sin(6x) + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{15}{64}\sin(2x)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \\ &= \frac{5}{96}\pi + \frac{9}{64}\sqrt{3},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 3. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(x)$ et $\sinh(10x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 1

$$\begin{aligned}\sinh(10x)^2 \sinh(x) &= \frac{1}{8} - \left(e^{(10x)} - e^{(-10x)}\right)^2 \left(e^{(-x)} - e^{x}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{(21x)} - e^{(19x)} + 2e^{(-x)} + e^{(-19x)} - e^{(-21x)} - 2e^{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sinh(21x) - \frac{1}{4}\sinh(19x) - \frac{1}{2}\sinh(x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-2} \sinh(10x)^2 \sinh(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-4}^{-2} \left(\frac{1}{4}\sinh(21x) - \frac{1}{4}\sinh(19x) - \frac{1}{2}\sinh(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{84}\cosh(21x) - \frac{1}{76}\cosh(19x) - \frac{1}{2}\cosh(x)\right]_{-4}^{-2} \\ &= -\frac{1}{84}\cosh(84) + \frac{1}{76}\cosh(76) + \frac{1}{84}\cosh(42) - \frac{1}{76}\cosh(38) + \frac{1}{2}\cosh(4) - \frac{1}{2}\cosh(2),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 4. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(2x)$ et $\sinh(x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 1

$$\begin{aligned}\sinh(2x)^3 \sinh(x)^2 &= \frac{1}{32}\left(e^{(2x)} - e^{(-2x)}\right)^3 \left(e^{(-x)} - e^{x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{(8x)} - 2e^{(6x)} - 2e^{(4x)} + 6e^{(2x)} - 6e^{(-2x)} + 2e^{(-4x)} + 2e^{(-6x)} - e^{(-8x)}\right) \\ &= \frac{1}{16}\sinh(8x) - \frac{1}{8}\sinh(6x) - \frac{1}{8}\sinh(4x) + \frac{3}{8}\sinh(2x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sinh(2x)^3 \sinh(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{16}\sinh(8x) - \frac{1}{8}\sinh(6x) - \frac{1}{8}\sinh(4x) + \frac{3}{8}\sinh(2x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{128}\cosh(8x) - \frac{1}{48}\cosh(6x) - \frac{1}{32}\cosh(4x) + \frac{3}{16}\cosh(2x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{128}\cosh(8) - \frac{1}{48}\cosh(6) - \frac{1}{32}\cosh(4) + \frac{3}{16}\cosh(2) - \frac{55}{384},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 5. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. ← page 1

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\cos(x)^6 &= \frac{1}{64}\left(e^{(i\,x)} + e^{(-i\,x)}\right)^6 \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{(6i\,x)} + 6\,e^{(4i\,x)} + 15\,e^{(2i\,x)} + 15\,e^{(-2i\,x)} + 6\,e^{(-4i\,x)} + e^{(-6i\,x)} + 20\right) \\
&= \frac{1}{32}\cos(6\,x) + \frac{3}{16}\cos(4\,x) + \frac{15}{32}\cos(2\,x) + \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)^6 \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{32}\cos(6\,x) + \frac{3}{16}\cos(4\,x) + \frac{15}{32}\cos(2\,x) + \frac{5}{16}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{5}{16}\,x + \frac{1}{192}\sin(6\,x) + \frac{3}{64}\sin(4\,x) + \frac{15}{64}\sin(2\,x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \\
&= \frac{5}{32}\,\pi,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 6. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(2\,x)$ et $\cosh(x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 1

$$\begin{aligned}
\cosh(x)^2 \sinh(2\,x)^3 &= \frac{1}{32}\left(e^{(2\,x)} - e^{(-2\,x)}\right)^3 \left(e^{(-x)} + e^{x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{(8\,x)} + 2\,e^{(6\,x)} - 2\,e^{(4\,x)} - 6\,e^{(2\,x)} + 6\,e^{(-2\,x)} + 2\,e^{(-4\,x)} - 2\,e^{(-6\,x)} - e^{(-8\,x)}\right) \\
&= \frac{1}{16}\sinh(8\,x) + \frac{1}{8}\sinh(6\,x) - \frac{1}{8}\sinh(4\,x) - \frac{3}{8}\sinh(2\,x).
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-13}^{1} \cosh(x)^2 \sinh(2\,x)^3 \,\mathrm{d}x &= \int_{-13}^{1} \left(\frac{1}{16}\sinh(8\,x) + \frac{1}{8}\sinh(6\,x) - \frac{1}{8}\sinh(4\,x) - \frac{3}{8}\sinh(2\,x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{128}\cosh(8\,x) + \frac{1}{48}\cosh(6\,x) - \frac{1}{32}\cosh(4\,x) - \frac{3}{16}\cosh(2\,x)\right]_{-13}^{1} \\
&= -\frac{1}{128}\cosh(104) - \frac{1}{48}\cosh(78) + \frac{1}{32}\cosh(52) + \frac{3}{16}\cosh(26) + \frac{1}{128}\cosh(8) + \frac{1}{48}\cosh(6) - \frac{1}{32}\,\mathrm{co}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 7. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(x)$ et $\sinh(4\,x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 1

$$\begin{aligned}
\sinh(4\,x)^2 \sinh(x)^4 &= \frac{1}{64}\left(e^{(4\,x)} - e^{(-4\,x)}\right)^2 \left(e^{(-x)} - e^{x}\right)^4 \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{(12\,x)} - 4\,e^{(10\,x)} + 6\,e^{(8\,x)} - 4\,e^{(6\,x)} - e^{(4\,x)} + 8\,e^{(2\,x)} + 8\,e^{(-2\,x)} - e^{(-4\,x)} - 4\,e^{(-6\,x)} + 6\,e^{(-8\,x)} - 4\,e^{(-10\,x)}\right. \\
&= \frac{1}{32}\cosh(12\,x) - \frac{1}{8}\cosh(10\,x) + \frac{3}{16}\cosh(8\,x) - \frac{1}{8}\cosh(6\,x) - \frac{1}{32}\cosh(4\,x) + \frac{1}{4}\cosh(2\,x) - \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-5}^{0} \sinh(4\,x)^2 \sinh(x)^4 \,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{0} \left(\frac{1}{32}\cosh(12\,x) - \frac{1}{8}\cosh(10\,x) + \frac{3}{16}\cosh(8\,x) - \frac{1}{8}\cosh(6\,x) - \frac{1}{32}\cosh(4\,x) + \frac{1}{4}\cosh(2\,x) - \frac{3}{16}\right. \\
&= \left[-\frac{3}{16}\,x + \frac{1}{384}\sinh(12\,x) - \frac{1}{80}\sinh(10\,x) + \frac{3}{128}\sinh(8\,x) - \frac{1}{48}\sinh(6\,x) - \frac{1}{128}\sinh(4\,x) + \frac{1}{8}\sinh(\right. \\
&= \frac{1}{384}\sinh(60) - \frac{1}{80}\sinh(50) + \frac{3}{128}\sinh(40) - \frac{1}{48}\sinh(30) - \frac{1}{128}\sinh(20) + \frac{1}{8}\sinh(10) - \frac{15}{16},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 8. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 1

$$\begin{aligned}\cosh(x)^2 \sinh(x)^4 &= \frac{1}{64}\left(e^{(-x)} + e^{x}\right)^2 \left(e^{(-x)} - e^{x}\right)^4 \\ &= \frac{1}{64}\left(e^{(6\,x)} - 2\,e^{(4\,x)} - e^{(2\,x)} - e^{(-2\,x)} - 2\,e^{(-4\,x)} + e^{(-6\,x)} + 4\right) \\ &= \frac{1}{32}\cosh(6\,x) - \frac{1}{16}\cosh(4\,x) - \frac{1}{32}\cosh(2\,x) + \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-14}^{4} \cosh(x)^2 \sinh(x)^4 \,\mathrm{d}x &= \int_{-14}^{4} \left(\frac{1}{32}\cosh(6\,x) - \frac{1}{16}\cosh(4\,x) - \frac{1}{32}\cosh(2\,x) + \frac{1}{16}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{16}\,x + \frac{1}{192}\sinh(6\,x) - \frac{1}{64}\sinh(4\,x) - \frac{1}{64}\sinh(2\,x)\right]_{-14}^{4} \\ &= \frac{1}{192}\sinh(84) - \frac{1}{64}\sinh(56) - \frac{1}{64}\sinh(28) + \frac{1}{192}\sinh(24) - \frac{1}{64}\sinh(16) - \frac{1}{64}\sinh(8) + \frac{9}{8},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 9. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 1

$$\begin{aligned}\cos(x)^3 \sin(x)^3 &= \frac{1}{-64i}\left(e^{(i\,x)} + e^{(-i\,x)}\right)^3 \left(e^{(i\,x)} - e^{(-i\,x)}\right)^3 \\ &= \frac{1}{-64i}\left(e^{(6i\,x)} - 3\,e^{(2i\,x)} + 3\,e^{(-2i\,x)} - e^{(-6i\,x)}\right) \\ &= -\frac{1}{32}\sin(6\,x) + \frac{3}{32}\sin(2\,x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \cos(x)^3 \sin(x)^3 \,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{32}\sin(6\,x) + \frac{3}{32}\sin(2\,x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{192}\cos(6\,x) - \frac{3}{64}\cos(2\,x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{12},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 10. Commençons par linéariser, en écrivant $\cosh(2\,x)$ et $\cosh(x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 1

$$\begin{aligned}\cosh(2\,x)^2 \cosh(x) &= \frac{1}{8}\left(e^{(2\,x)} + e^{(-2\,x)}\right)^2 \left(e^{(-x)} + e^{x}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{(5\,x)} + e^{(3\,x)} + 2\,e^{(-x)} + e^{(-3\,x)} + e^{(-5\,x)} + 2\,e^{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cosh(5\,x) + \frac{1}{4}\cosh(3\,x) + \frac{1}{2}\cosh(x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0} \cosh(2\,x)^2 \cosh(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{4}\,\cosh(5\,x) + \frac{1}{4}\,\cosh(3\,x) + \frac{1}{2}\,\cosh(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{20}\,\sinh(5\,x) + \frac{1}{12}\,\sinh(3\,x) + \frac{1}{2}\,\sinh(x)\right]_{-3}^{0} \\ &= \frac{1}{20}\,\sinh(15) + \frac{1}{12}\,\sinh(9) + \frac{1}{2}\,\sinh(3)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 11. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(3\,x)$ et $\sin(121\,x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 1

$$\begin{aligned}\cos(3\,x)\sin(121\,x)^4 &= \frac{1}{32}\left(e^{(121 i\,x)} - e^{(-121 i\,x)}\right)^4 \left(e^{(3 i\,x)} + e^{(-3 i\,x)}\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{(487 i\,x)} + e^{(481 i\,x)} - 4\,e^{(245 i\,x)} - 4\,e^{(239 i\,x)} + 6\,e^{(3 i\,x)} + 6\,e^{(-3 i\,x)} - 4\,e^{(-239 i\,x)} - 4\,e^{(-245 i\,x)} + e^{(-481 i\,x)} + e\right. \\ &= \frac{1}{16}\,\cos(487\,x) + \frac{1}{16}\,\cos(481\,x) - \frac{1}{4}\,\cos(245\,x) - \frac{1}{4}\,\cos(239\,x) + \frac{3}{8}\,\cos(3\,x)\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-4\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} \cos(3\,x)\sin(121\,x)^4\,\mathrm{d}x &= \int_{-4\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} \left(\frac{1}{16}\,\cos(487\,x) + \frac{1}{16}\,\cos(481\,x) - \frac{1}{4}\,\cos(245\,x) - \frac{1}{4}\,\cos(239\,x) + \frac{3}{8}\,\cos(3\,x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{7792}\,\sin(487\,x) + \frac{1}{7696}\,\sin(481\,x) - \frac{1}{980}\,\sin(245\,x) - \frac{1}{956}\,\sin(239\,x) + \frac{1}{8}\,\sin(3\,x)\right]_{-4\,\pi}^{\frac{1}{2}\,\pi} \\ &= -\frac{1714168307}{13716333085},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 12. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} \cos(x)^2\,e^{(4\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} \left(\frac{1}{2}\,(\cos(2\,x) + 1)e^{(4\,x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} \cos(2\,x)\,e^{(4\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} e^{(4\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} \cos(2\,x)\,e^{(4\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} e^{((2i+4)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{2i+4}e^{((2i+4)\,x)}\right]_{-17\,\pi}^{-3\,\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{2i+4}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} \cos(2\,x)\,e^{(4\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{1}{10}i - \frac{1}{5}\right)\,e^{(-12\,\pi)} + \left(\frac{1}{10}i - \frac{1}{5}\right)\,e^{(-68\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} \cos(2\,x)\,e^{(4\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,e^{(-12\,\pi)} - \frac{1}{5}\,e^{(-68\,\pi)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} e^{(4\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} e^{(4\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,e^{(-12\,\pi)} - \frac{1}{4}\,e^{(-68\,\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{-17\,\pi}^{-3\,\pi} \cos(x)^2\,e^{(4\,x)}\mathrm{d}x = \frac{9}{40}\,e^{(-12\,\pi)} - \frac{9}{40}\,e^{(-68\,\pi)}.$$

Corrigé 13. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 1

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos(11\,x)^2\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(\frac{1}{2}(\cos(22\,x)+1)e^{(-12\,x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos(22\,x)\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos(22\,x)\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} e^{((22i-12)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{22i-12}e^{((22i-12)\,x)}\right]_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{22i-12}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos(22\,x)\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{11}{314}i + \frac{3}{157}\right) e^{(12\,\pi)} + \left(\frac{3}{157}i - \frac{11}{314}\right) e^{(-3\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos(22\,x)\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \frac{3}{157}\, e^{(12\,\pi)} - \frac{11}{314}\, e^{(-3\,\pi)}.$$

On calcule de même $\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\, e^{(12\,\pi)} - \frac{1}{12}\, e^{(-3\,\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos(11\,x)^2\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \frac{193}{3768}\, e^{(12\,\pi)} - \frac{223}{3768}\, e^{(-3\,\pi)}.$$

Corrigé 14. ← page 1

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)$ est continue sur $[-\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\right| \leqslant x^2 e^{(-2\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-2\,x)} = x^4 e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2 e^{(-2\,x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-\frac{1}{6}\,\pi{,}1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{((i-2)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{360}i + \frac{1}{180}\right)\sqrt{3}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)} - \left(\frac{1}{180}i - \frac{1}{360}\right)\pi^2 e^{\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)} - \left(\frac{2}{75}i + \frac{1}{50}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{3}\,\pi\right)} + \left(\frac{1}{50}i - \right.\right.$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-2x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{360}\sqrt{3}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{1}{180}\pi^2 e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{2}{75}\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{1}{50}\pi e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{11}{125}\sqrt{3} e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{2}{125} e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 15. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 2

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\, e^x \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{((i+1)x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{i+1} e^{((i+1)x)}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{i+1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\, e^x \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right) e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\, e^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)} - \frac{1}{2}.$$

Corrigé 16. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(x)$ en fonction d'exponentielles , en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 2

$$\begin{aligned}\sinh(x)^5 &= \frac{1}{32} - \left(e^{(-x)} - e^x\right)^5 \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{(5x)} - 5\,e^{(3x)} - 10\,e^{(-x)} + 5\,e^{(-3x)} - e^{(-5x)} + 10\,e^x\right) \\ &= \frac{1}{16}\sinh(5x) - \frac{5}{16}\sinh(3x) + \frac{5}{8}\sinh(x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sinh(x)^5\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{16}\sinh(5x) - \frac{5}{16}\sinh(3x) + \frac{5}{8}\sinh(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{80}\cosh(5x) - \frac{5}{48}\cosh(3x) + \frac{5}{8}\cosh(x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{80}\cosh(5) - \frac{5}{48}\cosh(3) + \frac{5}{8}\cosh(1) - \frac{8}{15},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 17. ← page 2

1. L'application $x \mapsto \cos(4x)\, e^{(-x)}$ est continue sur $[\frac{5}{3}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{5}{3}\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|\cos(4x)\, e^{(-x)}\right| \leqslant e^{(-x)},$$

et on sait que l'intégrale $\int_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty} \cos(4x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty} \cos(4x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty} e^{((4i-1)x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{4i-1} e^{((4i-1)x)}\right]_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{4i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty} \cos(4x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{34}i - \frac{2}{17}\right)\sqrt{3}e^{\left(-\frac{5}{3}\pi\right)} - \left(\frac{2}{17}i + \frac{1}{34}\right) e^{\left(-\frac{5}{3}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{\frac{5}{3}\pi}^{+\infty} \cos(4x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = -\frac{2}{17}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{5}{3}\pi\right)} - \frac{1}{34} e^{\left(-\frac{5}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 18. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(9x)$ et $\cosh(7x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 2

$$\begin{aligned}
\cosh(7x)^2 \sinh(9x)^2 &= \frac{1}{16}\left(e^{(9x)} - e^{(-9x)}\right)^2 \left(e^{(7x)} + e^{(-7x)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{(32x)} + 2e^{(18x)} - 2e^{(14x)} + e^{(4x)} + e^{(-4x)} - 2e^{(-14x)} + 2e^{(-18x)} + e^{(-32x)} - 4\right) \\
&= \frac{1}{8}\cosh(32x) + \frac{1}{4}\cosh(18x) - \frac{1}{4}\cosh(14x) + \frac{1}{8}\cosh(4x) - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-8}^{24} \cosh(7x)^2 \sinh(9x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-8}^{24} \left(\frac{1}{8}\cosh(32x) + \frac{1}{4}\cosh(18x) - \frac{1}{4}\cosh(14x) + \frac{1}{8}\cosh(4x) - \frac{1}{4}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{4}x + \frac{1}{256}\sinh(32x) + \frac{1}{72}\sinh(18x) - \frac{1}{56}\sinh(14x) + \frac{1}{32}\sinh(4x)\right]_{-8}^{24} \\
&= \frac{1}{256}\sinh(768) + \frac{1}{72}\sinh(432) - \frac{1}{56}\sinh(336) + \frac{1}{256}\sinh(256) + \frac{1}{72}\sinh(144) - \frac{1}{56}\sinh(112) +
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 19. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 2

$$\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)} \sin(3x) \,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{((3i-1)x)} \mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{3i-1} e^{((3i-1)x)}\right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{3i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)} \sin(3x) \,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{3}{10}i + \frac{1}{10}\right) e^{\left(\frac{2}{3}\pi\right)} + \left(\frac{3}{10}i + \frac{1}{10}\right) e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)} \sin(3x) \,\mathrm{d}x = \frac{3}{10} e^{\left(\frac{2}{3}\pi\right)} + \frac{3}{10} e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 20. ← page 2

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-21x)} \sin(x)$ est continue sur $[-\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x^2 e^{(-21x)} \sin(x)\right| \leqslant x^2 e^{(-21x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-21x)} = x^4 e^{(-21x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2 e^{(-21x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-21\,x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-21\,x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-21\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-21\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\pi}^{+\infty} x^2 e^{((i-21)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-21\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{1}{442}i + \frac{21}{442}\right)\pi^2 e^{(21\,\pi)} + \left(\frac{21}{48841}i + \frac{220}{48841}\right)\pi e^{(21\,\pi)} - \left(\frac{661}{21587722}i + \frac{4599}{21587722}\right) e^{(21}\right.$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-21\,x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{442}\,\pi^2 e^{(21\,\pi)} + \frac{21}{48841}\,\pi e^{(21\,\pi)} - \frac{661}{21587722}\,e^{(21\,\pi)}.$$

Corrigé 21. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 2

$$\int_{2\,\pi}^{4\,\pi} e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{2\,\pi}^{4\,\pi} e^{((i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{i-1}e^{((i-1)\,x)}\right]_{2\,\pi}^{4\,\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{2\,\pi}^{4\,\pi} e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right) e^{(-2\,\pi)} - \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right) e^{(-4\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{2\,\pi}^{4\,\pi} e^{(-x)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,e^{(-2\,\pi)} - \frac{1}{2}\,e^{(-4\,\pi)}.$$

Corrigé 22. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(8\,x)$ et $\cos(2\,x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 2

$$\begin{aligned}
\cos(8\,x)^3\cos(2\,x)^2 &= \frac{1}{32}\left(e^{(8i\,x)} + e^{(-8i\,x)}\right)^3\left(e^{(2i\,x)} + e^{(-2i\,x)}\right)^2\\
&= \frac{1}{32}\left(e^{(28i\,x)} + 2\,e^{(24i\,x)} + e^{(20i\,x)} + 3\,e^{(12i\,x)} + 6\,e^{(8i\,x)} + 3\,e^{(4i\,x)} + 3\,e^{(-4i\,x)} + 6\,e^{(-8i\,x)} + 3\,e^{(-12i\,x)} + e^{(-20i\,x)} + \right.\\
&= \frac{1}{16}\cos(28\,x) + \frac{1}{8}\cos(24\,x) + \frac{1}{16}\cos(20\,x) + \frac{3}{16}\cos(12\,x) + \frac{3}{8}\cos(8\,x) + \frac{3}{16}\cos(4\,x).
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi} \cos(8\,x)^3\cos(2\,x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi}\left(\frac{1}{16}\cos(28\,x) + \frac{1}{8}\cos(24\,x) + \frac{1}{16}\cos(20\,x) + \frac{3}{16}\cos(12\,x) + \frac{3}{8}\cos(8\,x) + \frac{3}{16}\cos(4\,x)\right)\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{1}{448}\sin(28\,x) + \frac{1}{192}\sin(24\,x) + \frac{1}{320}\sin(20\,x) + \frac{1}{64}\sin(12\,x) + \frac{3}{64}\sin(8\,x) + \frac{3}{64}\sin(4\,x)\right]_{-\frac{1}{3}\,\pi}^{\frac{1}{6}\,\pi}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 23. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 2

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} e^x \sin(4x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} \left(-\frac{1}{2}(\cos(8x)-1)e^x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} \cos(8x)\,e^x \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} e^x \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} \cos(8x)\,e^x \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} e^{((8i+1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{8i+1}e^{((8i+1)\,x)}\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{8i+1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} \cos(8x)\,e^x \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{8}{65}i - \frac{1}{65}\right)e^{(7\pi)} + \left(\frac{8}{65}i - \frac{1}{65}\right)e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} \cos(8x)\,e^x \mathrm{d}x = \frac{1}{65}\,e^{(7\pi)} - \frac{1}{65}\,e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} e^x \mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} e^x \mathrm{d}x = e^{(7\pi)} - e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{7\pi} e^x \sin(4x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{32}{65}\,e^{(7\pi)} - \frac{32}{65}\,e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}.$$

Corrigé 24. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 2

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} e^{(2x)} \sin(7x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} e^{((7i+2)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{7i+2}e^{((7i+2)\,x)}\right]_{-\frac{3}{2}\pi}^{0}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{7i+2}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} e^{(2x)} \sin(7x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{2}{53}i + \frac{7}{53}\right)e^{(-3\pi)} - \frac{7}{53}i + \frac{2}{53}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} e^{(2x)} \sin(7x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{53}\,e^{(-3\pi)} - \frac{7}{53}.$$

Corrigé 25. ← page 2

1. L'application $x \mapsto x^2\cos(x)^2\,e^{(-5x)}$ est continue sur $[-2\pi,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-2\pi,+\infty[$, on a :

$$0 \leqslant x^2\cos(x)^2\,e^{(-5x)} \leqslant x^2 e^{(-5x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-5x)} = x^4 e^{(-5x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2 e^{(-5x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-5x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-5x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-2\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2\cos(x)^2\,e^{(-5x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2\cos(x)^2 e^{(-5x)}\mathrm{d}x &= \int_{-2\pi}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2(\cos(2x)+1)e^{(-5x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-5x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2e^{(-5x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-5x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2e^{((2i-5)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-5x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{8}{29}i+\frac{20}{29}\right)\pi^2e^{(10\pi)} - \left(\frac{80}{841}i+\frac{84}{841}\right)\pi e^{(10\pi)} + \left(\frac{284}{24389}i+\frac{130}{24389}\right)e^{(10\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2\cos(2x)\,e^{(-5x)}\mathrm{d}x = \frac{20}{29}\pi^2e^{(10\pi)} - \frac{84}{841}\pi e^{(10\pi)} + \frac{130}{24389}e^{(10\pi)}.$$

On calcule de même $\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2e^{(-5x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2e^{(-5x)}\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\pi^2e^{(10\pi)} - \frac{4}{25}\pi e^{(10\pi)} + \frac{2}{125}e^{(10\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{-2\pi}^{+\infty} x^2\cos(x)^2 e^{(-5x)}\mathrm{d}x = \frac{108}{145}\pi^2e^{(10\pi)} - \frac{2732}{21025}\pi e^{(10\pi)} + \frac{32514}{3048625}e^{(10\pi)}.$$

Corrigé 26. ← page 2

1. L'application $x \mapsto e^{(-7x)}\sin(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$\left|e^{(-7x)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-7x)},$$

et on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-7x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-7x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-7x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{((i-7)x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{i-7}e^{((i-7)x)}\right]_0^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{i-7}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-7x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{50}i+\frac{7}{50}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-7x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{50}.$$

Corrigé 27. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 3

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(4x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} xe^{((4i-1)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{4}{17}i+\frac{1}{17}\right)\pi e^{\pi} - \left(\frac{4}{17}i+\frac{1}{17}\right)\pi e^{(-\pi)} + \left(\frac{8}{289}i-\frac{15}{289}\right)e^{\pi} - \left(\frac{8}{289}i-\frac{15}{289}\right)e^{(-\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{17}\,\pi e^{\pi} - \frac{1}{17}\,\pi e^{(-\pi)} - \frac{15}{289}\,e^{\pi} + \frac{15}{289}\,e^{(-\pi)}.$$

Corrigé 28. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(2\,x)$ et $\sin(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 3

$$\begin{aligned}
\cos(2\,x)^4\sin(x) &= \frac{1}{32i}\left(e^{(2i\,x)}+e^{(-2i\,x)}\right)^4\left(e^{(i\,x)}-e^{(-i\,x)}\right)\\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{(9i\,x)}-e^{(7i\,x)}+4\,e^{(5i\,x)}-4\,e^{(3i\,x)}+6\,e^{(i\,x)}-6\,e^{(-i\,x)}+4\,e^{(-3i\,x)}-4\,e^{(-5i\,x)}+e^{(-7i\,x)}-e^{(-9i\,x)}\right)\\
&= \frac{1}{16}\,\sin(9\,x)-\frac{1}{16}\,\sin(7\,x)+\frac{1}{4}\,\sin(5\,x)-\frac{1}{4}\,\sin(3\,x)+\frac{3}{8}\,\sin(x)\,.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{25\,\pi}\cos(2\,x)^4\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{25\,\pi}\left(\frac{1}{16}\,\sin(9\,x)-\frac{1}{16}\,\sin(7\,x)+\frac{1}{4}\,\sin(5\,x)-\frac{1}{4}\,\sin(3\,x)+\frac{3}{8}\,\sin(x)\right)\mathrm{d}x\\
&= \left[-\frac{1}{144}\,\cos(9\,x)+\frac{1}{112}\,\cos(7\,x)-\frac{1}{20}\,\cos(5\,x)+\frac{1}{12}\,\cos(3\,x)-\frac{3}{8}\,\cos(x)\right]_{-\frac{3}{4}\pi}^{25\,\pi}\\
&= \frac{1}{630}\,\sqrt{2}\left(107\,\sqrt{2}-128\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 29. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 3

$$\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} xe^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} xe^{((i+1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} xe^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{1}{3}i+\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} - \frac{3}{8}\,\sqrt{2}\pi e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} + \left(\frac{1}{3}i-\frac{1}{3}\right)\pi e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} + \frac{1}{4}\,\sqrt{3}e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} + \left(\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} - \frac{1}{4}\right.$$

et donc :

$$\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} xe^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\,\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} + \frac{1}{3}\,\pi e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} + \frac{1}{4}\,\sqrt{2}e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} - \frac{1}{4}\,e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 30. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 3

$$\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{3\,\pi} e^{x}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{3\,\pi} e^{((6i+1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{6i+1}e^{((6i+1)\,x)}\right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{3\,\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{6i+1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{3\,\pi} e^{x}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{6}{37}i-\frac{1}{37}\right)e^{(3\,\pi)} + \left(\frac{6}{37}i-\frac{1}{37}\right)e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{3\,\pi} e^{x}\sin(6\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{6}{37}\,e^{(3\,\pi)} + \frac{6}{37}\,e^{\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 31. ← page 3

1. L'application $x \mapsto x\cos(x)^2 e^{(-2x)}$ est continue sur $[-\frac{1}{4}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{4}\pi, +\infty[$, on a :
$$\left|x\cos(x)^2 e^{(-2x)}\right| \leqslant xe^{(-2x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-2x)} = x^3e^{(-2x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$xe^{(-2x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} xe^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-\frac{1}{4}\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(x)^2 e^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.
2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(x)^2 e^{(-2x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}x(\cos(2x)+1)e^{(-2x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(2x)e^{(-2x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} xe^{(-2x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(2x)e^{(-2x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} xe^{((2i-2)x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(2x)e^{(-2x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{16}i - \frac{1}{16}\right)\pi e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)} + \frac{1}{8}e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\right),$$
et donc :
$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(2x)e^{(-2x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\pi e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)} + \frac{1}{8}e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}.$$
On calcule de même $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} xe^{(-2x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} xe^{(-2x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}(\pi-2)e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}$. On peut conclure :
$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\infty} x\cos(x)^2 e^{(-2x)}\mathrm{d}x = -\frac{3}{32}\pi e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)} + \frac{3}{16}e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}.$$

Corrigé 32. ← page 3

1. L'application $x \mapsto x\cos(x)e^{(-x)}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :
$$\left|x\cos(x)e^{(-x)}\right| \leqslant xe^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-x)} = x^3e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$xe^{(-x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[0,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} xe^{((i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}i\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = 0.$$

Corrigé 33. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(2\,x)$ et $\sinh(6\,x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 3

$$\begin{aligned}
\sinh(6\,x)\sinh(2\,x)^3 &= \frac{1}{16}\left(e^{(6\,x)} - e^{(-6\,x)}\right)\left(e^{(2\,x)} - e^{(-2\,x)}\right)^3\\
&= \frac{1}{16}\left(e^{(12\,x)} - 3\,e^{(8\,x)} + 3\,e^{(4\,x)} + 3\,e^{(-4\,x)} - 3\,e^{(-8\,x)} + e^{(-12\,x)} - 2\right)\\
&= \frac{1}{8}\cosh(12\,x) - \frac{3}{8}\cosh(8\,x) + \frac{3}{8}\cosh(4\,x) - \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \sinh(6\,x)\sinh(2\,x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{8}\cosh(12\,x) - \frac{3}{8}\cosh(8\,x) + \frac{3}{8}\cosh(4\,x) - \frac{1}{8}\right)\mathrm{d}x\\
&= \left[-\frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\sinh(12\,x) - \frac{3}{64}\sinh(8\,x) + \frac{3}{32}\sinh(4\,x)\right]_{-1}^{0}\\
&= \frac{1}{96}\sinh(12) - \frac{3}{64}\sinh(8) + \frac{3}{32}\sinh(4) - \frac{1}{8},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 34. ← page 3

1. L'application $x \mapsto e^{(-x)}\sin(x)^2$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$0 \leqslant e^{(-x)}\sin(x)^2 \leqslant e^{(-x)},$$

et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}(\cos(2\,x) - 1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{((2i-1)\,x)} \mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{2i-1} e^{((2i-1)\,x)}\right]_0^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{2i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{5} i + \frac{1}{5}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{5}.$$

On calcule de même $\int_0^{+\infty} e^{(-x)} \mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_0^{+\infty} e^{(-x)} \mathrm{d}x = 1$. On peut conclure :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-x)} \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}.$$

Corrigé 35. Commençons par linéariser, en écrivant $\cosh(x)$ et $\cosh(8\,x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 3

$$\begin{aligned}\cosh(8\,x)\cosh(x)^2 &= \frac{1}{8}\left(e^{(8\,x)} + e^{(-8\,x)}\right)\left(e^{(-x)} + e^{x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{(10\,x)} + 2\,e^{(8\,x)} + e^{(6\,x)} + e^{(-6\,x)} + 2\,e^{(-8\,x)} + e^{(-10\,x)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cosh(10\,x) + \frac{1}{2}\cosh(8\,x) + \frac{1}{4}\cosh(6\,x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \cosh(8\,x)\cosh(x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}\cosh(10\,x) + \frac{1}{2}\cosh(8\,x) + \frac{1}{4}\cosh(6\,x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{40}\sinh(10\,x) + \frac{1}{16}\sinh(8\,x) + \frac{1}{24}\sinh(6\,x)\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{20}\sinh(10) + \frac{1}{8}\sinh(8) + \frac{1}{12}\sinh(6),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 36. ← page 3

1. L'application $x \mapsto xe^{(-x)}\sin(x)$ est continue sur $[-\frac{2}{3}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{2}{3}\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|xe^{(-x)}\sin(x)\right| \leqslant xe^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-x)} = x^3 e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$xe^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[-\frac{2}{3}\,\pi,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{((i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{6}i-\frac{1}{6}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} + \left(\frac{1}{6}i+\frac{1}{6}\right)\pi e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} + \frac{1}{4}\sqrt{3}e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{4}i\,e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{2}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sqrt{3}\pi e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} + \frac{1}{6}\pi e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{4}e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 37. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(5\,x)$ et $\sin(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 3

$$\begin{aligned}\sin(5\,x)^2\sin(x)^4 &= \frac{1}{-64}\left(e^{(5i\,x)}-e^{(-5i\,x)}\right)^2\left(e^{(i\,x)}-e^{(-i\,x)}\right)^4\\ &= \frac{1}{-64}\left(e^{(14i\,x)}-4\,e^{(12i\,x)}+6\,e^{(10i\,x)}-4\,e^{(8i\,x)}+e^{(6i\,x)}-2\,e^{(4i\,x)}+8\,e^{(2i\,x)}+8\,e^{(-2i\,x)}-2\,e^{(-4i\,x)}+e^{(-6i\,x)}-4\,e^{(\right.\\ &= -\frac{1}{32}\cos(14\,x)+\frac{1}{8}\cos(12\,x)-\frac{3}{16}\cos(10\,x)+\frac{1}{8}\cos(8\,x)-\frac{1}{32}\cos(6\,x)+\frac{1}{16}\cos(4\,x)-\frac{1}{4}\cos(2\,x)+\frac{3}{16}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{2\,\pi}\sin(5\,x)^2\sin(x)^4\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{2}\,\pi}^{2\,\pi}\left(-\frac{1}{32}\cos(14\,x)+\frac{1}{8}\cos(12\,x)-\frac{3}{16}\cos(10\,x)+\frac{1}{8}\cos(8\,x)-\frac{1}{32}\cos(6\,x)+\frac{1}{16}\cos(4\,x)-\frac{1}{4}\,\mathrm{co}\right.\\ &= \left[\frac{3}{16}\,x-\frac{1}{448}\sin(14\,x)+\frac{1}{96}\sin(12\,x)-\frac{3}{160}\sin(10\,x)+\frac{1}{64}\sin(8\,x)-\frac{1}{192}\sin(6\,x)+\frac{1}{64}\sin(4\,x)-\frac{1}{8}\right.\\ &= \frac{15}{32}\,\pi,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 38. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 3

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}\cos(2\,x)^2\,e^{(2\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\cos(4\,x)+1\right)e^{(2\,x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}\cos(4\,x)\,e^{(2\,x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}e^{(2\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}\cos(4\,x)\,e^{(2\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}e^{((4i+2)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{4i+2}e^{((4i+2)\,x)}\right]_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{4i+2}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}\cos(4\,x)\,e^{(2\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{1}{5}i-\frac{1}{10}\right)e^{(2\,\pi)}-\left(\frac{1}{5}i-\frac{1}{10}\right)e^{\left(-\frac{7}{2}\,\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{7}{4}\,\pi}^{\pi}\cos(4\,x)\,e^{(2\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}e^{(2\,\pi)}+\frac{1}{10}e^{\left(-\frac{7}{2}\,\pi\right)}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\pi} e^{(2x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\pi} e^{(2x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{(2\pi)} - \frac{1}{2}e^{\left(-\frac{7}{2}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\pi} \cos(2x)^2 e^{(2x)}\mathrm{d}x = \frac{3}{10}e^{(2\pi)} - \frac{1}{5}e^{\left(-\frac{7}{2}\pi\right)}.$$

Corrigé 39. ← page 3

1. L'application $x \mapsto x^2e^{(-x)}\sin(x)$ est continue sur $[\frac{1}{2}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{2}\pi, +\infty[$, on a :
$$\left|x^2e^{(-x)}\sin(x)\right| \leqslant x^2e^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2e^{(-x)} = x^4e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$x^2e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.
2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2e^{((i-1)x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{8}i - \frac{1}{8}\right)\pi^2e^{\left(-\frac{1}{2}\pi\right)} - \frac{1}{2}\pi e^{\left(-\frac{1}{2}\pi\right)} - \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\pi\right)}\right),$$
et donc :
$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} x^2e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\pi^2e^{\left(-\frac{1}{2}\pi\right)} - \frac{1}{2}e^{\left(-\frac{1}{2}\pi\right)}.$$

Corrigé 40. ← page 4

1. L'application $x \mapsto xe^{(-x)}\sin(12x)^2$ est continue sur $[0, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :
$$0 \leqslant xe^{(-x)}\sin(12x)^2 \leqslant xe^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-x)} = x^3e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$xe^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\int_{0}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment [0,1]. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(12x)^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{(-x)} \sin(12\,x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}x(\cos(24\,x)-1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\cos(24\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(24\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} xe^{((24i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(24\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{48}{332929}i - \frac{575}{332929}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(24\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{575}{332929}.$$

On calcule de même $\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = 1$. On peut conclure :

$$\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(12\,x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{166752}{332929}.$$

Corrigé 41. ← page 4

1. L'application $x \mapsto x\cos(3\,x)^2\,e^{(-4\,x)}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$0 \leqslant x\cos(3\,x)^2\,e^{(-4\,x)} \leqslant xe^{(-4\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-4\,x)} = x^3e^{(-4\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$xe^{(-4\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} xe^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} xe^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment [0,1]. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\cos(3\,x)^2\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\cos(3\,x)^2\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x(\cos(6\,x)+1)e^{(-4\,x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\cos(6\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{(-4\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(6\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} xe^{((6i-4)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(6\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{3}{169}i - \frac{5}{676}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(6\,x)\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{5}{676}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{16}$. On peut conclure :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(3\,x)^2\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \frac{149}{5408}.$$

Corrigé 42. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 4

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{0} \cos(2\,x)\,e^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{0} e^{((2i+1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{2i+1}e^{((2i+1)\,x)}\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{0}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{2i+1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{0} \cos(2\,x)\,e^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{5}i + \frac{2}{5}\right)e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} - \frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{0} \cos(2\,x)\,e^{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\,e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} + \frac{1}{5}.$$

Corrigé 43. ← page 4

1. L'application $x \mapsto e^{(-x)}\sin(x)$ est continue sur $[-\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|e^{(-x)}\sin(x)\right| \leqslant e^{(-x)},$$

et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\pi}^{+\infty} e^{((i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{i-1}e^{((i-1)\,x)}\right]_{-\pi}^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)e^{\pi}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,e^{\pi}.$$

Corrigé 44. ← page 4

1. L'application $x \mapsto xe^{(-x)} \sin(2\,x)^2$ est continue sur $[\frac{11}{3}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{11}{3}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant xe^{(-x)} \sin(2\,x)^2 \leqslant xe^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-x)} = x^3 e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$xe^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)} \sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)} \sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\,x(\cos(4\,x) - 1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{((4i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{11}{102}i - \frac{22}{51}\right)\sqrt{3}\pi e^{(-\frac{11}{3}\,\pi)} - \left(\frac{22}{51}i + \frac{11}{102}\right)\pi e^{(-\frac{11}{3}\,\pi)} - \left(\frac{15}{578}i + \frac{4}{289}\right)\sqrt{3}e^{(-\frac{11}{3}\,\pi)} - \left(\frac{4}{289}\right.\right.$$

et donc :

$$\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{22}{51}\sqrt{3}\pi e^{(-\frac{11}{3}\,\pi)} - \frac{11}{102}\pi e^{(-\frac{11}{3}\,\pi)} - \frac{4}{289}\sqrt{3}e^{(-\frac{11}{3}\,\pi)} + \frac{15}{578}e^{(-\frac{11}{3}\,\pi)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = \Gamma\left(2, \frac{11}{3}\,\pi\right)$. On peut conclure :

$$\int_{\frac{11}{3}\,\pi}^{+\infty} xe^{(-x)} \sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3468}\left(187\,\pi\left(4\,\sqrt{3} + 35\right) + 24\,\sqrt{3} + 1689\right)e^{(-\frac{11}{3}\,\pi)}.$$

Corrigé 45. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 4

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\,\pi} xe^{(-3\,x)} \sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{4}\,\pi} \left(-\frac{1}{2}\,x(\cos(4\,x) - 1)e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}\,\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}\,\pi} xe^{(-3\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{\frac{1}{4}\,\pi} x\cos(4\,x)\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{1}{4}\,\pi} xe^{((4i-3)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\cos(4x)\,e^{(-3x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{25}i + \frac{3}{100}\right)\pi e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} + \left(\frac{24}{625}i - \frac{7}{625}\right)e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} + \frac{24}{625}i - \frac{7}{625}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\cos(4x)\,e^{(-3x)}\mathrm{d}x = \frac{3}{100}\pi e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} - \frac{7}{625}e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} - \frac{7}{625}.$$

On calcule de même $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} xe^{(-3x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} xe^{(-3x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{36}(3\pi+4)e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} + \frac{1}{9}$. On peut conclure :

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} xe^{(-3x)}\sin(2x)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{22500}(1275\pi+1124)e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} + \frac{344}{5625}.$$

Corrigé 46. ← page 4

1. L'application $x \mapsto \cos(x)^2\,e^{(-x)}$ est continue sur $[-\frac{1}{3}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{3}\pi, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant \cos(x)^2\,e^{(-x)} \leqslant e^{(-x)},$$

et on sait que l'intégrale $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}(\cos(2x)+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty}\cos(2x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty}\cos(2x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{((2i-1)x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{2i-1}e^{((2i-1)x)}\right]_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{2i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty}\cos(2x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{1}{10}i - \frac{1}{5}\right)\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)} - \left(\frac{1}{5}i + \frac{1}{10}\right)e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty}\cos(2x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{1}{10}e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x = e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty}\cos(x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{9}{20}e^{\left(\frac{1}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 47. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(x)$ et $\sin(2x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 4

$$\begin{aligned}\cos(x)^4 \sin(2x)^2 &= \frac{1}{-64}\left(e^{(2ix)} - e^{(-2ix)}\right)^2 \left(e^{(ix)} + e^{(-ix)}\right)^4 \\ &= \frac{1}{-64}\left(e^{(8ix)} + 4\,e^{(6ix)} + 4\,e^{(4ix)} - 4\,e^{(2ix)} - 4\,e^{(-2ix)} + 4\,e^{(-4ix)} + 4\,e^{(-6ix)} + e^{(-8ix)} - 10\right) \\ &= -\frac{1}{32}\cos(8x) - \frac{1}{8}\cos(6x) - \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{5}{32}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} \cos(x)^4 \sin(2x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} \left(-\frac{1}{32}\cos(8x) - \frac{1}{8}\cos(6x) - \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{5}{32}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{5}{32}\,x - \frac{1}{256}\sin(8x) - \frac{1}{48}\sin(6x) - \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{16}\sin(2x)\right]_{-\frac{1}{6}\pi}^{0} \\ &= \frac{5}{192}\,\pi + \frac{9}{512}\sqrt{3},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 48. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 4

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} xe^{(-3x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} xe^{((i-3)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} xe^{(-3x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{20}i - \frac{1}{60}\right)\sqrt{3}\pi e^{\pi} - \left(\frac{1}{60}i + \frac{1}{20}\right)\pi e^{\pi} - \left(\frac{1}{25}i - \frac{3}{100}\right)\sqrt{3}e^{\pi} + \left(\frac{3}{100}i + \frac{1}{25}\right)e^{\pi} - \frac{3}{50}i - \frac{2}{25}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{0} xe^{(-3x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\sqrt{3}\pi e^{\pi} - \frac{1}{60}\pi e^{\pi} - \frac{1}{25}\sqrt{3}e^{\pi} + \frac{3}{100}e^{\pi} - \frac{3}{50}.$$

Corrigé 49. ← page 4

1. L'application $x \mapsto \cos(x)^2 e^{(-3x)}$ est continue sur $[-\frac{1}{3}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{3}\pi, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant \cos(x)^2 e^{(-3x)} \leqslant e^{(-3x)},$$

et on sait que l'intégrale $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-3x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2 e^{(-3x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2 e^{(-3x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)e^{(-3x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(2x)\,e^{(-3x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-3x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(2x)\,e^{(-3x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{((2i-3)x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{2i-3}e^{((2i-3)x)}\right]_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{2i-3}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(2x)\, e^{(-3x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{3}{26}i - \frac{1}{13}\right)\sqrt{3}e^{\pi} - \left(\frac{1}{13}i + \frac{3}{26}\right) e^{\pi}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(2x)\, e^{(-3x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{13}\sqrt{3}e^{\pi} - \frac{3}{26}\, e^{\pi}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-3x)} \mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} e^{(-3x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\, e^{\pi}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{+\infty} \cos(x)^2\, e^{(-3x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{26}\sqrt{3}e^{\pi} + \frac{17}{156}\, e^{\pi}.$$

Corrigé 50. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(5x)$ et $\cos(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 5

$$\begin{aligned}
\cos(5x)\cos(x)^3 &= \frac{1}{16}\left(e^{(5ix)} + e^{(-5ix)}\right)\left(e^{(ix)} + e^{(-ix)}\right)^3 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{(8ix)} + 3\,e^{(6ix)} + 3\,e^{(4ix)} + e^{(2ix)} + e^{(-2ix)} + 3\,e^{(-4ix)} + 3\,e^{(-6ix)} + e^{(-8ix)}\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos(8x) + \frac{3}{8}\cos(6x) + \frac{3}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(2x).
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \cos(5x)\cos(x)^3\, \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\frac{1}{8}\cos(8x) + \frac{3}{8}\cos(6x) + \frac{3}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(2x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{64}\sin(8x) + \frac{1}{16}\sin(6x) + \frac{3}{32}\sin(4x) + \frac{1}{16}\sin(2x)\right]_{-\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 51. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} e^{(-4x)}\sin(6x)^2\, \mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left(-\frac{1}{2}(\cos(12x) - 1)e^{(-4x)}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \cos(12x)\, e^{(-4x)} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} e^{(-4x)} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \cos(12x)\, e^{(-4x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} e^{((12i-4)x)} \mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{12i-4} e^{((12i-4)x)}\right]_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{12i-4}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \cos(12x)\, e^{(-4x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{3}{40}i + \frac{1}{40}\right) e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} - \left(\frac{3}{40}i + \frac{1}{40}\right) e^{\left(-\frac{10}{3}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \cos(12x)\, e^{(-4x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{40}\, e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} - \frac{1}{40}\, e^{\left(-\frac{10}{3}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} e^{(-4x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} e^{(-4x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} - \frac{1}{4}e^{\left(-\frac{10}{3}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} e^{(-4x)}\sin(6x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{9}{80}e^{\left(\frac{4}{3}\pi\right)} - \frac{9}{80}e^{\left(-\frac{10}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 52. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(107x)$ et $\sin(12x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 5

$$\begin{aligned}
\cos(107x)^2\sin(12x)^2 &= \frac{1}{-16}\left(e^{(107ix)} + e^{(-107ix)}\right)^2\left(e^{(12ix)} - e^{(-12ix)}\right)^2\\
&= \frac{1}{-16}\left(e^{(238ix)} - 2e^{(214ix)} + e^{(190ix)} + 2e^{(24ix)} + 2e^{(-24ix)} + e^{(-190ix)} - 2e^{(-214ix)} + e^{(-238ix)} - 4\right)\\
&= -\frac{1}{8}\cos(238x) + \frac{1}{4}\cos(214x) - \frac{1}{8}\cos(190x) - \frac{1}{4}\cos(24x) + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}\pi}^{5\pi}\cos(107x)^2\sin(12x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{5\pi}\left(-\frac{1}{8}\cos(238x) + \frac{1}{4}\cos(214x) - \frac{1}{8}\cos(190x) - \frac{1}{4}\cos(24x) + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{1}{4}x - \frac{1}{1904}\sin(238x) + \frac{1}{856}\sin(214x) - \frac{1}{1520}\sin(190x) - \frac{1}{96}\sin(24x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{5\pi}\\
&= \frac{9}{8}\pi,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 53. ← page 5

1. L'application $x\mapsto x\cos(2x)^2e^{(-2x)}$ est continue sur $[\frac{1}{6}\pi,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x\in[\frac{1}{6}\pi,+\infty[$, on a :

$$0\leqslant x\cos(2x)^2e^{(-2x)}\leqslant xe^{(-2x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2\cdot xe^{(-2x)} = x^3e^{(-2x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$xe^{(-2x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}xe^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}x\cos(2x)^2e^{(-2x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}x\cos(2x)^2e^{(-2x)}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x(\cos(4x)+1)e^{(-2x)}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}x\cos(4x)e^{(-2x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}xe^{(-2x)}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}x\cos(4x)e^{(-2x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}xe^{((4i-2)x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{120}i - \frac{1}{60}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \left(\frac{1}{60}i + \frac{1}{120}\right)\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \left(\frac{3}{200}i + \frac{1}{50}\right)\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \left(\frac{1}{50}i - \right.\right.$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{60}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{1}{120}\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{1}{50}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{3}{200}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} xe^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} xe^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(\pi+3)e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} x\cos(2\,x)^2\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{120}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{3}{80}\pi e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{1}{100}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{53}{400}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}.$$

Corrigé 54. ← page 5

1. L'application $x \mapsto x^2e^{(-7\,x)}\sin(3\,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$\left|x^2e^{(-7\,x)}\sin(3\,x)\right| \leqslant x^2e^{(-7\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2e^{(-7\,x)} = x^4e^{(-7\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2e^{(-7\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment $[0,1]$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{(-7\,x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{(-7\,x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} x^2e^{((3i-7)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{(-7\,x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\frac{207}{48778}i + \frac{77}{48778}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{(-7\,x)}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{207}{48778}.$$

Corrigé 55. ← page 5

1. L'application $x \mapsto x\cos(4\,x)^2\,e^{(-7\,x)}$ est continue sur $[\pi,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\pi,+\infty[$, on a :

$$0 \leqslant x\cos(4\,x)^2\,e^{(-7\,x)} \leqslant xe^{(-7\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-7\,x)} = x^3 e^{(-7\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$xe^{(-7\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} xe^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)^2 e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)^2 e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}x(\cos(8\,x)+1)e^{(-7\,x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(8\,x)e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty} xe^{(-7\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(8\,x)e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\pi}^{+\infty} xe^{((8i-7)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(8\,x)e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{8}{113}i + \frac{7}{113}\right)\pi e^{(-7\,\pi)} + \left(\frac{112}{12769}i - \frac{15}{12769}\right)e^{(-7\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(8\,x)e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \frac{7}{113}\pi e^{(-7\,\pi)} - \frac{15}{12769}e^{(-7\,\pi)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} xe^{(-7\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} xe^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{49}(7\,\pi+1)e^{(-7\,\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{\pi}^{+\infty} x\cos(4\,x)^2 e^{(-7\,x)}\mathrm{d}x = \frac{81}{791}\pi e^{(-7\,\pi)} + \frac{6017}{625681}e^{(-7\,\pi)}.$$

Corrigé 56. ← page 5

1. L'application $x \mapsto \cos(4\,x)^2 e^{(-x)}$ est continue sur $[32\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [32\,\pi, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant \cos(4\,x)^2 e^{(-x)} \leqslant e^{(-x)},$$

et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_{32\,\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{32\,\pi}^{+\infty} \cos(4\,x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{32\,\pi}^{+\infty} \cos(4\,x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_{32\,\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}(\cos(8\,x)+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{32\,\pi}^{+\infty} \cos(8\,x)e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{32\,\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{32\,\pi}^{+\infty} \cos(8\,x)e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{32\,\pi}^{+\infty} e^{((8i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{8i-1}e^{((8i-1)\,x)}\right]_{32\,\pi}^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{8i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{32\,\pi}^{+\infty} \cos\left(8\,x\right) e^{\left(-x\right)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{8}{65} i + \frac{1}{65}\right) e^{\left(-32\,\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{32\,\pi}^{+\infty} \cos\left(8\,x\right) e^{\left(-x\right)} \mathrm{d}x = \frac{1}{65}\, e^{\left(-32\,\pi\right)}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_{32\,\pi}^{+\infty} e^{\left(-x\right)} \mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{32\,\pi}^{+\infty} e^{\left(-x\right)} \mathrm{d}x = e^{\left(-32\,\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{32\,\pi}^{+\infty} \cos\left(4\,x\right)^2 e^{\left(-x\right)} \mathrm{d}x = \frac{33}{65}\, e^{\left(-32\,\pi\right)}.$$

Corrigé 57. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 5

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} e^{\left(2\,x\right)} \sin\left(11\,x\right) \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} e^{\left(\left(11i+2\right)\,x\right)} \mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{11i+2} e^{\left(\left(11i+2\right)\,x\right)}\right]_{-\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{11i+2}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} e^{\left(2\,x\right)} \sin\left(11\,x\right) \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{1}{125} i + \frac{11}{250}\right) \sqrt{3} e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \left(\frac{11}{250} i - \frac{1}{125}\right) e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \left(\frac{11}{125} i - \frac{2}{125}\right) e^{\left(-2\,\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{3}\,\pi} e^{\left(2\,x\right)} \sin\left(11\,x\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{125} \sqrt{3} e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \frac{11}{250}\, e^{\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)} - \frac{11}{125}\, e^{\left(-2\,\pi\right)}.$$

Corrigé 58. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin\left(x\right)$ et $\sin\left(11\,x\right)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 5

$$\begin{aligned}
\sin\left(11\,x\right)^3 \sin\left(x\right)^2 &= \frac{1}{32i}\left(e^{\left(11i\,x\right)} - e^{\left(-11i\,x\right)}\right)^3 \left(e^{\left(i\,x\right)} - e^{\left(-i\,x\right)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{\left(35i\,x\right)} - 2\,e^{\left(33i\,x\right)} + e^{\left(31i\,x\right)} - 3\,e^{\left(13i\,x\right)} + 6\,e^{\left(11i\,x\right)} - 3\,e^{\left(9i\,x\right)} + 3\,e^{\left(-9i\,x\right)} - 6\,e^{\left(-11i\,x\right)} + 3\,e^{\left(-13i\,x\right)} - e^{\left(-31i\,x\right)} \right. \\
&= \frac{1}{16} \sin\left(35\,x\right) - \frac{1}{8} \sin\left(33\,x\right) + \frac{1}{16} \sin\left(31\,x\right) - \frac{3}{16} \sin\left(13\,x\right) + \frac{3}{8} \sin\left(11\,x\right) - \frac{3}{16} \sin\left(9\,x\right).
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\,\pi} \sin\left(11\,x\right)^3 \sin\left(x\right)^2 \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\,\pi} \left(\frac{1}{16} \sin\left(35\,x\right) - \frac{1}{8} \sin\left(33\,x\right) + \frac{1}{16} \sin\left(31\,x\right) - \frac{3}{16} \sin\left(13\,x\right) + \frac{3}{8} \sin\left(11\,x\right) - \frac{3}{16} \sin\left(9\,x\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{560} \cos\left(35\,x\right) + \frac{1}{264} \cos\left(33\,x\right) - \frac{1}{496} \cos\left(31\,x\right) + \frac{3}{208} \cos\left(13\,x\right) - \frac{3}{88} \cos\left(11\,x\right) + \frac{1}{48} \cos\left(9\,x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{2}{3}\,\pi} \\
&= \frac{558671}{14894880},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 59. ← page 5

1. L'application $x \mapsto \cos\left(5\,x\right)^2 e^{\left(-12\,x\right)}$ est continue sur $[\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant \cos\left(5\,x\right)^2 e^{\left(-12\,x\right)} \leqslant e^{\left(-12\,x\right)},$$

et on sait que l'intégrale $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(5\,x)^2\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(5\,x)^2\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\cos(10\,x)+1\right)e^{(-12\,x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(10\,x)\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(10\,x)\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} e^{((10i-12)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{10i-12}e^{((10i-12)\,x)}\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{10i-12}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(10\,x)\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{3}{122}i - \frac{5}{244}\right)\sqrt{3}e^{(-2\,\pi)} + \left(\frac{5}{244}i + \frac{3}{122}\right)e^{(-2\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(10\,x)\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \frac{5}{244}\sqrt{3}e^{(-2\,\pi)} + \frac{3}{122}e^{(-2\,\pi)}.$$

On calcule de même $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{12}e^{(-2\,\pi)}$. On peut conclure :

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} \cos(5\,x)^2\, e^{(-12\,x)}\mathrm{d}x = \frac{5}{488}\sqrt{3}e^{(-2\,\pi)} + \frac{79}{1464}e^{(-2\,\pi)}.$$

Corrigé 60. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a : ← page 5

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)}\sin(5\,x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \left(-\frac{1}{2}\left(\cos(10\,x)-1\right)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \cos(10\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \cos(10\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{((10i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{10i-1}e^{((10i-1)\,x)}\right]_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{10i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \cos(10\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{202}i - \frac{5}{101}\right)\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} + \left(\frac{1}{101}i - \frac{10}{101}\right)e^{\left(\frac{7}{4}\pi\right)} + \left(\frac{5}{101}i + \frac{1}{202}\right)e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \cos(10\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{5}{101}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} - \frac{10}{101}e^{\left(\frac{7}{4}\pi\right)} + \frac{1}{202}e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}.$$

On calcule de même $\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)} \mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)} \mathrm{d}x = e^{\left(\frac{7}{4}\pi\right)} - e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}$. On peut conclure :

$$\int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(-x)} \sin(5x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{404}\left(10\sqrt{3} - 203\right) e^{\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} + \frac{111}{202} e^{\left(\frac{7}{4}\pi\right)}.$$

Corrigé 61. Commençons par linéariser, en écrivant $\cosh(x)$ et $\sinh(2x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 5

$$\begin{aligned}
\cosh(x)^4 \sinh(2x)^2 &= \frac{1}{64}\left(e^{(2x)} - e^{(-2x)}\right)^2 \left(e^{(-x)} + e^{x}\right)^4 \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{(8x)} + 4e^{(6x)} + 4e^{(4x)} - 4e^{(2x)} - 4e^{(-2x)} + 4e^{(-4x)} + 4e^{(-6x)} + e^{(-8x)} - 10\right) \\
&= \frac{1}{32}\cosh(8x) + \frac{1}{8}\cosh(6x) + \frac{1}{8}\cosh(4x) - \frac{1}{8}\cosh(2x) - \frac{5}{32}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{51} \cosh(x)^4 \sinh(2x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{2}^{51} \left(\frac{1}{32}\cosh(8x) + \frac{1}{8}\cosh(6x) + \frac{1}{8}\cosh(4x) - \frac{1}{8}\cosh(2x) - \frac{5}{32}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{5}{32}x + \frac{1}{256}\sinh(8x) + \frac{1}{48}\sinh(6x) + \frac{1}{32}\sinh(4x) - \frac{1}{16}\sinh(2x)\right]_{2}^{51} \\
&= \frac{1}{256}\sinh(408) + \frac{1}{48}\sinh(306) + \frac{1}{32}\sinh(204) - \frac{1}{16}\sinh(102) - \frac{1}{256}\sinh(16) - \frac{1}{48}\sinh(12) - \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 62. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(9x)$ et $\sinh(2x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 6

$$\begin{aligned}
\sinh(9x)^2 \sinh(2x)^2 &= \frac{1}{16}\left(e^{(9x)} - e^{(-9x)}\right)^2 \left(e^{(2x)} - e^{(-2x)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{(22x)} - 2e^{(18x)} + e^{(14x)} - 2e^{(4x)} - 2e^{(-4x)} + e^{(-14x)} - 2e^{(-18x)} + e^{(-22x)} + 4\right) \\
&= \frac{1}{8}\cosh(22x) - \frac{1}{4}\cosh(18x) + \frac{1}{8}\cosh(14x) - \frac{1}{4}\cosh(4x) + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{2} \sinh(9x)^2 \sinh(2x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{2} \left(\frac{1}{8}\cosh(22x) - \frac{1}{4}\cosh(18x) + \frac{1}{8}\cosh(14x) - \frac{1}{4}\cosh(4x) + \frac{1}{4}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{176}\sinh(22x) - \frac{1}{72}\sinh(18x) + \frac{1}{112}\sinh(14x) - \frac{1}{16}\sinh(4x)\right]_{-3}^{2} \\
&= \frac{1}{176}\sinh(66) - \frac{1}{72}\sinh(54) + \frac{1}{176}\sinh(44) + \frac{1}{112}\sinh(42) - \frac{1}{72}\sinh(36) + \frac{1}{112}\sinh(28) - \frac{1}{16}\,\mathrm{si}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 63. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x^2 \cos(2x) e^{(-3x)}$ est continue sur $[\frac{4}{3}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{4}{3}\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x^2 \cos(2x) e^{(-3x)}\right| \leqslant x^2 e^{(-3x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-3\,x)} = x^4 e^{(-3\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2 e^{(-3\,x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{4}{3}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{4}{3}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{4}{3}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2\,x)\, e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{4}{3}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2\,x)\, e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{4}{3}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{((2i-3)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{4}{3}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2\,x)\, e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{8}{39}i - \frac{16}{117}\right)\sqrt{3}\pi^2 e^{(-4\,\pi)} - \left(\frac{16}{117}i + \frac{8}{39}\right)\pi^2 e^{(-4\,\pi)} + \left(\frac{20}{507}i - \frac{16}{169}\right)\sqrt{3}\pi e^{(-4\,\pi)} - \left(\frac{16}{169}\right.\right.$$

et donc :

$$\int_{\frac{4}{3}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2\,x)\, e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{16}{117}\sqrt{3}\pi^2 e^{(-4\,\pi)} - \frac{8}{39}\pi^2 e^{(-4\,\pi)} - \frac{16}{169}\sqrt{3}\pi e^{(-4\,\pi)} - \frac{20}{507}\pi e^{(-4\,\pi)} - \frac{46}{2197}\sqrt{3} e^{(-4\,\pi)} + \frac{9}{2197} e^{(-4\,\pi)}.$$

Corrigé 64. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. ← page 6
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\sin(x)^4 &= \frac{1}{16}\left(e^{(i\,x)} - e^{(-i\,x)}\right)^4\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{(4i\,x)} - 4\,e^{(2i\,x)} - 4\,e^{(-2i\,x)} + e^{(-4i\,x)} + 6\right)\\ &= \frac{1}{8}\cos(4\,x) - \frac{1}{2}\cos(2\,x) + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(x)^4\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{8}\cos(4\,x) - \frac{1}{2}\cos(2\,x) + \frac{3}{8}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{3}{8}\,x + \frac{1}{32}\sin(4\,x) - \frac{1}{4}\sin(2\,x)\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{3}{8}\,\pi,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 65. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 6

$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{\pi} e^x \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{\pi} e^{((2i+1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{2i+1}e^{((2i+1)\,x)}\right]_{\frac{1}{6}\,\pi}^{\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{2i+1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{\pi} e^x \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(-\left(\frac{1}{10}i + \frac{1}{5}\right)\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \left(\frac{2}{5}i - \frac{1}{5}\right)e^{\pi} + \left(\frac{1}{5}i - \frac{1}{10}\right)e^{\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)}\right),$$

et donc :
$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\pi} e^{x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\sqrt{3}e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)} - \frac{2}{5}e^{\pi} + \frac{1}{5}e^{\left(\frac{1}{6}\pi\right)}.$$

Corrigé 66. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(3x)$ et $\cos(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 6

$$\begin{aligned}\cos(x)^2\sin(3x)^3 &= \frac{1}{-32i}\left(e^{(3ix)} - e^{(-3ix)}\right)^3\left(e^{(ix)} + e^{(-ix)}\right)^2\\ &= \frac{1}{-32i}\left(e^{(11ix)} + 2e^{(9ix)} + e^{(7ix)} - 3e^{(5ix)} - 6e^{(3ix)} - 3e^{(ix)} + 3e^{(-ix)} + 6e^{(-3ix)} + 3e^{(-5ix)} - e^{(-7ix)} - 2e^{(-\right.\\ &= -\frac{1}{16}\sin(11x) - \frac{1}{8}\sin(9x) - \frac{1}{16}\sin(7x) + \frac{3}{16}\sin(5x) + \frac{3}{8}\sin(3x) + \frac{3}{16}\sin(x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi}\cos(x)^2\sin(3x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi}\left(-\frac{1}{16}\sin(11x) - \frac{1}{8}\sin(9x) - \frac{1}{16}\sin(7x) + \frac{3}{16}\sin(5x) + \frac{3}{8}\sin(3x) + \frac{3}{16}\sin(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{176}\cos(11x) + \frac{1}{72}\cos(9x) + \frac{1}{112}\cos(7x) - \frac{3}{80}\cos(5x) - \frac{1}{8}\cos(3x) - \frac{3}{16}\cos(x)\right]_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi}\\ &= -\frac{243}{770},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 67. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(x)$ et $\sin(65x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 6

$$\begin{aligned}\sin(65x)^4\sin(x)^2 &= \frac{1}{-64}\left(e^{(65ix)} - e^{(-65ix)}\right)^4\left(e^{(ix)} - e^{(-ix)}\right)^2\\ &= \frac{1}{-64}\left(e^{(262ix)} - 2e^{(260ix)} + e^{(258ix)} - 4e^{(132ix)} + 8e^{(130ix)} - 4e^{(128ix)} + 6e^{(2ix)} + 6e^{(-2ix)} - 4e^{(-128ix)} + 8\right.\\ &= -\frac{1}{32}\cos(262x) + \frac{1}{16}\cos(260x) - \frac{1}{32}\cos(258x) + \frac{1}{8}\cos(132x) - \frac{1}{4}\cos(130x) + \frac{1}{8}\cos(128x) - \frac{3}{16}\cos(2x\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\sin(65x)^4\sin(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\frac{1}{32}\cos(262x) + \frac{1}{16}\cos(260x) - \frac{1}{32}\cos(258x) + \frac{1}{8}\cos(132x) - \frac{1}{4}\cos(130x) + \frac{1}{8}\cos(128\right.\\ &= \left[\frac{3}{16}x - \frac{1}{8384}\sin(262x) + \frac{1}{4160}\sin(260x) - \frac{1}{8256}\sin(258x) + \frac{1}{1056}\sin(132x) - \frac{1}{520}\sin(130x) + \right.\\ &= \frac{15}{64}\pi + \frac{1681483}{17574960},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 68. ← page 6

1. L'application $x \mapsto x\cos(2x)^2 e^{(-x)}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :
$$0 \leqslant x\cos(2x)^2 e^{(-x)} \leqslant xe^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-x)} = x^3e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$xe^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge

aussi par continuité sur le segment [0,1]. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\cos(2\,x)^2\, e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\cos(2\,x)^2\, e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,x(\cos(4\,x)+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\cos(4\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(4\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} xe^{((4i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(4\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{8}{289}i - \frac{15}{289}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(4\,x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{15}{289}.$$

On calcule de même $\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x = 1$. On peut conclure :

$$\int_0^{+\infty} x\cos(2\,x)^2\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{137}{289}.$$

Corrigé 69. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 6

$$\begin{aligned}\cos(x)^3 &= \frac{1}{8}\left(e^{(i\,x)} + e^{(-i\,x)}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{(3i\,x)} + 3\,e^{(i\,x)} + 3\,e^{(-i\,x)} + e^{(-3i\,x)}\right)\\ &= \frac{1}{4}\,\cos(3\,x) + \frac{3}{4}\,\cos(x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{0}\cos(x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{0}\left(\frac{1}{4}\,\cos(3\,x) + \frac{3}{4}\,\cos(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{12}\,\sin(3\,x) + \frac{3}{4}\,\sin(x)\right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{0}\\ &= \frac{3}{8}\,\sqrt{3},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 70. ← page 6

1. L'application $x\mapsto\cos(3\,x)^2\, e^{(-x)}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x\in[0,+\infty[$, on a :

$$0\leqslant\cos(3\,x)^2\, e^{(-x)}\leqslant e^{(-x)},$$

et on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(3\,x)^2\, e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos(3x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2}(\cos(6x)+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \cos(6x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_0^{+\infty} \cos(6x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{((6i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{6i-1}e^{((6i-1)\,x)}\right]_0^{+\infty}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{6i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_0^{+\infty} \cos(6x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{6}{37}i + \frac{1}{37}\right),$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} \cos(6x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{37}.$$

On calcule de même $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x = 1$. On peut conclure :

$$\int_0^{+\infty} \cos(3x)^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{19}{37}.$$

Corrigé 71. Commençons par linéariser, en écrivant $\cosh(2x)$ et $\sinh(4x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 6

$$\begin{aligned}\cosh(2x)^3 \sinh(4x)^3 &= \frac{1}{64}\left(e^{(4x)} - e^{(-4x)}\right)^3\left(e^{(2x)} + e^{(-2x)}\right)^3 \\ &= \frac{1}{64}\left(e^{(18x)} + 3\,e^{(14x)} - 8\,e^{(6x)} - 6\,e^{(2x)} + 6\,e^{(-2x)} + 8\,e^{(-6x)} - 3\,e^{(-14x)} - e^{(-18x)}\right) \\ &= \frac{1}{32}\sinh(18x) + \frac{3}{32}\sinh(14x) - \frac{1}{4}\sinh(6x) - \frac{3}{16}\sinh(2x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \cosh(2x)^3 \sinh(4x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{32}\sinh(18x) + \frac{3}{32}\sinh(14x) - \frac{1}{4}\sinh(6x) - \frac{3}{16}\sinh(2x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{576}\cosh(18x) + \frac{3}{448}\cosh(14x) - \frac{1}{24}\cosh(6x) - \frac{3}{32}\cosh(2x)\right]_{-1}^{0} \\ &= -\frac{1}{576}\cosh(18) - \frac{3}{448}\cosh(14) + \frac{1}{24}\cosh(6) + \frac{3}{32}\cosh(2) - \frac{8}{63},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 72. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(2x)$ et $\sin(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 6

$$\begin{aligned}\sin(2x)^3 \sin(x)^3 &= \frac{1}{-64}\left(e^{(2i\,x)} - e^{(-2i\,x)}\right)^3\left(e^{(i\,x)} - e^{(-i\,x)}\right)^3 \\ &= \frac{1}{-64}\left(e^{(9i\,x)} - 3\,e^{(7i\,x)} + 8\,e^{(3i\,x)} - 6\,e^{(i\,x)} - 6\,e^{(-i\,x)} + 8\,e^{(-3i\,x)} - 3\,e^{(-7i\,x)} + e^{(-9i\,x)}\right) \\ &= -\frac{1}{32}\cos(9x) + \frac{3}{32}\cos(7x) - \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{16}\cos(x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} \sin(2x)^3 \sin(x)^3 \,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} \left(-\frac{1}{32}\cos(9x) + \frac{3}{32}\cos(7x) - \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{16}\cos(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{288}\sin(9x) + \frac{3}{224}\sin(7x) - \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{16}\sin(x)\right]_{-\frac{1}{3}\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} \\ &= \frac{45}{448}\sqrt{3} - \frac{11}{252}\sqrt{2},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 73. Commençons par linéariser, en écrivant $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 6

$$\begin{aligned}\cosh(x)^3 \sinh(x)^2 &= \frac{1}{32}\left(e^{(-x)} + e^{x}\right)^3 \left(e^{(-x)} - e^{x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{(5x)} + e^{(3x)} - 2e^{(-x)} + e^{(-3x)} + e^{(-5x)} - 2e^{x}\right) \\ &= \frac{1}{16}\cosh(5x) + \frac{1}{16}\cosh(3x) - \frac{1}{8}\cosh(x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \cosh(x)^3 \sinh(x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{16}\cosh(5x) + \frac{1}{16}\cosh(3x) - \frac{1}{8}\cosh(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{80}\sinh(5x) + \frac{1}{48}\sinh(3x) - \frac{1}{8}\sinh(x)\right]_{-1}^{3} \\ &= \frac{1}{80}\sinh(15) + \frac{1}{48}\sinh(9) + \frac{1}{80}\sinh(5) - \frac{5}{48}\sinh(3) - \frac{1}{8}\sinh(1),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 74. ← page 6

1. L'application $x \mapsto \cos(x)\,e^{(-x)}$ est continue sur $[-\frac{1}{2}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}\pi, +\infty[$, on a :
$$\left|\cos(x)\,e^{(-x)}\right| \leqslant e^{(-x)},$$
et on sait que l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} \cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.
2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} \cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} e^{((i-1)x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{i-1}e^{((i-1)x)}\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty}\right),$$
et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :
$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} \cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\right),$$
et donc :
$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\infty} \cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}.$$

Corrigé 75. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 6

$$\int_{-4\,\pi}^{2\,\pi} \cos(6\,x)\,e^{(9\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-4\,\pi}^{2\,\pi} e^{((6i+9)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{6i+9}e^{((6i+9)\,x)}\right]_{-4\,\pi}^{2\,\pi}\right),$$

et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{6i+9}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :

$$\int_{-4\,\pi}^{2\,\pi} \cos(6\,x)\,e^{(9\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{2}{39}i - \frac{1}{13}\right)e^{(18\,\pi)} + \left(\frac{2}{39}i - \frac{1}{13}\right)e^{(-36\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{-4\,\pi}^{2\,\pi} \cos(6\,x)\,e^{(9\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{13}\,e^{(18\,\pi)} - \frac{1}{13}\,e^{(-36\,\pi)}.$$

Corrigé 76. ← page 7

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-x)}\sin(x)^2$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :
$$0 \leqslant x^2 e^{(-x)}\sin(x)^2 \leqslant x^2 e^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-x)} = x^4 e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$x^2 e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment [0,1]. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.
2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\,x^2(\cos(2\,x)-1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_0^{+\infty} x^2\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} x^2 e^{((2i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_0^{+\infty} x^2\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\frac{4}{125}i - \frac{22}{125}\right),$$
et donc :
$$\int_0^{+\infty} x^2\cos(2\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{22}{125}.$$
On calcule de même $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x = 2$. On peut conclure :
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{136}{125}.$$

Corrigé 77. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(x)$ et $\sin(3x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 7

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin(3x)^3 &= \frac{1}{-16i}\left(e^{(3i\,x)} - e^{(-3i\,x)}\right)^3\left(e^{(i\,x)} + e^{(-i\,x)}\right)\\ &= \frac{1}{-16i}\left(e^{(10i\,x)} + e^{(8i\,x)} - 3\,e^{(4i\,x)} - 3\,e^{(2i\,x)} + 3\,e^{(-2i\,x)} + 3\,e^{(-4i\,x)} - e^{(-8i\,x)} - e^{(-10i\,x)}\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(10\,x) - \frac{1}{8}\sin(8\,x) + \frac{3}{8}\sin(4\,x) + \frac{3}{8}\sin(2\,x)\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{3\pi}\cos(x)\sin(3x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{3\pi}\left(-\frac{1}{8}\sin(10\,x) - \frac{1}{8}\sin(8\,x) + \frac{3}{8}\sin(4\,x) + \frac{3}{8}\sin(2\,x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{80}\cos(10\,x) + \frac{1}{64}\cos(8\,x) - \frac{3}{32}\cos(4\,x) - \frac{3}{16}\cos(2\,x)\right]_{-\frac{1}{3}\pi}^{3\pi}\\ &= -\frac{243}{640},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 78. ← page 7

1. L'application $x \mapsto \cos(5x)^2\,e^{(-42\,x)}$ est continue sur $[-\frac{1}{6}\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{6}\pi, +\infty[$, on a :
$$0 \leqslant \cos(5\,x)^2\,e^{(-42\,x)} \leqslant e^{(-42\,x)},$$
et on sait que l'intégrale $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty} e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\cos(5\,x)^2\,e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.
2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\cos(5\,x)^2\,e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}(\cos(10\,x)+1)e^{(-42\,x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\cos(10\,x)\,e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\cos(10\,x)\,e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}e^{((10i-42)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{10i-42}e^{((10i-42)\,x)}\right]_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\right),$$
et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{10i-42}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\cos(10\,x)\,e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{21}{1864}i - \frac{5}{1864}\right)\sqrt{3}e^{(7\,\pi)} + \left(\frac{5}{1864}i + \frac{21}{1864}\right)e^{(7\,\pi)}\right),$$
et donc :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\cos(10\,x)\,e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{5}{1864}\sqrt{3}e^{(7\,\pi)} + \frac{21}{1864}e^{(7\,\pi)}.$$
On calcule de même $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{42}e^{(7\,\pi)}$. On peut conclure :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{+\infty}\cos(5\,x)^2\,e^{(-42\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{5}{3728}\sqrt{3}e^{(7\,\pi)} + \frac{1373}{78288}e^{(7\,\pi)}.$$

Corrigé 79. ← page 7

1. L'application $x \mapsto xe^{(-3\,x)}\sin(11\,x)^2$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :
$$0 \leqslant xe^{(-3\,x)}\sin(11\,x)^2 \leqslant xe^{(-3\,x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-3\,x)} = x^3e^{(-3\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$xe^{(-3\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment [0,1]. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)}\sin(11\,x)^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.
2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)}\sin(11\,x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x(\cos(22\,x)-1)e^{(-3\,x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\cos(22\,x)\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_0^{+\infty} x\cos(22\,x)\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} xe^{((22i-3)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_0^{+\infty} x\cos(22\,x)\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{132}{243049}i - \frac{475}{243049}\right),$$
et donc :
$$\int_0^{+\infty} x\cos(22\,x)\,e^{(-3\,x)}\mathrm{d}x = -\frac{475}{243049}.$$
On calcule de même $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}$. On peut conclure :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-3\,x)}\sin(11\,x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{123662}{2187441}.$$

Corrigé 80. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 7
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} xe^{x}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} xe^{((3i+1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} xe^{x}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{3}{20}i+\frac{9}{20}\right)\pi e^{\left(\frac{3}{2}\pi\right)} - \left(\frac{1}{60}i+\frac{1}{20}\right)\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\pi\right)} + \left(\frac{2}{25}i-\frac{3}{50}\right)e^{\left(\frac{3}{2}\pi\right)} + \left(\frac{2}{25}i-\frac{3}{50}\right)e^{\left(-\frac{1}{6}\pi\right)}\right),$$
et donc :
$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} xe^{x}\sin(3\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{20}\pi e^{\left(\frac{3}{2}\pi\right)} - \frac{1}{60}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\pi\right)} + \frac{2}{25}e^{\left(\frac{3}{2}\pi\right)} + \frac{2}{25}e^{\left(-\frac{1}{6}\pi\right)}.$$

Corrigé 81. ← page 7

1. L'application $x \mapsto e^{(-4\,x)} \sin{(13\,x)}^2$ est continue sur $[\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\pi, +\infty[$, on a :
$$0 \leqslant e^{(-4\,x)} \sin{(13\,x)}^2 \leqslant e^{(-4\,x)},$$
et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} e^{(-4\,x)} \sin{(13\,x)}^2\,\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.
2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :
$$\begin{aligned}\int_\pi^{+\infty} e^{(-4\,x)} \sin{(13\,x)}^2\,\mathrm{d}x &= \int_\pi^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\,(\cos{(26\,x)} - 1)e^{(-4\,x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty} \cos{(26\,x)}\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty} e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_\pi^{+\infty} \cos{(26\,x)}\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_\pi^{+\infty} e^{((26i-4)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{26i-4}e^{((26i-4)\,x)}\right]_\pi^{+\infty}\right),$$
et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{26i-4}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :
$$\int_\pi^{+\infty} \cos{(26\,x)}\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{13}{346}i + \frac{1}{173}\right)\,e^{(-4\,\pi)}\right),$$
et donc :
$$\int_\pi^{+\infty} \cos{(26\,x)}\,e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{173}\,e^{(-4\,\pi)}.$$
On calcule de même $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} e^{(-4\,x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,e^{(-4\,\pi)}$. On peut conclure :
$$\int_\pi^{+\infty} e^{(-4\,x)} \sin{(13\,x)}^2\,\mathrm{d}x = \frac{169}{1384}\,e^{(-4\,\pi)}.$$

Corrigé 82. ← page 7

1. L'application $x \mapsto xe^{(-x)} \sin{(2\,x)}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :
$$\left|xe^{(-x)} \sin{(2\,x)}\right| \leqslant xe^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot xe^{(-x)} = x^3 e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$xe^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge aussi par continuité sur le segment [0,1]. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-x)} \sin{(2\,x)}\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} xe^{((2i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\frac{4}{25}i - \frac{3}{25}\right),$$
et donc :
$$\int_0^{+\infty} xe^{(-x)}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{25}.$$

Corrigé 83. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(x)$ et $\sin(24\,x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 7

$$\begin{aligned}\sin(24\,x)^2\sin(x)^2 &= \frac{1}{16}\left(e^{(24i\,x)} - e^{(-24i\,x)}\right)^2\left(e^{(i\,x)} - e^{(-i\,x)}\right)^2\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{(50i\,x)} - 2\,e^{(48i\,x)} + e^{(46i\,x)} - 2\,e^{(2i\,x)} - 2\,e^{(-2i\,x)} + e^{(-46i\,x)} - 2\,e^{(-48i\,x)} + e^{(-50i\,x)} + 4\right)\\ &= \frac{1}{8}\cos(50\,x) - \frac{1}{4}\cos(48\,x) + \frac{1}{8}\cos(46\,x) - \frac{1}{4}\cos(2\,x) + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{18\,\pi}\sin(24\,x)^2\sin(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{18\,\pi}\left(\frac{1}{8}\cos(50\,x) - \frac{1}{4}\cos(48\,x) + \frac{1}{8}\cos(46\,x) - \frac{1}{4}\cos(2\,x) + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{400}\sin(50\,x) - \frac{1}{192}\sin(48\,x) + \frac{1}{368}\sin(46\,x) - \frac{1}{8}\sin(2\,x)\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{18\,\pi}\\ &= \frac{37}{8}\pi,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 84. ← page 7

1. L'application $x \mapsto x^2\cos(x)\,e^{(-2\,x)}$ est continue sur $[3\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [3\,\pi, +\infty[$, on a :
$$\left|x^2\cos(x)\,e^{(-2\,x)}\right| \leqslant x^2e^{(-2\,x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2e^{(-2\,x)} = x^4e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$x^2e^{(-2\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{3\,\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{3\,\pi}^{+\infty} x^2e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{3\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.
2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{3\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(x)\,e^{(-2\,x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{3\,\pi}^{+\infty} x^2e^{((i-2)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{3\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(x)\, e^{(-2\,x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\left(\frac{9}{5} i + \frac{18}{5}\right) \pi^2 e^{(-6\,\pi)} - \left(\frac{24}{25} i + \frac{18}{25}\right) \pi e^{(-6\,\pi)} - \left(\frac{22}{125} i + \frac{4}{125}\right) e^{(-6\,\pi)} \right),$$

et donc :

$$\int_{3\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(x)\, e^{(-2\,x)} \mathrm{d}x = -\frac{18}{5} \pi^2 e^{(-6\,\pi)} - \frac{18}{25} \pi e^{(-6\,\pi)} - \frac{4}{125} e^{(-6\,\pi)}.$$

Corrigé 85. ← page 7

1. L'application $x \mapsto x^2 \cos(28\,x)\, e^{(-x)}$ est continue sur $[\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$, on a :

$$\left| x^2 \cos(28\,x)\, e^{(-x)} \right| \leqslant x^2 e^{(-x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-x)} = x^4 e^{(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2 e^{(-x)} = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(28\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(28\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{((28 i - 1)\,x)} \mathrm{d}x \right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(28\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\left(\frac{1}{56520} i - \frac{7}{14130}\right) \sqrt{3}\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \left(\frac{7}{14130} i + \frac{1}{56520}\right) \pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \left(\frac{261}{1232450} i + \frac{28}{184867\ldots}\right.\right.\right.$$

et donc :

$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(28\,x)\, e^{(-x)} \mathrm{d}x = -\frac{7}{14130} \sqrt{3}\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{1}{56520} \pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{28}{1848675} \sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{261}{1232450} \pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{21868}{483736625}$$

Corrigé 86. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 8

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{5}{3}\,\pi} x \cos(x)\, e^{(-2\,x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{5}{3}\,\pi} x e^{((i-2)\,x)} \mathrm{d}x \right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{5}{3}\,\pi} x \cos(x)\, e^{(-2\,x)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\left(\frac{1}{40} i - \frac{3}{40}\right) \sqrt{2}\pi e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} + \left(\frac{1}{3} i - \frac{1}{6}\right) \sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{10}{3}\,\pi\right)} - \left(\frac{1}{6} i + \frac{1}{3}\right) \pi e^{\left(-\frac{10}{3}\,\pi\right)} + \left(\frac{1}{50} i + \frac{7}{50}\right) \sqrt{2} e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} \right.\right.$$

et donc :

$$\int_{-\frac{1}{4}\,\pi}^{\frac{5}{3}\,\pi} x \cos(x)\, e^{(-2\,x)} \mathrm{d}x = -\frac{3}{40} \sqrt{2}\pi e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \frac{1}{6} \sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{10}{3}\,\pi\right)} - \frac{1}{3} \pi e^{\left(-\frac{10}{3}\,\pi\right)} + \frac{7}{50} \sqrt{2} e^{\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)} - \frac{2}{25} \sqrt{3} e^{\left(-\frac{10}{3}\,\pi\right)} - \frac{3}{50} e^{\left(-\frac{10}{3}\,\pi\right)}.$$

Corrigé 87. ← page 8

1. L'application $x \mapsto x^2 \cos(2\,x)^2\, e^{(-x)}$ est continue sur $[\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\frac{1}{6}\,\pi, +\infty[$, on a :
$$0 \leqslant x^2 \cos(2\,x)^2\, e^{(-x)} \leqslant x^2 e^{(-x)},$$
et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-x)} = x^4 e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$x^2 e^{(-x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2\,x)^2\, e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge : d'où le résultat.

2. Commençons par linéariser le terme trigonométrique. On a :
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 \cos(2\,x)^2\, e^{(-x)}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\,x^2(\cos(4\,x)+1)e^{(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{((4i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$
et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :
$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{1224}i - \frac{1}{306}\right)\sqrt{3}\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \left(\frac{1}{306}i + \frac{1}{1224}\right)\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \left(\frac{5}{578}i + \frac{4}{867}\right)\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \right.$$
et donc :
$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(4\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{306}\sqrt{3}\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{1}{1224}\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{4}{867}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{5}{578}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{52}{4913}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{47}{4913}e^{(}$$
On calcule de même $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x$ (c'est même plus simple puisqu'il n'y a plus de nombre complexe à prendre en compte), et on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-x)}\mathrm{d}x = \Gamma\left(3, \frac{1}{6}\,\pi\right)$. On peut conclure :
$$\int_{\frac{1}{6}\,\pi}^{+\infty} x^2\cos(2\,x)^2\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{612}\sqrt{3}\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{11}{816}\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} - \frac{2}{867}\sqrt{3}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{593}{3468}\pi e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{26}{4913}\sqrt{3}e^{\left(-\frac{1}{6}\,\pi\right)} + \frac{9873}{9826}e^{(}$$

Corrigé 88. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(12\,x)$ et $\sinh(3\,x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8
$$\begin{aligned}\sinh(12\,x)^2\sinh(3\,x)^3 &= \frac{1}{32}\left(e^{(12\,x)} - e^{(-12\,x)}\right)^2\left(e^{(3\,x)} - e^{(-3\,x)}\right)^3\\ &= \frac{1}{32}\left(e^{(33\,x)} - 3\,e^{(27\,x)} + 3\,e^{(21\,x)} - e^{(15\,x)} - 2\,e^{(9\,x)} + 6\,e^{(3\,x)} - 6\,e^{(-3\,x)} + 2\,e^{(-9\,x)} + e^{(-15\,x)} - 3\,e^{(-21\,x)} + 3\,e\right.\\ &= \frac{1}{16}\sinh(33\,x) - \frac{3}{16}\sinh(27\,x) + \frac{3}{16}\sinh(21\,x) - \frac{1}{16}\sinh(15\,x) - \frac{1}{8}\sinh(9\,x) + \frac{3}{8}\sinh(3\,x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sinh(12\,x)^2 \sinh(3\,x)^3 \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{16}\sinh(33\,x) - \frac{3}{16}\sinh(27\,x) + \frac{3}{16}\sinh(21\,x) - \frac{1}{16}\sinh(15\,x) - \frac{1}{8}\sinh(9\,x) + \frac{3}{8}\sinh(3\,x)\right. \\ &= \left[\frac{1}{528}\cosh(33\,x) - \frac{1}{144}\cosh(27\,x) + \frac{1}{112}\cosh(21\,x) - \frac{1}{240}\cosh(15\,x) - \frac{1}{72}\cosh(9\,x) + \frac{1}{8}\cosh(3\right. \\ &= 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 89. Commençons par linéariser, en écrivant $\sinh(44\,x)$ et $\sinh(3\,x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8

$$\begin{aligned}\sinh(44\,x)\sinh(3\,x)^3 &= \frac{1}{16}\left(e^{(44\,x)} - e^{(-44\,x)}\right)\left(e^{(3\,x)} - e^{(-3\,x)}\right)^3 \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{(53\,x)} - 3\,e^{(47\,x)} + 3\,e^{(41\,x)} - e^{(35\,x)} - e^{(-35\,x)} + 3\,e^{(-41\,x)} - 3\,e^{(-47\,x)} + e^{(-53\,x)}\right) \\ &= \frac{1}{8}\cosh(53\,x) - \frac{3}{8}\cosh(47\,x) + \frac{3}{8}\cosh(41\,x) - \frac{1}{8}\cosh(35\,x)\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-7}^{5} \sinh(44\,x)\sinh(3\,x)^3 \,\mathrm{d}x &= \int_{-7}^{5} \left(\frac{1}{8}\cosh(53\,x) - \frac{3}{8}\cosh(47\,x) + \frac{3}{8}\cosh(41\,x) - \frac{1}{8}\cosh(35\,x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{424}\sinh(53\,x) - \frac{3}{376}\sinh(47\,x) + \frac{3}{328}\sinh(41\,x) - \frac{1}{280}\sinh(35\,x)\right]_{-7}^{5} \\ &= \frac{1}{424}\sinh(371) - \frac{3}{376}\sinh(329) + \frac{3}{328}\sinh(287) + \frac{1}{424}\sinh(265) - \frac{1}{280}\sinh(245) - \frac{3}{376}\sinh(235\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 90. ← page 8

1. L'application $x \mapsto x^2 e^{(-5\,x)}\sin(4\,x)$ est continue sur $[\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [\pi, +\infty[$, on a :

$$\left|x^2 e^{(-5\,x)}\sin(4\,x)\right| \leqslant x^2 e^{(-5\,x)},$$

et on va montrer l'intégrabilité de ce majorant par croissances comparés. On a en effet, pour tout x au voisinage de $+\infty$: $x^2 \cdot x^2 e^{(-5\,x)} = x^4 e^{(-5\,x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$x^2 e^{(-5\,x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-5\,x)}\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-5\,x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.

2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :

$$\int_{\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-5\,x)}\sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{\pi}^{+\infty} x^2 e^{((4i-5)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties deux fois : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-5\,x)} \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{4}{41}i + \frac{5}{41}\right)\pi^2 e^{(-5\,\pi)} + \left(\frac{80}{1681}i + \frac{18}{1681}\right)\pi e^{(-5\,\pi)} + \left(\frac{472}{68921}i - \frac{230}{68921}\right)e^{(-5\,\pi)}\right),$$

et donc :

$$\int_{\pi}^{+\infty} x^2 e^{(-5\,x)} \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{41}\pi^2 e^{(-5\,\pi)} + \frac{80}{1681}\pi e^{(-5\,\pi)} + \frac{472}{68921}e^{(-5\,\pi)}.$$

Corrigé 91. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(x)$ et $\sin(5\,x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8

$$\begin{aligned}\sin(5\,x)^4 \sin(x) &= \frac{1}{32i}\left(e^{(5i\,x)} - e^{(-5i\,x)}\right)^4\left(e^{(i\,x)} - e^{(-i\,x)}\right)\\ &= \frac{1}{32i}\left(e^{(21i\,x)} - e^{(19i\,x)} - 4\,e^{(11i\,x)} + 4\,e^{(9i\,x)} + 6\,e^{(i\,x)} - 6\,e^{(-i\,x)} - 4\,e^{(-9i\,x)} + 4\,e^{(-11i\,x)} + e^{(-19i\,x)} - e^{(-21i\,x)}\right)\\ &= \frac{1}{16}\sin(21\,x) - \frac{1}{16}\sin(19\,x) - \frac{1}{4}\sin(11\,x) + \frac{1}{4}\sin(9\,x) + \frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0} \sin(5\,x)^4 \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1}{16}\sin(21\,x) - \frac{1}{16}\sin(19\,x) - \frac{1}{4}\sin(11\,x) + \frac{1}{4}\sin(9\,x) + \frac{3}{8}\sin(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{1}{336}\cos(21\,x) + \frac{1}{304}\cos(19\,x) + \frac{1}{44}\cos(11\,x) - \frac{1}{36}\cos(9\,x) - \frac{3}{8}\cos(x)\right]_{-\pi}^{0}\\ &= -\frac{10000}{13167},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 92. Commençons par linéariser, en écrivant $\cosh(3\,x)$ et $\sinh(x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8

$$\begin{aligned}\cosh(3\,x)^3 \sinh(x) &= \frac{1}{16} - \left(e^{(3\,x)} + e^{(-3\,x)}\right)^3\left(e^{(-x)} - e^{x}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{(10\,x)} - e^{(8\,x)} + 3\,e^{(4\,x)} - 3\,e^{(2\,x)} + 3\,e^{(-2\,x)} - 3\,e^{(-4\,x)} + e^{(-8\,x)} - e^{(-10\,x)}\right)\\ &= \frac{1}{8}\sinh(10\,x) - \frac{1}{8}\sinh(8\,x) + \frac{3}{8}\sinh(4\,x) - \frac{3}{8}\sinh(2\,x).\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \cosh(3\,x)^3 \sinh(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{8}\sinh(10\,x) - \frac{1}{8}\sinh(8\,x) + \frac{3}{8}\sinh(4\,x) - \frac{3}{8}\sinh(2\,x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{80}\cosh(10\,x) - \frac{1}{64}\cosh(8\,x) + \frac{3}{32}\cosh(4\,x) - \frac{3}{16}\cosh(2\,x)\right]_{-1}^{2}\\ &= \frac{1}{80}\cosh(20) - \frac{1}{64}\cosh(16) - \frac{1}{80}\cosh(10) + \frac{7}{64}\cosh(8) - \frac{9}{32}\cosh(4) + \frac{3}{16}\cosh(2),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 93. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a : ← page 8

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} xe^{((i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right),$$

et on calcule cette intégrale en intégrant par parties : on dérive la fonction puissance et intègre le facteur exponentielle. On obtient ainsi, après des calculs que nous ne détaillons pas :

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} x\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{8}i\sqrt{2}\pi e^{(-\frac{1}{4}\pi)} + \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\pi e^{\pi} - \left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}\right)\sqrt{2}e^{(-\frac{1}{4}\pi)} - \frac{1}{2}i\,e^{\pi}\right),$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{4}\pi} x\cos(x)\, e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\pi e^{\pi} + \frac{1}{4}\,\sqrt{2}e^{\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}.$$

Corrigé 94. Commençons par linéariser, en écrivant $\cosh(2\,x)$ et $\cosh(x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8

$$\begin{aligned}\cosh(2\,x)^2\cosh(x) &= \frac{1}{8}\left(e^{(2\,x)} + e^{(-2\,x)}\right)^2\left(e^{(-x)} + e^{x}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{(5\,x)} + e^{(3\,x)} + 2\,e^{(-x)} + e^{(-3\,x)} + e^{(-5\,x)} + 2\,e^{x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\,\cosh(5\,x) + \frac{1}{4}\,\cosh(3\,x) + \frac{1}{2}\,\cosh(x)\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cosh(2\,x)^2\cosh(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\,\cosh(5\,x) + \frac{1}{4}\,\cosh(3\,x) + \frac{1}{2}\,\cosh(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{20}\,\sinh(5\,x) + \frac{1}{12}\,\sinh(3\,x) + \frac{1}{2}\,\sinh(x)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{20}\,\sinh(5) + \frac{1}{12}\,\sinh(3) + \frac{1}{2}\,\sinh(1)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 95. ← page 8

1. L'application $x \mapsto \cos(x)\,e^{(-x)}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :
$$\left|\cos(x)\,e^{(-x)}\right| \leqslant e^{(-x)},$$
et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.
2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_0^{+\infty}\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{((i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{i-1}e^{((i-1)\,x)}\right]_0^{+\infty}\right),$$
et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :
$$\int_0^{+\infty}\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right),$$
et donc :
$$\int_0^{+\infty}\cos(x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Corrigé 96. Commençons par linéariser, en écrivant $\cosh(3\,x)$ et $\sinh(x)$ en fonction d'exponentielles, en revenant à la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8

$$\begin{aligned}\cosh(3\,x)\sinh(x)^3 &= \frac{1}{16} - \left(e^{(3\,x)} + e^{(-3\,x)}\right)\left(e^{(-x)} - e^{x}\right)^3\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{(6\,x)} - 3\,e^{(4\,x)} + 3\,e^{(2\,x)} - 3\,e^{(-2\,x)} + 3\,e^{(-4\,x)} - e^{(-6\,x)}\right)\\ &= \frac{1}{8}\,\sinh(6\,x) - \frac{3}{8}\,\sinh(4\,x) + \frac{3}{8}\,\sinh(2\,x)\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau la définition des fonctions trigonométriques hyperboliques. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cosh(3\,x)\sinh(x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{8}\sinh(6\,x) - \frac{3}{8}\sinh(4\,x) + \frac{3}{8}\sinh(2\,x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{48}\cosh(6\,x) - \frac{3}{32}\cosh(4\,x) + \frac{3}{16}\cosh(2\,x)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{48}\cosh(6) - \frac{3}{32}\cosh(4) + \frac{3}{16}\cosh(2) - \frac{11}{96},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 97. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(3\,x)$ et $\sin(2\,x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8

$$\begin{aligned}\cos(3\,x)\sin(2\,x)^2 &= \frac{1}{-8}\left(e^{(3i\,x)} + e^{(-3i\,x)}\right)\left(e^{(2i\,x)} - e^{(-2i\,x)}\right)^2\\ &= \frac{1}{-8}\left(e^{(7i\,x)} - 2\,e^{(3i\,x)} + e^{(i\,x)} + e^{(-i\,x)} - 2\,e^{(-3i\,x)} + e^{(-7i\,x)}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\cos(7\,x) + \frac{1}{2}\cos(3\,x) - \frac{1}{4}\cos(x)\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^0 \cos(3\,x)\sin(2\,x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^0 \left(-\frac{1}{4}\cos(7\,x) + \frac{1}{2}\cos(3\,x) - \frac{1}{4}\cos(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{1}{28}\sin(7\,x) + \frac{1}{6}\sin(3\,x) - \frac{1}{4}\sin(x)\right]_{-\pi}^0\\ &= 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 98. Commençons par linéariser, en écrivant $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8

$$\begin{aligned}\cos(x)^2\sin(x)^3 &= \frac{1}{-32i}\left(e^{(i\,x)} + e^{(-i\,x)}\right)^2\left(e^{(i\,x)} - e^{(-i\,x)}\right)^3\\ &= \frac{1}{-32i}\left(e^{(5i\,x)} - e^{(3i\,x)} - 2\,e^{(i\,x)} + 2\,e^{(-i\,x)} + e^{(-3i\,x)} - e^{(-5i\,x)}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\sin(5\,x) + \frac{1}{16}\sin(3\,x) + \frac{1}{8}\sin(x)\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{14}{3}\pi} \cos(x)^2\sin(x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{14}{3}\pi} \left(-\frac{1}{16}\sin(5\,x) + \frac{1}{16}\sin(3\,x) + \frac{1}{8}\sin(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{80}\cos(5\,x) - \frac{1}{48}\cos(3\,x) - \frac{1}{8}\cos(x)\right]_0^{\frac{14}{3}\pi}\\ &= \frac{27}{160},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 99. Commençons par linéariser, en écrivant $\cos(x)$ et $\cos(6\,x)$ en fonction d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : ← page 8

$$\begin{aligned}\cos(6\,x)^4\cos(x) &= \frac{1}{32}\left(e^{(6i\,x)} + e^{(-6i\,x)}\right)^4\left(e^{(i\,x)} + e^{(-i\,x)}\right)\\ &= \frac{1}{32}\left(e^{(25i\,x)} + e^{(23i\,x)} + 4\,e^{(13i\,x)} + 4\,e^{(11i\,x)} + 6\,e^{(i\,x)} + 6\,e^{(-i\,x)} + 4\,e^{(-11i\,x)} + 4\,e^{(-13i\,x)} + e^{(-23i\,x)} + e^{(-25i\,x)}\right)\\ &= \frac{1}{16}\cos(25\,x) + \frac{1}{16}\cos(23\,x) + \frac{1}{4}\cos(13\,x) + \frac{1}{4}\cos(11\,x) + \frac{3}{8}\cos(x)\,.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en regroupant les exponentielles dont les arguments sont opposés, et en utilisant à nouveau les formules d'Euler. On sait alors intégrer chacun des termes ainsi obtenus, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-6\,\pi}^{0} \cos(6\,x)^4 \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-6\,\pi}^{0} \left(\frac{1}{16}\cos(25\,x) + \frac{1}{16}\cos(23\,x) + \frac{1}{4}\cos(13\,x) + \frac{1}{4}\cos(11\,x) + \frac{3}{8}\cos(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{400}\sin(25\,x) + \frac{1}{368}\sin(23\,x) + \frac{1}{52}\sin(13\,x) + \frac{1}{44}\sin(11\,x) + \frac{3}{8}\sin(x)\right]_{-6\,\pi}^{0} \\ &= 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 100. ← page 8

1. L'application $x \mapsto \cos(3\,x)\,e^{(-x)}$ est continue sur $[2\,\pi, +\infty[$. Étudions son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \in [2\,\pi, +\infty[$, on a :
$$\left|\cos(3\,x)\,e^{(-x)}\right| \leqslant e^{(-x)},$$
et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_{2\,\pi}^{+\infty} e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge (c'est une intégrale de référence). Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{2\,\pi}^{+\infty} \cos(3\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge : d'où le résultat.
2. On passe à la forme exponentielle pour simplifier les calculs qui suivent. On a :
$$\int_{2\,\pi}^{+\infty} \cos(3\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{2\,\pi}^{+\infty} e^{((3i-1)\,x)}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{3i-1}e^{((3i-1)\,x)}\right]_{2\,\pi}^{+\infty}\right),$$
et on en déduit (on met directement sous forme algébrique $\frac{1}{3i-1}$ pour faciliter l'identification de ses parties réelle et imaginaire ensuite) :
$$\int_{2\,\pi}^{+\infty} \cos(3\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{3}{10}i + \frac{1}{10}\right)e^{(-2\,\pi)}\right),$$
et donc :
$$\int_{2\,\pi}^{+\infty} \cos(3\,x)\,e^{(-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\,e^{(-2\,\pi)}.$$